

# ルーティング四方山話

## The saga of rooted staggered quarks

To Michael Creutz on his 75th anniversary

木村太郎<sup>\*§</sup>

三角樹弘<sup>†‡§</sup>

Taro Kimura

Tatsuhiko Misumi

taro.kimura@u-bourgogne.fr

misumi@phys.akita-u.ac.jp

December 21, 2019

### Abstract

ルーティング問題に関する M. Creutz 氏の論評 [1] の邦訳です。

This is a Japanese translation of the article by M. Creutz [1].

---

<sup>\*</sup>Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université Bourgogne Franche-Comté, 21078 Dijon, France

<sup>†</sup>Department of Mathematical Science, Akita University, Akita 010-8502, Japan

<sup>‡</sup>iTHEMS Program, RIKEN, Saitama 351-0198, Japan

<sup>§</sup>Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University, Kanagawa 223-8521, Japan

---

本稿ではルーティング論争を歴史的観点から振り返り、如何にして「ルーティングを用いたスタガードクォークの数値シミュレーションには問題がある」という結論に至ったかを概観します。

---

格子ゲージ理論界限は近年 (2008 年当時), クォークとグルーオンの非摂動的相互作用を記述するアルゴリズムの一つに関して, 極めて激しい論争に直面しています. この方法はスタガードクォークと呼ばれる手法に基づくもので, 動的なフレバー数を調整するために信頼出来ない近似を用いているにも関わらず, 米国 QCD 業界においては最もよく用いられる手法になっています. しかし, このアルゴリズムを用いた数値シミュレーションによって膨大な量の計算が既になされていることもあり, 専門家たちは「連続極限を取れば厳密になる」と独断的に主張するだけで, この方法に伴う理論的な問題と真摯に向き合おうとしません. この手法を使わない世界中の格子場の理論家達はすでにこの問題に気付いているにも関わらずです. 残念ながらこの方法では重要な非摂動的効果が不適切に取り扱われており, 連続極限で厳密になることはあり得ません. 本稿ではこの論争を歴史的観点から振り返り, 如何にして「ルーティングを用いたスタガードクォークの数値シミュレーションには問題がある」という結論に至ったかを概観します.

事の発端は 1970 年代半ば, 場の理論の理解が大進展した時代にまで遡ります. この時期は QCD や, クォークとグルーオンに関する閉じ込めの問題が議論されるようになった頃であり, 従来の摂動論では取り扱うことが出来ない現象が数多く存在することが急速に認識されるようになりました. 例えばソリトンやインスタントン, 閉じ込めの問題, そして一見全く異なる理論間の双対性などです. その中でもとりわけ重要と思われるのは, QCD には「 $\theta$ 」と呼ばれる非摂動的なパラメータが存在し, CP 対称性の破れを特徴付けている, という事実の発見です. 実はこの  $\theta$  がスタガードフェルミオンに関する問題の核心に大に関わってきます.

どの様に  $\theta$  が物理現象に影響するか、というのは難しい問題で、長年「その影響は場の理論を正則化すると消えてしまうのでは?」という憶測がしばしば飛び交っていました。私自身、T. Tudron との論文 [2] でそういった提案をしたことがありますが、今となってはそれは正しくなかったと考えています。

ルーティングの問題とは、フェルミオン数の縮退 (ダブル) を伴うある特定の格子フェルミオン定式化に関係しています。例えば 4 つのフェルミオン自由度が縮退してしまうスタガードフェルミオンという定式化がありますが、ルーティングの方法とは、フェルミオン行列式をその 4 乗根に置き換える事で、単一のフレーバー自由度の寄与を再現しよう、というものです。以下で述べる様に、その様なことをしてしまうと場の理論の重要な非摂動的性質が台無しになってしまいます。

1980 年代になると格子ゲージ理論の方法は急速に発展し、摂動論を用いずとも多くの定量的な結果が得られる様になりました。しかし当時はそもそも計算量の問題から動的なフェルミオンを取り入れるのが困難であり、ルーティングの問題は存在していませんでした。また、フェルミオンが無い場合でも非可換ゲージ理論に現れる  $\theta$  項がルーティングの問題と関係していますが、符号問題の為にその問題を調べることは不可能でした。ここで注意しておかなければならないのは、この符号問題はルーティングに伴う符号問題とは別物である、ということです。後者は特に物事の不適切な取り扱いに起因するもので、 $\theta$  が物理的なパラメータとして関わってくる現象を正しく議論出来ませんし、同様の問題は  $\theta$  がゼロの場合であっても生じてしまいます。

1995 年になってようやく有効カイラルラグランジアンの方法によって  $\theta$  の意味を理解出来ることが分かりました。それは特段に新しいアイデアというわけではないのですが、ただ単にそれまで個人的に理解出来ていなかった、というわけです。論文 [3] では由緒ある  $\pi$  粒子に対する線形シグマ模型を用いてこれを議論しました。まず「メキシカ

ンハット型」あるいは「ワインボトルの底型」のエネルギーポテンシャル図を考えましょう。この時、真空は縮退しており、軽い  $\pi$  粒子はポテンシャルの底まわりの場のゆらぎを表しますが、これに対して特定の場の配位方向に「傾ける」ことで  $\pi$  粒子に質量を与えることができます。さて、2つの軽いクォークを考えた場合、その質量差はこの状況をどう変えるのでしょうか。実はそれはポテンシャルの「歪み」という高次(2次)効果を与えており、最終的には「傾き」「歪み」そして「これらの効果が表れる方向の違い」という3つの効果を考慮することになります。これらはよく知られた理論のパラメータであるアップクォーク質量、ダウルクォーク質量、強い CP 問題を特徴付ける  $\theta$  と非線形的に連動しています。こうした平易で直観的な解釈によって、私は  $\theta$  が実際に物理的な意味を持つことを確信したのです。

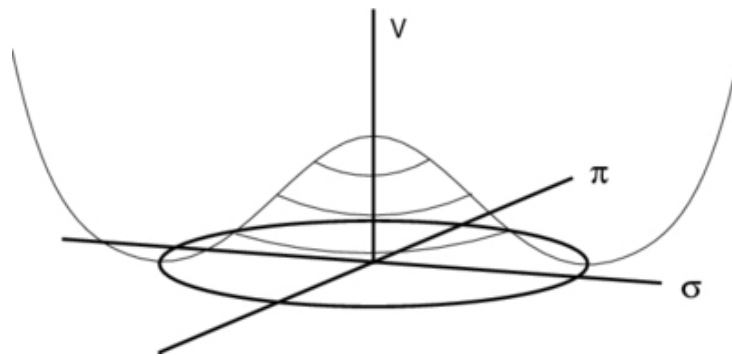


Figure 1:  $\pi$  粒子の物理はカイラル対称性の自発的破れで理解することが出来ます。 $\pi$  粒子はほぼ縮退した真空まわりでのクォーク凝縮の励起に他なりません。クォーク質量はこのポテンシャルを歪ませます。アップクォーク・ダウルクォークの質量、 $\theta$  は、ポテンシャルの傾き、2次の歪み、そしてこの2つの間の角度、の3つに非線形的に連動しています。

このポテンシャルの歪みを調整することで、より興味深い様々な現象を議論することが出来ます。例えばパラメーターを色々と動かしてみると、孤立しているもののほぼ縮退している真空があり、それによって1次相転移を引き起こす所があるのですが、そ

これはちょうど  $\theta = \pi$  に対応しています。この論文ではフレーバー対称性が  $SU(2)$  よりも大きい場合や、またこの 1 次相転移が複数のクォーク質量の縮退に伴う普遍的なものであることも議論しました。

この段階になって、ルーティングに対する疑念が徐々に湧いてきました。カイラルラグランジアンでは質量を複素数と考え、 $\theta$  をその位相と関連付けるのが自然です。 $N_f$  フレバーに共通の質量・位相を付与すると、物理的な  $\theta$  は  $N_f$  倍され、複素質量平面では  $N_f$  個の等価な 1 次転移点が原点に集まる形で  $\theta = \pi$  の 1 次相転移が現れます。これは  $N_f$  の関数としては非常に非解析的な振る舞いで、フレーバー数を増やすごとに新たな転移が現れます。ルーティングを施さない通常のスタガードフェルミオンには 4 フレバー分の自由度が存在するので、4 つの転移点が原点に集まってくるのです。フェルミオン行列式の 4 乗根を取るルーティングの操作によって 1 フレバー分の自由度を取り出すことが出来るのでは、という期待がありますが、フェルミオン行列式の 4 乗根を取る操作はスムーズな操作ですので、どうやって 4 つの相転移が 1 つになってしまうのか、皆目見当が付きません。

この点をより詳細に検討するためには、カイラルラグランジアンで複数のフレーバー自由度を導入し、特にフレーバーの縮退がない場合の振る舞いを調べるのが有効です。論文 [4] ではアップ・ダウン・ストレンジクォーク質量を実数パラメータとして 3 フレバー QCD の相図を示しました。その相構造は非常に豊かで、自発的に CP 対称性の破れる相もあります。これらの振る舞いは Dashen によって予見されていたもので、 $\theta = \pi$  に対応する状況で生じます。

この相図で特に興味深い点は、1 つのクォークがゼロ質量になるだけでは相転移が起こらない点です。これはフレーバー群が  $U(N_f)$  でなく、 $SU(N_f)$  であるため、1 つのクォーク質量が小さくなっても他の有限質量クォークによって真空が安定化されることに起因しています。そこで私はクォーク質量が本当にゼロかどうかを決定する物理的な測定が可能であるか考えてみましたが、結局うまい測定方法は思いつきませんでした。そ

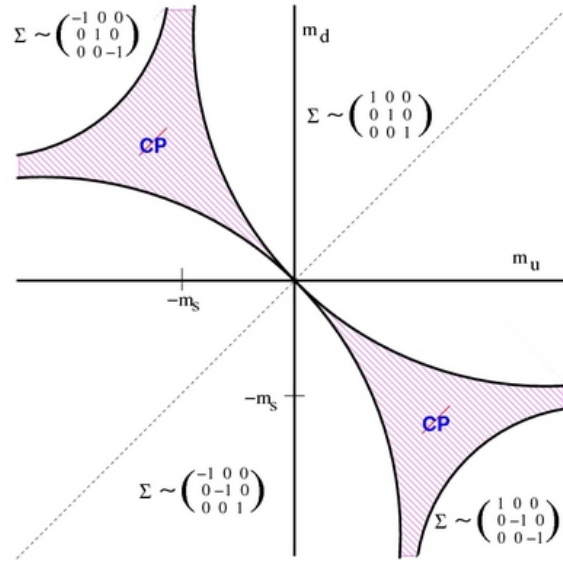


Figure 2: ストレンジクォーク質量を固定してアップ・ダウンクォーク質量を変化させた場合の 3 フレバー QCD の相構造. 斜線部分が  $\theta = \pi$  で自発的 CP 対称性が破れている相を表す. ルーティングをすると相転移線とグラフ軸が離れず, 特異的な振る舞いを示す.

ここで 1 つだけのクォークがゼロ質量か否かというのは物理的に意味がない, という提案をして論文を Physical Review D (PRD) に投稿しました.

この頃から状況がややこしくなり始めました. というのも, もしアップクォークがゼロ質量であれば「なぜ  $\theta$  が現象論的に非常に小さいのか」という問題 (強い CP 問題) は解決される, という共通認識があったからです. 一方, 私はこの認識が間違っている, と主張したわけです. 実際この論文の査読者はイラついた様子で「こんなに明らかな間違いをすることはどうしたんだ」と言ってくる程でした. その後同様の多くの批判を受け, 論文は PRD の編集者のところまで行ったのですが, 結局査読者たちの意見が認められてしまいました. ところが, PRD で掲載不許可 (リジェクト) になった後, 論文を QCD 相図とゼロ質量問題の 2 つに分けて再投稿したところ, 2 つとも Physical

Review Letters (PRL) に受理されたのです [5, 6]. PRD でリジェクトされた論文が 2 つの PRL 論文になったということで心底喜びました! ですがやはりこれは業界の多くの人がこの問題を未だ理解していない, もしくは気にかけていないことの表れでしょう. このトピックについての私の講演はオンラインで見ることが出来ます [7].

ゲージ場の理論には位相的感受率 (topological susceptibility) という物理量があり, これによってゼロ質量クォークを定義出来しようという提案があるのですが, 素朴に考えてみると, ゼロ質量ではゲージ場が非自明なトポロジを持つことでフェルミオン行列式が消えてしまいます. 従って位相的感受率自身が ill-defined でないと私の主張は正当化されません. これはゲージ場の巻き付き数 (トポロジカル数) もまた ill-defined であることを意味します. これに先んじて Lüscher は, ゲージ場が十分に滑らかであれば格子上でトポロジカル数をユニークに決められることを示していました. 彼の滑らかさ条件は, 巻き付き数と Dirac 演算子のゼロモードを結びつける指数定理をユニークに与える Neuberger のオーバーラップ演算子の定式化でも重要な役割を果たします. そこで私は論文 [8] で滑らかさ条件の影響を調べ, 無理に滑らかさを課すとハミルトニアンが非エルミートになってしまうことを示しました. 一方で, もし滑らかさ条件を課さない, オーバーラップ演算子の指数がカーネルの取り方に依存してしまうようなゲージ場配位が存在してしまうのです. つまりその理論的な美しさにも関わらず, オーバーラップ演算子はゼロ質量クォークを如何に定めるかという問題を解決するわけでは無いのです.

ここでスタガードクォークの問題に戻しましょう. もしルーティングによって 4 フレバーから 1 フレバーの自由度が取り出せるとすると, どれか 1 つでもクォークがゼロ質量になることで理論に特異性が生じてしまいます. この場合に対応するカイラル対称性の議論に基づくと, ゼロ質量クォークに伴うクォーク凝縮は消えなくてはなりません. これは重いクォークが軽いクォークの凝縮を有限値で安定化させるというカイラルラグランジアンによる解析と完全に矛盾します. これだけでスタガードクォークのルー

ティングが正しく無いことを納得するのに十分でした。

一方で、スタガードフェルミオンを用いた大規模な数値シミュレーションは続いていました。専門家たちはルーティングが正しいという仮定の下にシミュレーションを行っていることを認め、連続極限での正当性を装う為の体裁を整えていました。私はしばしば非公式にこの問題を訴えていましたが、そうした否定的な側面について論文を発表することに乗り気ではありませんでした。この問題についての私の講演を [9] から見ることが出来ます。スタガード支持者たちの主張は次第にひどいものになり、私はより積極的になる必要性を感じていました。スタガードクォークの問題に気付いているのであれば、それを誰かが公表しなければならないと考える様になったのです。当時はまだ「意固地な人達に関わると物事の本質が真剣に議論されなくなってしまう」という事実を正しく認識出来るほど思慮深くありませんでした。例えるなら (クォーク質量問題の時もそうでしたが)、テニユアを持たない研究者が、共通認識に反する研究を知らずにやらされているような世間知らずな有り様でした。

そこで私はルーティングとカイラル対称性に伴う物理現象の不整合性を指摘した論文 [10] を投稿しました。興味深い物議をかもす論文は出版しないという方針の PRL からはすぐにリジェクトされてしまい、さらにその後 PRD に転送された後、多くの査読者はただ断るばかりで物事が行き詰まってしまいました。およそ 1 年間、計 8 人の査読者からのレポートは肯定的なものもあれば否定的なものもありましたが、結局 PRD もまた物議をかもす論文は出版しないということでリジェクトになりました。私はこれをただ受け入れることはなく、挑戦的なタイトル「ルーティングこそ邪悪なり (The evil that is rooting)」で論文を書き直して投稿したところ、タイトルこそ編集者の提案で修正しましたが、Physics Letters ですぐさま掲載受理になりました [11]。この論文には Bernard-Golterman-Shamir-Sharpe からの反論がありましたが、さらに私は彼らの問題点を指摘して応戦しました。



私の主張への主たる反論は「確かにルーティングはカイラル対称性と不整合な振る舞いをしてしまうため、カイラル対称性に伴う議論は連続極限の後にすべきである」というものです。これは、スタガードクォークを使う主たる動機が、カイラル対称性の名残を残していることであったことを考えると幾分おかしい様に思えます。そしてルーティングによる 1 フレバーへの縮約については、カイラル対称性や、カイラル極限の概念が無いのですから、特に疑念を伴います。しかし事の本質はカイラル極限ではなく、 $\theta$  に関わる物理的な議論を不適切に行なっていることにあるのです。

当時、私は 2006 年に Tucson で行われた Lattice 会議のプログラム委員長を務めていました。スタガードフェルミオンに関する講演の議論になると、私はその様な明らかに誤った方法論に関する講演は一切受け入れられないと主張しました。ルーティングの最も熱心な支持者である運営委員の一人は私が議論に参加するのを辞退する様に言ってきましたが、一方で、スタガード業界の「ルーティングが間違っていることを証明してみよ、然もなくば黙せよ」という態度に強く反発する委員もいました。それにもかかわらず、残りの委員達はスタガードフェルミオンに関する講演も入れるべきという決定を行い、私の主張は聞き入れられませんでした。その講演は、ルーティングはきっと大丈夫、という以前からある信用ならない議論の焼き直しで、基本的に私の訴えは無視されるという非常に失望的な内容でした。この会議のポスター発表で私は自分の考えについて発表しました [12] が、その後ルーティングの支持者たちはこの問題について私と議論するのをやめてしまいました。彼らは私が間違っており、それ以上議論の余地はないと決めつけてしまったのです。

その間、この問題に対する米国と欧州での態度の違いに気付く様になりました。私は「ルーティングこそ邪悪なり」の講演 [13] をスペインの会議で行いましたが、2 人の聴衆からしか反対意見はありませんでした。1 人は断固としてルーティング側の陣営に付こうとしていましたが、一方でもう 1 人にはこの問題を考察しようとする意思がまだありました。

国際顧問委員を務めていた 2007 年の Lattice 会議のプログラム会議でも、スタガード問題についての講演を入れるべきか否かの議論になりました。多くの人たちにとってはこの問題が未だ解決していないため、私自身がその話題について講演するべきであることは明らかでした。通常、顧問委員はプレナリー講演は行わないことになっており、私はパラレル講演枠で話そうと考えていました。しかし運営委員は熟慮の結果、1 つは私の講演、もう 1 つは私に反論の上、最近の進展を総括する講演、という 2 つのプレナリー講演を設けることにしたのです。

私は QCD における  $\theta$  依存性がどの様に機能しているかを理解する上でしばしば重要となる 't Hooft バーテクス ('t Hooft vertex) の方法を用いて議論を再定式化しました。以前はルーティングが正しくないことを証明したという主張はしていませんでしたが、今回は連続極限においても特定の非摂動的な性質がおかしな振る舞いをすることを証明しました。その証明は会議録 [14] に収録されており、さらに詳細な議論は *Annals in Physics* に掲載されています [15]。基本的なアイデアは、スタガードフェルミオンにおける 4 つの「テイスト」自由度が実際にはお互いに等価ではなく、ルーティングによってそれら (のフェルミオン行列式) を平均化してしまう、というものです。スタガード行列式の対称性に基づいて議論すると、対象とする理論における正しい 't Hooft バーテクスは得られないということを示すことが出来ます。これは、't Hooft バーテクスが各テイスト自由度に強く結合しており、それぞれを独立に取り扱うことが出来ない、と言い換えることも出来ます。<sup>1</sup>

Lattice 会議での講演は欧州の格子 QCD 業界には極めて快く歓迎されましたが、明らかに (主に米国の) スタガード業界の人たちの反応はそうではありませんでした。もちろん私が公平に意見を言える訳ではありませんが、他方の講演は議論が全く的を得て

<sup>1</sup>また最近の会議録 [16] ではルーティングによって正しくないスペクトルが現れるという確固とした証左を与えました。

いませんでした。会議の後、私の議論を論駁するという主張の詳細な論文 [17] が現れましたが、この論文には明らかな間違いや誤解が多く含まれており、出版されることはないのではと思います。<sup>2</sup>

スタガード業界はこの問題を無視し続けています。私は彼らが米国の格子ゲージ理論業界を支配することは科学的不正に繋がるのではと感じています。ここで、とある報復の例を挙げましょう。全く異なる話題についての私の最近の論文が、「スタガードフェルミオンの長年の研究で培われてきた重要な教訓が全く反映されていないのは非常に問題である」というたった一人の否定的な査読レポートのために著名な米国学術誌からリジェクトされたのです。私はスタガードフェルミオンに関する継続中の論争を避けたかったので、あえて論文中で言及しなかったのですが、明らかに査読者はこれに気付いたのでしょう。結局、スタガードフェルミオンとの比較検証を付け加えたにも関わらず、論文は更なる査読もされずにリジェクトされてしまいました。その後、より公平な判断を仰げると期待して論文を欧州の学術誌に再投稿したところ、すぐさま受理され、出版されました [18].

米国格子 QCD 業界がただ国際的な嘲笑的になるという以上に、このような態度は科学的観点からして非常に問題です。第一に、非常に多くの計算機時間が非摂動的情報が全く信用できない格子ゲージ配位の生成に浪費されているのです。現在 (2008 年当時)、米国格子 QCD 研究チームに割り当てられている計算機時間のおよそ 38 % がこれに当てられています。第二に、このプロジェクトに参加する若者には疑問の余地なく、連続極限では全てうまく行く、という方針が繰り返し教えられているのです。第三に、この業界の人たちが非常に強権的であるせいで、背後にある物理的機構が大変興味深いにも関わらず、業界外の人たちはほとんどこの問題を考えてみようとしません。最後に、カイラル対称性や格子ゲージ理論の専門家として広く認められている研究者たちが深慮なく、しかし徹底的に、誤った科学的手法で自分たち自身を惑わしていることが非常に心配でなりません。

---

<sup>2</sup> 訳者注：実際には、この論文は Physical Review D から出版されている。

最後に、格子理論は私にとってとても素晴らしいものです。それがこんなにも公然と脅かされるのは見るに耐えません。

### 訳者あとがき

M. Creutz 氏は格子 QCD シミュレーションにおける先駆的工作を中心に、場の量子論の非摂動的性質の理解に大きな貢献をされてきました。Creutz 氏の業績は素粒子論分野に止まらず、トポロジカル絶縁体の一種である Creutz 梯子模型の提唱、モンテカルロ法におけるデーモンアルゴリズムへの貢献、など多岐多分野に渡ります。本稿は 2008 年に Creutz 氏が発表されたもので、QCD 真空の独自の理解を通して、Routed staggered fermion 法 (ルーティングの方法) と呼ばれる格子 QCD アルゴリズムへの批判的論考が展開されています。特に、ここで言及されている  $\theta = \pi$  での QCD 真空構造や一部のクォークが負質量を持つ系の相構造は、一般化高次対称性やそれに関する量子異常の理解を通して近年改めて注目されています。本邦訳は M. Creutz 生誕 75 周年を記念した献呈論文であり、内容の重要性を考慮して Creutz 氏の承諾を得て本誌での公表を行うことに決めました。

### 謝辞

本邦訳の作成に当たって貴重なコメントを頂いた青木愼也氏に感謝致します。また本邦訳とそこでの物理的理解は、French “Investissements d’Avenir” Program, Project ISITE-BFC (No. ANR-15-IDEX-0003), JSPS 科研費 JP15H05855, JP17K18090, JP17H06462 (TK), JP18H01217, JP19K03817 (TM), および私立大学戦略的研究基盤形成支援事業「トポロジカル・サイエンス (No. S1511006)」の助成を受けたものです。

## References

- [1] M. Creutz, “The Saga of rooted staggered quarks,” [arXiv:0804.4307 \[hep-lat\]](https://latticeguy.net/rooting.html).  
<https://latticeguy.net/rooting.html>.
- [2] M. Creutz and T. N. Tudron, “Topological Tunneling and Goldstone Gluons,” *Phys. Rev.* **D16** (1977) 2978.
- [3] M. Creutz, “Quark masses and chiral symmetry,” *Phys. Rev.* **D52** (1995) 2951–2959, [arXiv:hep-th/9505112 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505112).
- [4] M. Creutz, “CP symmetry and the strong interactions,” [arXiv:hep-th/0303254 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/hep-th/0303254).
- [5] M. Creutz, “Ambiguities in the up-quark mass,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 162003, [arXiv:hep-ph/0312225 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0312225).
- [6] M. Creutz, “Spontaneous violation of CP symmetry in the strong interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 201601, [arXiv:hep-lat/0312018 \[hep-lat\]](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0312018).
- [7] M. Creutz, “Spontaneous CP Violation in the Strong Interactions and Quark Mass Ambiguities,” Feb., 2005.  
<http://online.kitp.ucsb.edu/online/bblunch/creutz/>.
- [8] M. Creutz, “Positivity and topology in lattice gauge theory,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 091501, [arXiv:hep-lat/0409017 \[hep-lat\]](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0409017).
- [9] M. Creutz, “4th Root of the K-S Determinant,” Feb., 2005.  
<http://online.kitp.ucsb.edu/online/lattice05/creutz/>.
- [10] M. Creutz, “Flavor extrapolations and staggered fermions,” [arXiv:hep-lat/0603020 \[hep-lat\]](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0603020).

- [11] M. Creutz, “Chiral anomalies and rooted staggered fermions,” *Phys. Lett.* **B649** (2007) 230–234, arXiv:hep-lat/0701018 [hep-lat].
- [12] M. Creutz, “Diseases with rooted staggered quarks,” *PoS LAT2006* (2006) 208, arXiv:hep-lat/0608020 [hep-lat].
- [13] M. Creutz, “The Evil that is Rooting,” June, 2007.  
<https://quark.phy.bnl.gov/~creutz/slides/rootslides.pdf>.
- [14] M. Creutz, “Why rooting fails,” *PoS LATTICE2007* (2007) 007, arXiv:0708.1295 [hep-lat].
- [15] M. Creutz, “The ’t Hooft vertex revisited,” *Annals Phys.* **323** (2008) 2349–2365, arXiv:0711.2640 [hep-ph].
- [16] M. Creutz, “SU(3) breaking and the pseudo-scalar spectrum in multi-taste QCD,” *EPJ Web Conf.* **175** (2018) 04001, arXiv:1707.08597 [hep-lat].
- [17] C. Bernard, M. Golterman, Y. Shamir, and S. R. Sharpe, “’t Hooft vertices, partial quenching, and rooted staggered QCD,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 114504, arXiv:0711.0696 [hep-lat].
- [18] M. Creutz, “Four-dimensional graphene and chiral fermions,” *JHEP* **04** (2008) 017, arXiv:0712.1201 [hep-lat].