

修士論文

MUonE 実験によるミューオン $g - 2$ を説明可能な
 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索

(Search for the $U(1)_{\mu-\tau}$ gauge boson explaining the muon $g - 2$ anomaly by MUonE experiment)

和田淳太郎

東京大学理学系研究科物理学専攻素粒子理論研究室

令和3年1月

概要

米国フェルミ国立加速器研究所 (FNAL) の実験によって、ミューオン異常磁気能率 ($g-2$) の実験値と理論値の不一致が追認され、標準模型の綻びを示唆する結果となった [1]。標準模型 (SM) の理論計算に関しては、ミューオン $g-2$ へ寄与するハドロン真空偏極 (HVP) の精密評価を目的とした MUonE 実験が提案され [2]、理論値の精密化が期待されている。一方、標準模型を超えた物理 (BSM) の観点では、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型 [3–6] がミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能な有力な模型の一つとして今尚注目されており、ミューオン $g-2$ は SM、BSM 双方の文脈で活発な議論がされてきた。そんな中、筆者らは論文 [7] の中で、将来的に MUonE 実験によって $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンをミューオン $g-2$ favored な領域を含むパラメータ領域で探索できることを示した。本修士論文はこの仕事に基づき、MUonE 実験の本来の目的 (HVP の精密測定) と、我々による新しい提案 ($U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索) をまとめ、MUonE 実験が SM 理論計算の精密化と BSM 探索という二重の役割を果たせることを示す。

目次

第 1 章	序論	3
第 2 章	ミューオン異常磁気能率の理論	5
2.1	異常磁気能率の概要	5
2.2	場の量子論 (QFT) における異常磁気能率	6
2.3	標準模型 (SM) の理論値	9
2.4	BMW の理論値	10
第 3 章	HVP の現象論的考察	11
3.1	White Paper の方法	11
3.2	MUonE 実験の方法	12
3.3	Space-like vs Time-like	13
第 4 章	MUonE 実験	14
4.1	実験のセットアップ	14
4.2	MUonE 実験の運動学	14
4.3	HVP 測定における戦略	17
第 5 章	$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性	19
5.1	典型的な BSM スケール	19
5.2	$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性の導入	20
5.3	実験による制限の現状	22
5.4	将来実験による制限	25
第 6 章	MUonE 実験と新物理	28
6.1	$\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱と新物理	28
6.2	$\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程に注目した invisible search	29
第 7 章	結論	33
	謝辞	34
付録 A	Dirac 方程式における磁気能率	35
付録 B	$a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ の計算	37

B.1	White Paper の方法	37
B.2	MUonE 実験の方法	41
付録 C	Kinematics note	43
C.1	$\mu e \rightarrow \mu e$ 散乱過程の運動学	43
C.2	$\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程の運動学	48
付録 D	minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型	51
D.1	模型の導入	51
D.2	ニュートリノ質量行列とパラメータへの制限	52
参考文献		55

第 1 章

序論

ミューオンの異常磁気能率 ($g-2$) は、米国ブルックヘブン国立研究所 (BNL) による測定値が理論値より 3σ 以上離れた結果であったため、標準模型 (SM) の綻びではないかと注目されていた [8]。その後、米国フェルミ国立加速器研究所 (FNAL) において行われた再測定の結果が 2021 年 4 月に公表され、大きな注目を集めた。結果の内容は BNL の実験値を支持するものであり、二つの実験値の平均を取ると、理論値との差は 4.2σ まで達した [1]。この理論値と実験値の乖離を俗にミューオン $g-2$ アノマリーと呼ぶ。

さて、このアノマリーから示唆される可能性として次の 3 つが考えられる。一つ目はミューオン $g-2$ の測定に誤りがある可能性、二つ目はミューオン $g-2$ の理論計算に誤りがある可能性、そして三つ目は標準模型を超えた物理 (BSM) が関与している可能性である。

一つ目の測定に誤りがある可能性については、冒頭でも述べたようにフェルミ研究所の結果が BNL の結果を追認したため、その線は薄くなったと言えるだろう*¹。

続いて理論計算に誤りがある可能性だが、標準的に理論値として用いられる White Paper [10] で合意された値は、実験と比肩するほどの精度で得られているものの、全く問題がないわけではない。特に重要視されている課題として、ミューオン $g-2$ に対するハドロンの真空偏極 (HVP) の寄与の不確かさが大きいことが知られている。White Paper の合意値では、HVP の非摂動部分を $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ 過程の実験値を用いて計算する手法が採用されているが、実はこの実験値自体が持つ誤差が他と比べ支配的に大きく、計算精度を高める上で障害になっている。また、HVP の寄与についてはもう一つ厄介な事情があり、先述した散乱過程の測定値を用いる現象論的な方法で得た結果と、lattice 計算を用いる方法で得た結果が一致せず、理由は不明ながら 2.1σ 程の隔たりが生じている [11]。本来一致すべき SM の理論計算の間に乖離が生まれているため、理論計算の誤りの可能性は否定できないだろう。一方で、HVP に関するこれらの課題を改善しようとする動きもあり、HVP の寄与の精密計算を目的とする MUonE 実験が提案され、Letter of Intent が 2019 年に提出された [2]。MUonE 実験では $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱を測定することで、HVP の Leading Order (LO) の寄与を現象論的な方法で精密に決定できることが期待されている。

最後に、三つ目の可能性についてであるが、ミューオン $g-2$ に BSM が影響するシナリオは、BNL の測定結果が出た当初から盛んに議論されてきた。例えば、超対称性 (SUSY) 模型 [12–15] やレプトクォーク模型 [16–18]、アクシオン様粒子 (ALPs) [19–22] などは、2021 年現在でもミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能な模型として、理論、実験双方による精力的な議論、探索が行われている*²。

*¹ 2024 年から、J-PARC でもミューオン $g-2$ の測定が開始される予定である [9, 10]。

*² SM に dark photon を加えた模型など、BNL 実験当初はミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能だったが、その後の実験によって可能性が棄却された模型も存在する [23–26]。

本修士論文では、そんな数あるミューオン $g-2$ アノマリーを説明するシナリオの中でも、特に SM に $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を付け加えたモデル [3–6] に注目する。 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型は、ミューオン $g-2$ アノマリーの文脈 [27–30] の他に、ニュートリノセクター関連の研究 [31–33] や、暗黒物質の説明 [34–38] など、様々な動機を元に議論がされており非常に興味深い。しかし、実験では $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの兆候が未だに見られないという現状がある。 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンは電子やクォークと直接結合しないため、実験による制限が難しく、これまでミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能なパラメータ領域の中で棄却済みの領域は一部に留まっていた。そんな中、筆者らは論文 [7] の中で、将来的に MUonE 実験によって $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンをミューオン $g-2$ favored な領域を含むパラメータ領域で探索できることを示した。本修士論文はこの仕事に基づき、MUonE 実験の本来の目的 (HVP の精密測定) と、我々による新しい提案 ($U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索) をまとめ、MUonE 実験が SM 理論計算の精密化と BSM 探索という二重の役割を果たせることを示す。

本修士論文の構成は以下の通りとなっている。第2章では導入として、ミューオン異常磁気能率 ($g-2$) の基本事項を整理する。White Paper の理論値と実験値との間に乖離があることを確認し、中でも HVP の理論値は誤差が大きい上に、lattice 計算との間にも隔たりがある現状を確認する。次に第3章では、ミューオン $g-2$ の理論値の中でも、HVP の効果が現象論的にどのように計算されているかを概観する。そして、White Paper で採用されている方法と、MUonE 実験で採用される予定の手法を比較し、後者の方が誤差を小さくできることを見る。続く第4章では MUonE 実験のセットアップや運動学を概説し、MUonE 実験における HVP の寄与の決定方法について、提言 [39] の中で示された戦略を述べる。第5章ではミューオン $g-2$ に影響する BSM スケールについて簡単に導入した後、今回注目する $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型の性質について紹介し、最後にメインパートである第6章では、MUonE 実験と新物理探索について議論する。まず、先行研究では MUonE 実験による BSM の検証について否定的な結果が出ていたこととに触れる。そして著者らの研究 [7] では先行研究では考えられていなかった別の過程に注目することで、MUonE 実験による $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソン探索を適切な選択基準を課すことで行うことが可能であることを結論づける。

第 2 章

ミューオン異常磁気能率の理論

本章では論文全体の準備としてミューオン異常磁気能率 ($g - 2$) の理論の基礎についてまとめる。まず、 $g - 2$ の基本事項について簡単に導入し、次に場の量子論 (QFT) における $g - 2$ の一般的な内容を整理する。その後、White Paper [10] で提示された SM におけるミューオン $g - 2$ の予言値とその内訳を紹介し、実験値との間に差があることと、ハドロンの真空偏極 (HVP) の効果は誤差が大きいことを確認する。最後に HVP の寄与について、White Paper の計算結果と、Budapest-Marseille-Wuppertal (BMW) グループによる lattice 計算の結果の間に乖離が存在する現状を軽く触れ、HVP の寄与の重要性を説く。

2.1 異常磁気能率の概要

磁気能率 (または磁気モーメント) $\vec{\mu}$ とは、磁気的な性質を特徴づける量であり、外部磁場との相互作用項の一部としてハミルトニアンに

$$\mathcal{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (2.1)$$

の形で現れる*³。今、外部磁場とレプトン l が持つスピンとの相互作用に注目しよう。すると、磁気能率 $\vec{\mu}_l$ は次のように表せる。

$$\vec{\mu}_l = g_l \frac{e}{2m_l} \vec{S}. \quad (2.3)$$

ここに、 m_l はレプトンの質量、 $\vec{S} \equiv \frac{\vec{\sigma}}{2}$ ($\vec{\sigma}$ はパウリ行列) はスピン演算子で、 g_l は g 因子と呼ばれる量である。この g 因子はディラック方程式で計算すると丁度 $g_l = 2$ になるが (付録 A 参照)、後述するように QFT ではループ補正によってその値は 2 から僅かにずれる。この差がいわゆる異常磁気能率 ($g - 2$) であり、慣習的に 2 で割ったもの

$$a_l \equiv \frac{g_l - 2}{2}, \quad (2.4)$$

を異常磁気能率 ($g - 2$) と定義する。

この a_l は観測量なので、精密な実験を行うことで理論の予言値と比較し、理論を検証することができる。例

*³ 例えば古典電磁気学の範囲で考えると、軌道運動する荷電粒子が持つ磁気能率は

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}, \quad (2.2)$$

である。ここに q, m は荷電粒子の電荷及び質量、 \vec{L} は角運動量ベクトルである。

えば、電子の $g-2$ は理論、実験、ともに非常に高精度で求められており、SM の予言値及び実験値は

$$a_{e,SM} = 1159652182.032, (13)_{\text{QED}}(12)_{\text{had}}(720)_{\alpha(\text{Rb})} \times 10^{-12}, \quad (2.5)$$

$$a_{e,\text{exp}} = 1159652180.73(28) \times 10^{-12}, \quad (2.6)$$

が知られている [40–42]。ただし、() 内の数字は 1σ の不確かさを表し、一行目の $()_{\text{QED}}$ は QED の理論計算の不確かさ、 $()_{\text{had}}$ はハドロン過程由来の不確かさ、 $()_{\alpha(\text{Rb})}$ は微細構造定数 α の値からくる不確かさである*4。両者の差は

$$a_{e,\text{exp}} - a_{e,SM} = (-13.0 \pm 7.7) \times 10^{-13}, \quad (2.10)$$

(1.7σ) で、今のところ電子の $g-2$ に関しては、SM と実験の間に矛盾はないと言えるだろう。一方、ミューオン $g-2$ の場合は SM の予言値と実験値の間に大きな差があることが知られている。White Paper で採択された SM の予言値 $a_{\mu,\text{WP}}$ と、実験値の平均 $a_{\mu,\text{exp}}$ はそれぞれ

$$a_{\mu,\text{WP}} = 116591810(43) \times 10^{-11}, \quad (2.11)$$

$$a_{\mu,\text{exp}} = 116592061(41) \times 10^{-11}, \quad (2.12)$$

であって [1, 10]、両者の差は

$$a_{\mu,\text{exp}} - a_{\mu,\text{WP}} = (25.1 \pm 5.9) \times 10^{-10}, \quad (2.13)$$

と、 4.2σ の隔たりがある。これがミューオン $g-2$ アノマリーであり、新物理の兆候ではないかと注目されている。

2.2 場の量子論 (QFT) における異常磁気能率

この節では、場の量子論 (QFT) において異常磁気能率 ($g-2$) の寄与がどのように現れるかを確認する。簡単のためパリティが保存している理論を考える。

*4 微細構造定数 α の値を決定する流儀として、電子の $g-2$ の測定値を使う方法と、原子反跳測定を利用する方法がある。今回 $a_{e,SM}$ の値を引用した文献 [40] では、ルビジウム 87 原子反跳から α を決めている。また、後述の $a_{\mu,\text{WP}}$ を引用した White Paper [10] の計算ではセシウム原子反跳で決めた値を使用している。

尚、それぞれの流儀で求めた α を列挙すると

$$\alpha^{-1}(\text{Rb}) = 137.035998995(85), \quad (2.7)$$

$$\alpha^{-1}(\text{Cs}) = 137.035999046(27), \quad (2.8)$$

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137.0359991491(15)_{\text{QED}}(14)_{\text{had}}(330)_{\text{exp}}, \quad (2.9)$$

である [40, 43, 44]。他と比較すると $\alpha^{-1}(\text{Cs})$ は最も誤差が小さい。

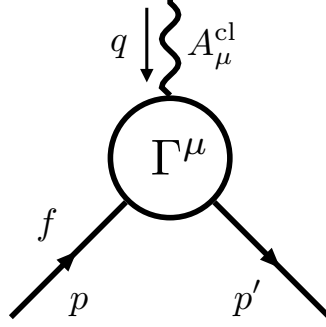


図2.1 $g-2$ に寄与する、フェルミオン f と、古典的な外場 A_μ^{cl} の vertex ダイアグラム。摂動最低次 (tree) では g 因子は 2 になるが、ループ補正によって 2 からずれる。

(異常) 磁気能率は図 2.1 のような質量 m_f のフェルミ粒子 f と古典的な外場 A_μ^{cl} の vertex のダイアグラムから生じる。この相互作用における散乱振幅は、外場が静的な場合、

$$i\mathcal{M}\delta(p'^0 - p^0) = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p)\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(p' - p), \quad (2.14)$$

で与えられる。ここに、 $\tilde{A}_\mu(p' - p)$ は $A_\mu(x)$ をフーリエ変換したものである。ローレンツ共変性とパリティ対称性から、 $\Gamma^\mu(p', p)$ の構造は以下のように限定される。

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu A(q^2) + (p'^\mu + p^\mu)B(q^2) + (p'^\mu - p^\mu)C(q^2). \quad (2.15)$$

ただし、 $q \equiv p' - p$ で、 $A(q^2), B(q^2), C(q^2)$ は q^2, m_f にのみ依存する係数である。また、 p', p の因子はディラック方程式を使えば質量 m_f に置き換えることができるため、変数としては出てこない。

今、Ward-高橋恒等式 $q\Gamma = 0$ とディラック方程式 $\bar{u}(p')q u(p) = 0$ から、 $C = 0$ である。加えて Gordon 恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{(p'^\mu + p^\mu)}{2m_f} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_f} \right] u(p), \quad (2.16)$$

を使えば $p'^\mu + p^\mu$ を消去できる (ただし、 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ である)。以上を踏まえると $\Gamma^\mu(p', p)$ の形は

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_f} F_2(q^2), \quad (2.17)$$

に限定される*5。ここで導入された $F_1(q^2), F_2(q^2)$ を形状因子 (form factor) と呼ぶ。例えば、摂動の最低次 (tree) では $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ なので、 $F_1(q^2) = 1, F_2(q^2) = 0$ となる。摂動の高次を計算する場合は $F_1(q^2)$ について繰り込み条件を課さなければならない。以下、繰り込み条件として $F_1(q^2 = 0) = 1$ を課す*6。

*5 パリティは破るが CP を保存する相互作用がある場合には

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_f} F_2(q^2) - (q^2\gamma^\mu - 2m_f q^\mu)\gamma_5 F_3(q^2), \quad (2.18)$$

の形になる。CP を破る相互作用がある場合は、さらに $\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma_5 F_4(q^2)$ が追加で現れる。

*6 繰り込み可能な理論であれば、 $F_2(q^2 = 0)$ は有限で繰り込み条件を考える必要はない。これは次のように理解できる。まず式 (2.17) 右辺第二項目に寄与する相互作用は、ラグランジアンで表すと質量次元が 5 の高次元演算子 (Higher dimensional operator) として現れる (footnote *7参照)。そして、繰り込み可能な理論ではこの項に対応する counter term は存在しない。故に $F_2(q^2 = 0)$ は必ず有限であり、繰り込みを必要としない。

さて、これらの形状因子が(異常)磁気能率とどのように結びついているかを確認していこう。今興味があるのは磁場との相互作用なので、外場として $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (0, \mathbf{A}^{\text{cl}}(\mathbf{x}))$ を考える。外場が空間成分のみを持つ時は式 (2.14) より

$$i\mathcal{M} = ie\bar{u}(p') \left[\gamma^i F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m_f} F_2(q^2) \right] u(p) \tilde{A}_i^{\text{cl}}(\mathbf{q}), \quad (2.19)$$

と表すことができる。ここに、運動量空間では $\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q) = (0, \delta(q^0) \tilde{\mathbf{A}}^{\text{cl}}(\mathbf{q}))$ であることと、空間成分の添字の上げ下げから (-1) が出てくることに注意せよ。さらに、磁気能率との関係を見やすくするために Gordon 恒等式 (2.16) を使って γ^i を消去すると

$$i\mathcal{M}|_{q^2 \rightarrow 0} = ie\bar{u}(p') \left[\frac{(p'^i + p^i)}{2m_f} F_1(0) + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m_f} \{F_1(0) + F_2(0)\} \right] u(p) \tilde{A}_i^{\text{cl}}(\mathbf{q}), \quad (2.20)$$

を得る。ただし、古典的な外場は on-shell なので $q^2 \rightarrow 0$ に取った。

ここで、式 (2.20) 右辺括弧の中の第二項 $ie\bar{u}(p') \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m_f} [F_1(0) + F_2(0)] u(p) \tilde{A}_i^{\text{cl}}(\mathbf{q})$ に注目してみよう。この因子の非相対論的極限をとると、磁気能率に対応する項が現れることがすぐに分かる*7。

実際、非相対論的な場合には $u(p)$ は \mathbf{p} の一次までで

$$u(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m_f)\xi \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m_f)\xi \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

と展開できるから、これを使うと次のような式変形を経て磁場とスピンの相互作用を導くことができる。

$$\begin{aligned} & ie\bar{u}(p') \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m_f} [F_1(0) + F_2(0)] u(p) \tilde{A}_i^{\text{cl}}(\mathbf{q}) \\ & \rightarrow \frac{e}{2m_f} 2 [F_1(0) + F_2(0)] \left(2m\xi^\dagger \frac{\sigma^k}{2} \xi \right) \left(-i\epsilon_{ijk} q^j \tilde{A}_i^{\text{cl}} \right) \\ & = \frac{e}{2m_f} 2 [F_1(0) + F_2(0)] \langle S^k \rangle \tilde{B}_k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここに、 $\langle S^k \rangle \equiv 2m\xi^\dagger \frac{\sigma^k}{2} \xi$, $\tilde{B}_k(\mathbf{q}) = -i\epsilon_{ijk} q^j \tilde{A}_i^{\text{cl}}$ である。また式変形の途中で $\sigma^{\mu\nu}$ のカイラル表示を用いた。

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

さて、前節でも述べたように、磁気能率 $\vec{\mu}$ は磁場とスピンの相互作用として $\mathcal{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ の形で現れるのであった。ここに、フェルミオン f の磁気能率 $\vec{\mu}_f$ はスピン \vec{S} を用いて次のように書ける。

$$\vec{\mu}_f = g_f \frac{e}{2m_f} \vec{S}, \quad (2.25)$$

この $\vec{\mu}_f$ の表式と式 (2.23) を見比べると、QFT における g 因子が

$$g_f = 2 [F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0), \quad (2.26)$$

*7 この(異常)磁気能率を与える因子は有効ラグランジアンという言葉で書くと、質量次元が5の高次元演算子(Higher dimensional operator)として現れる。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{eg_f}{4m_f} \bar{\psi}_f \sigma^{\mu\nu} \psi_f F_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

ただし ψ_f はフェルミオン f の場で、 $g_f = 2 [F_1(0) + F_2(0)]$ はフェルミオン f の g 因子である。

また余談ではあるが、 $\{\gamma^0 \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\} = 0$ なので、この相互作用 \mathcal{L}_{int} の前後では、フェルミオン f のカイラリティが反転する(カイラリティフリップ)。すなわち図 2.1 のような $g-2$ のダイアグラムを書いた時、始状態と終状態でカイラリティは互いに反対となる。

で与えられることが分かる (繰り込み条件より $F_1(0) = 1$ であった)。つまり、摂動の最低次 (tree) では $F_2(0) = 0$ なので g 因子は丁度 2 に等しくなるが、一般にはループからくる補正によって g 因子は 2 からシフトするのである。そこでフェルミオン f の異常磁気能率 a_f を

$$a_f \equiv \frac{g_f - 2}{2} (= F_2(0)), \quad (2.27)$$

として定義しておけば、これは量子補正の大きさを示す指標となる。

2.3 標準模型 (SM) の理論値

冒頭でも紹介したように、ミューオン $g - 2$ の理論値と実験値に差があることが改めてフェルミ研究所によって報告され、活発な議論がなされている。本節ではその現状を概観し、理論の観点から各過程の特徴について簡単に整理する。そして、標準模型の予言値の中でも特にハドロン真空偏極 (HVP) の寄与が理論の精密化の観点から課題とされている現状を述べる。

さて、繰り返しになるがミューオン $g - 2$ の理論値は White Paper に準拠すると次の値が知られている [10]。

$$a_{\mu, \text{WP}} = 116591810(43) \times 10^{-11}. \quad (2.28)$$

この値は SM の各種相互作用からくる寄与が足し合わされたもので、相互作用毎に分解すると、

$$a_{\mu, \text{WP}} = a_{\mu}^{\text{QED}} + a_{\mu}^{\text{EW}} + a_{\mu}^{\text{HVP}} + a_{\mu}^{\text{HLbL}}, \quad (2.29)$$

として 4 種類の寄与に分別できる。ここに a_{μ}^{QED} , a_{μ}^{EW} , a_{μ}^{HVP} , a_{μ}^{HLbL} はそれぞれ QED 過程、Electroweak 過程、Hadronic vacuum polarization (HVP) 過程、Hadronic light by light (HLbL) 過程から来る $g - 2$ の寄与である。

White Paper ではそれぞれの寄与の値と誤差が示されているが、並べて書くと以下の通りとなる。

$$a_{\mu}^{\text{QED}} = 116584718.931(104) \times 10^{-11}, \quad (2.30)$$

$$a_{\mu}^{\text{EW}} = 153.6(1.0) \times 10^{-11}, \quad (2.31)$$

$$a_{\mu}^{\text{HVP}} = 6845(40) \times 10^{-11}, \quad (2.32)$$

$$a_{\mu}^{\text{HLbL}} = 92(18) \times 10^{-11}. \quad (2.33)$$

この一覧を見て、まず目を引くのは QED 由来の理論値の精密さである。これは、理論計算が摂動展開で 5 ループまで計算されているためであり [45]、 $g - 2$ の寄与の中で最も値が大きいにも関わらず、最も誤差が小さい。一方で、最も大きな誤差を出しているのは HVP 由来の寄与で、 $a_{\mu, \text{WP}}$ の不確かさの大部分を占めている。また、その不確かさのほとんどは図 2.2 のような HVP の Leading order (LO) ダイアグラムから来るものである。

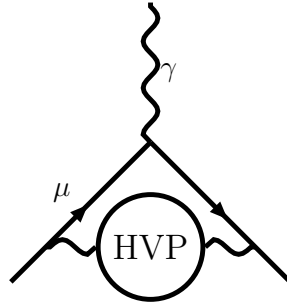


図2.2 $g-2$ に寄与する、HVP の LO ダイアグラム。

HVP 由来の不確かさが大きい主な理由は、 $a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ の計算に実験データを用いているため、実験由来の誤差が含まれているからである。詳しくは次章で説明するが、HVP の寄与は非摂動的なハドロンの効果を含むため、QED の場合のように単純に摂動展開して高次まで求めるという方法が使えない。そのため、 $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ の実験データを使って値が決定される。しかし、後述するように実験データに含まれる誤差が大きいため、式 (2.32) で示したような誤差となる。

2.4 BMW の理論値

誤差が大きく理論計算の精密化の観点で課題となっている HVP の寄与だが、もう一つ言及しておくべき問題がある。それは White Paper の計算結果と、Budapest-Marseille-Wuppertal (BMW) グループによる lattice 計算の結果の間に乖離が生じていることである。BMW グループは HVP の LO 寄与 $a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ について、lattice 計算を用いて

$$a_{\mu,\text{BMW}}^{\text{HVP,LO}} = 7075(55) \times 10^{-11}, \quad (2.34)$$

を得た [11]。これは現象論的手法で決定した White Paper の値

$$a_{\mu,\text{WP}}^{\text{HVP,LO}} = 6931(40) \times 10^{-11}, \quad (2.35)$$

より、 2.1σ 程大きな値である。当然、両者は計算手法こそ違えど同じ SM の予言値であるから、本来ならば等しくなるべきである。しかし、現在理論計算の間でも差が生まれている状況にあり、その原因は未だ定かではない。

一方で、HVP の寄与の精密計算を目的とする MUonE 実験が提案され、Letter of Intent が 2019 年に提出された [2]。MUonE 実験では、実験データを用いる現象論的な方法で HVP の LO 寄与を精密に決定できることが期待されており、同時に、理論の間に生じている隔たりの原因を解明する糸口としても注目されている。MUonE 実験の詳細は後の第4章で述べる。

第 3 章

HVP の現象論的考察

本章ではミューオン $g-2$ の理論計算を考える上で課題となっている HVP の Leading Order (LO) からの寄与 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の現象論的計算についてまとめる。まず、White Paper [10] で用いられている手法について紹介する。次に、別の表現として MUonE 実験の提案 [46, 47] の中で取り上げられている計算方法について説明し、最後に両者の方法を比較して後者の方法がより誤差を小さくできうることを述べる。

3.1 White Paper の方法

White Paper [10] では、HVP の LO からの寄与 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を計算するために、公式

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{K(s)}{s} R(s) ds, \quad (3.1)$$

が用いられている。この公式は古くから知られていた形であり [48, 49]、 $K(s)$ 、 $R(s)$ はそれぞれ

$$K(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)\frac{s}{m_\mu^2}}, \quad (3.2)$$

$$R(s) = \frac{\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)}{4\pi\alpha^2/3s}, \quad (3.3)$$

で与えられる (導出は付録 B.1を見よ)。ここに、 $K(s)$ を Kernel function、 $R(s)$ を R-ratio と呼ぶ*⁸。また、 $\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)$ は重心エネルギーが \sqrt{s} の時の $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ 過程の bare な散乱断面積である。

$R(s)$ は観測量であり、図 3.1 のような実験データを用いることで数値的に値を知ることができる*⁹。実験で知られている $R(s)$ には s の上限が存在するが、 $K(s)$ は s に関して単調減少する関数なので、 s の積分全体としては小さい s からの寄与が支配的であり、大きな s からの寄与はさほど重要ではない*¹⁰。

*⁸ $R(s)$ の分母因子 $4\pi\alpha^2/3s$ は、 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 過程における散乱断面積の高エネルギー漸近形である。この過程は Bhabha 散乱 ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) とは異なり、散乱の channel は s-channel のみである。

*⁹ 式 (3.1) の積分範囲を見ると明らかのように、常に $s > 0$ である。このため、用いる実験データは s-channel の過程である。次節で導入する MUonE 実験の方法では、常に負の変数 $t < 0$ を定義して、t-channel の実験データを使用する。

*¹⁰ $K(s)R(s)/s \propto K(s)\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)$ なので、 $K(s)$ が s に関して単調減少ならば $\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)$ のデータのうち、積分の中で支配的なのは小さい s の部分である。

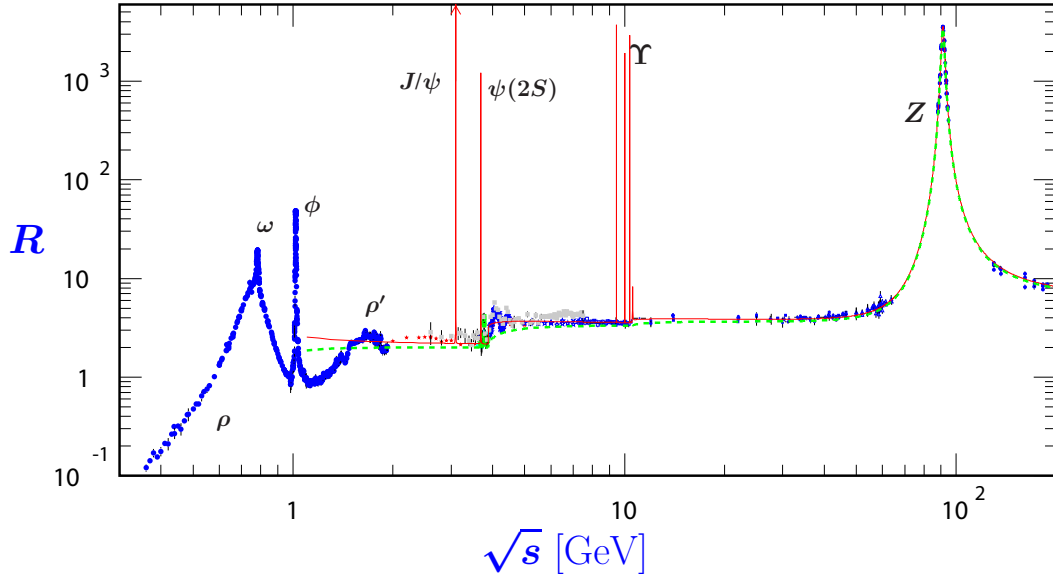


図3.1 R-ratioの実験値。随所に現れているピークは共鳴状態で、 ρ 中間子や ω 中間子、 ϕ 中間子などのピークが見える。この図では見えづらいが ρ 中間子の山と ω 中間子のピークはほぼ重なっているので注意せよ。図はPDGのHP <https://pdg.lbl.gov/2021/hadronic-xsections/hadron.html>からダウンロードが可能。

この手法は非摂動的な効果を実験データを使用することで計算できる便利さはあるが、欠点として実験由来の誤差が大きいことが挙げられる。実際 White Paper で採用されている $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の値は、実験からの誤差を明記すると

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = 6931(28)_{\text{stat}}(28)_{\text{sys}}(7)_{\text{others}}, \quad (3.4)$$

である [10]。ここに、 $()_{\text{stat}}$ は実験の統計誤差、 $()_{\text{sys}}$ は実験の系統誤差を表す。式 (3.4) より、明らかに実験誤差が $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の不確かさを大きくしている要因であることが分かる。統計誤差と系統誤差の内訳は、 $e^+e^- \rightarrow 2\pi$ 過程 (2 π channel) と $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ 過程 (3 π channel) からくる誤差が統計誤差の大部分を占め、系統誤差では 2 π channel 由来の誤差が支配的である*¹¹。

3.2 MUonE 実験の方法

続いて、MUonE 実験の提案 [46, 47] の中で取り上げられている手法について解説する。 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を計算する方法として、式 (3.1) とは別に

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}(t(x)) dx, \quad (3.5)$$

が古くから知られていた [51]。ここに、変数 $t(x)$ は $t \equiv -\frac{x^2}{1-x}$ で定義される量で、 x の積分範囲から分かるように常に負である (導出は付録 B.2を見よ)。また、 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ は結合定数 α における HVP 由来の補正因子で

*¹¹ 図 3.1 の共鳴状態のうち、 ρ 中間子はほとんどが $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$ 過程 (2 π channel) で崩壊し、 ω 中間子は $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 過程 (3 π channel) などで崩壊する [50]。式 (3.1) の積分全体としては小さい s からの寄与が支配的であるため、これらの過程に関する誤差はシビアに $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の不確かさに直結する。

あつて、有効結合定数 $\alpha_{\text{eff}}(t) = \frac{\alpha}{1-\Delta\alpha(t)}$ の $\Delta\alpha(t)$ の中に含まれる因子である。この因子は散乱過程の測定値からハドロン由来の情報を抽出することで、理論上は図 3.2 のように得ることができる。

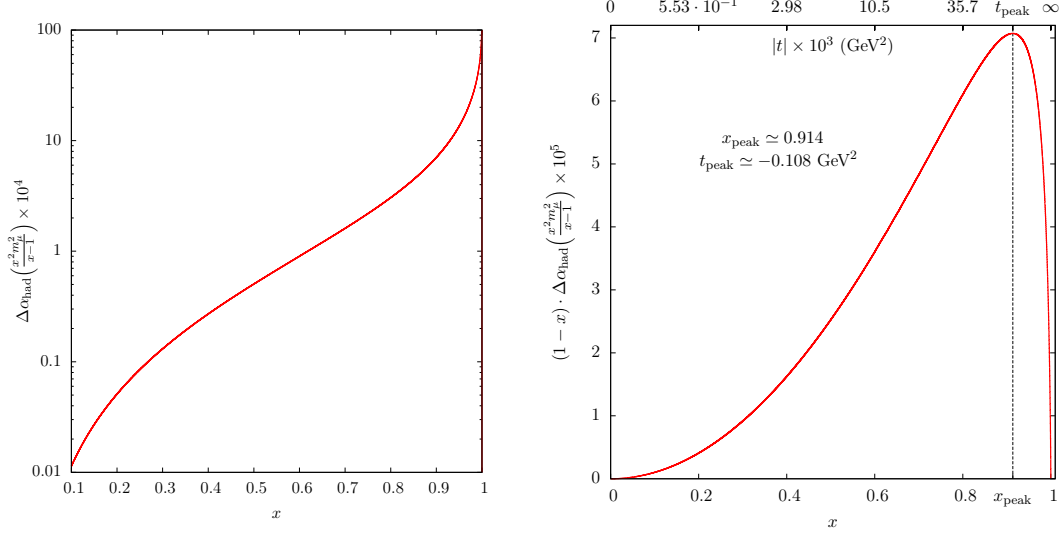


図3.2 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t(x))$ の関数形 (左) と式 (3.5) の被積分関数 $(1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}(t(x))$ の関数形 (右)。両図とも文献 [46] から引用した。文献 [46] ではシミュレーション (hadrs5n12 [52,53]) を用いて両図を描いている。

MUonE 実験では、電子とミューオンの弾性散乱 $\mu^+e^- \rightarrow \mu^+e^-$ の観測結果から HVP の情報を抽出し、 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ を間接的に測定することを目的としている (詳細は 4.3 節を見よ)。精度良く $\Delta\alpha_{\text{had}}$ を t (即ち x) の関数として決定することができれば、式 (3.5) より、右辺を積分することで $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ が得られる。

3.3 Space-like vs Time-like

ここまで異なる二つの方法、式 (3.1)、式 (3.5) を紹介した。両者は式の上では完全に等しいため、一見するとどちらを使っても最終的な結果 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ は等しいように思える。しかし、用いる実験データの観点で言えば両者には大きな違いがある。

初めに、White Paper の方法 (式 (3.1)) について見てみよう。式 (3.1) 右辺の積分変数 s は正であることから、これは time-like な変数と言える。このため、インプットに使う実験データも time-like な過程のものを使用することとなる。しかし、time-like な過程では共鳴状態がつきものであり、実際これが実験の不確かさを生んで $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の誤差の要因となっていた。

他方で MUonE 実験の方法 (式 (3.5)) では、導入した t は常に負であつて、space-like な変数と言える。space-like な過程には共鳴状態はない。実際、図 3.2 における関数形は、図 3.1 と比べても非常に滑らかで単純である。故に、実験からの誤差を考慮に入れると、space-like な実験データを用いる方が精密な $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の計算という点では有利であると言える。このため次章で説明する MUonE 実験は、 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の誤差を既存の値より小さくできる実験として注目されている*12。

*12 文献 [46] でも言及されているように、lattice による $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の計算は space-like な積分変数を用いている。MUonE 実験は lattice と同様の space-like な方法で現象論的なアプローチを踏むため、lattice と現象論の予言値の間の tension の検証という意味でも注目されている。

第 4 章

MUonE 実験

本章では、ミューオン $g-2$ に寄与する HVP の効果の精密測定を目的とした実験である、MUonE 実験について概説する。まず簡単に実験のセットアップについて説明し、その後本論文のメインパートである第6章の議論で重要となる、MUonE 実験の運動学についてまとめる。そして最後に、MUonE 実験では HVP 測定をどのような戦略で精度良く測定するのかについて述べる。

4.1 実験のセットアップ

MUonE 実験の目的は、ミューオンと電子の t-channel 弾性散乱 $\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-$ を精度良く測定することで、ハドロン由来の情報 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ を観測結果から抜き出し、これを用いてミューオン $g-2$ に寄与する HVP の LO 寄与 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を精度良く求めることである^{*13}。

この目的を達成するため、MUonE 実験は図 4.1 のようなセットアップで実験を行う [2]。実験の概要としては、CERN の M2 ビームラインから入射した 150 GeV のミューオンと、ベリリウム固定標的内の電子との散乱の情報をトラッカーと ECAL によって捉える形となる。散乱後の飛跡をトラッカーで捉えることで電子とミューオンそれぞれの散乱角を、実験装置の下流に設置された ECAL で電子のエネルギーを測定することができる^{*14}。文献 [2] でも述べられているように、多重散乱が起こると飛跡の測定が損なわれるため、実験では必要な統計データを得るために効率的な厚さである 60 cm のターゲットを 40 分割し、一枚あたり 15 mm のベリリウムターゲットとトラッカーを合わせた Station を 40 個直列に並べたものを使用する。

4.2 MUonE 実験の運動学

前節で述べたように、MUonE 実験では ECAL とトラッカーによって、終状態の電子のエネルギー E_e^f と、終状態の電子とミューオンの角度 θ_e^f, θ_μ^f をそれぞれ測定することができる (図 4.2 参照)。これら三つの測定量の間には、弾性散乱の場合にのみ成り立つ関係式が知られており、弾性散乱とそれ以外の過程を見分けるために役に立つ。本論文のメインパートである第6章の議論でも必要になるため、本節ではこれらの関係式につい

^{*13} 実は、Bhabha 散乱 ($e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$) の t-channel 過程を測定することによっても、理論上は HVP の寄与を求めることができる。実際、理論的な提案の段階では Bhabha 散乱を用いることが検討されていた [46]。しかし、Bhabha 散乱を測定する場合、s-channel と t-channel が干渉することや、 e^+ と e^- の判別をしなければならないなどの難点がある。その点、 $\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-$ 散乱の場合は、一意に過程が決まることや、ミューオンと電子の判別が容易に可能という意味で優れている。

^{*14} トラッカーの角度分解能は 0.02 mrad、ECAL のエネルギー分解能は測定エネルギーにもよるが、20 GeV 以上であれば $O(1)\%$ 程度と見積もられている [2]。

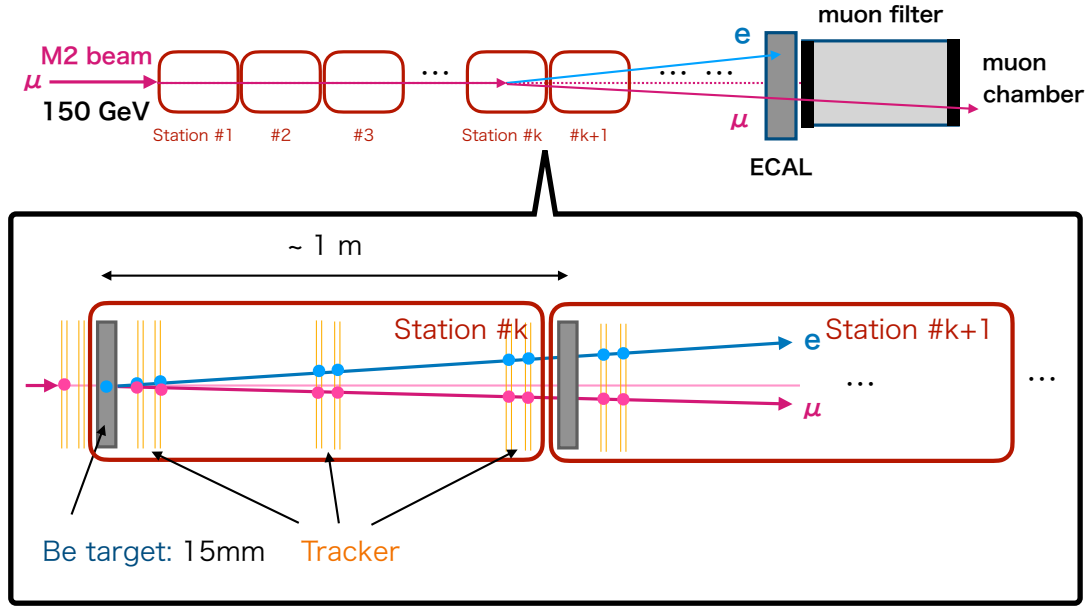


図4.1 MUonE 実験の概略図。Station 毎に 15 mm のベリリウム固定標的と、トラッカーが並べられている。実験では 150 GeV のミュオンビームを入射させ、固定標的中の電子との弾性散乱を観測する。標的に散乱を起こしたミュオンと電子の軌道はトラッカーによって捉えられ、電子は下流に設置された ECAL でエネルギーを落とす。図を描くにあたり、文献 [2] を参考にした。

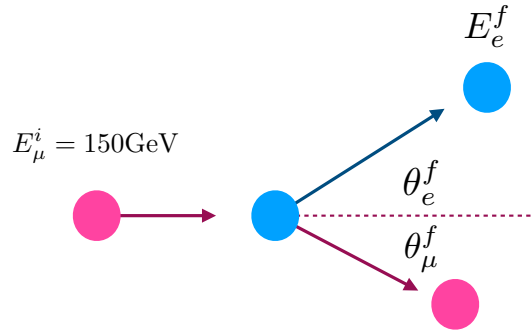


図4.2 $\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-$ 弾性散乱の概念図及び MUonE 実験で測定するパラメータ。終状態の電子のエネルギー E_e^f は ECAL で、終状態の電子とミュオンの角度 θ_e^f, θ_μ^f はトラッカーで測定ができる。

て簡単にまとめていく^{*15}。

まず、終状態の電子のエネルギー E_e^f と角度 θ_e^f の間には、次の関係式が成り立つ。

$$E_e^f = m_e \frac{1 + \beta^2 \cos^2 \theta_e^f}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_e^f}. \quad (4.1)$$

(導出は付録 C.1.3参照) ただし、 β は重心系と実験室系の間ブーストパラメータである。右辺は $\cos^2 \theta_e^f$ について単調増加する関数になっており、 $\cos^2 \theta_e^f = 0$ のとき最小値 $E_e^f = m_e$ 、 $\cos^2 \theta_e^f = 1$ のとき最大値

^{*15} 各関係式については付録 C で導出がまとめられているため、適宜参照されたい。

$E_e^f = m_e \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$ を取る。今回の二体散乱では $t = 2m_e^2 - 2m_e E_e^f$ と、変数 t は E_e^f のみで決まるため、事実上 E_e^f の範囲が MUonE 実験で探索できる $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の範囲を決める。この点については次節で詳しく述べる。

次に、終状態の電子とミュオンとの角度 θ_e^f, θ_μ^f の間には次の関係式が成り立つ^{*16}。

$$\tan \theta_\mu^f = \frac{2 \tan \theta_e^f}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_e^f)(1 + R) - 2}, \quad (4.2)$$

$$R \equiv \frac{E_\mu^i m_e + m_\mu^2}{E_\mu^i m_e + m_e^2}. \quad (4.3)$$

ただし、 γ は重心系と実験室系間のブーストパラメータである。これを図示すると図 4.3 のようになる。(導出は付録 C.1.5 参照)

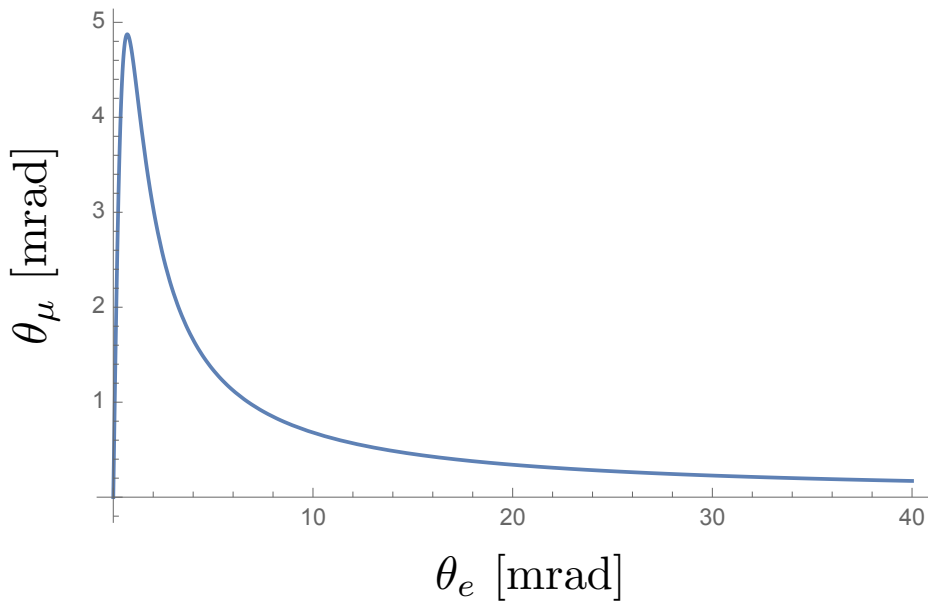


図4.3 終状態の電子の角度 θ_e^f と終状態のミュオンの角度 θ_μ^f の関係。

この図からすぐに分かることは、 θ_μ^f に上限が存在することである。解析的にミュオンの散乱角の上限 $\theta_{\mu,\text{max}}^f$ 及びその時の電子の散乱角 $\theta_e^f|_{\theta_{\mu,\text{max}}^f}$ を求めると、

$$\theta_{\mu,\text{max}}^f = \arctan \left[\frac{1}{\gamma \sqrt{R^2 - 1}} \right], \quad (4.4)$$

$$\theta_e^f|_{\theta_{\mu,\text{max}}^f} = \arctan \left[\frac{\sqrt{R^2 - 1}}{\gamma(1 + R)} \right], \quad (4.5)$$

を得る。ここに、MUonE 実験のセットアップでは $\theta_{\mu,\text{max}}^f \simeq 4.8$ mrad 程度である [39]。故に、散乱粒子の角度が共に 4.8 mrad 以下の場合に限り、ミュオンと電子の分別を考える必要が生じる。また、先に述べたように θ_e^f と E_e^f の関係は式 (4.1) で与えられるため、 θ_e^f を一つ決めると θ_μ^f と E_e^f の両方の値が運動学的に決まる。(図 4.3 で図示されている範囲では、 θ_e^f が増加するにつれて E_e^f は単調に減少する。)

^{*16} 重心系では自明に $\hat{\theta}_\mu^f = \pi - \hat{\theta}_e^f$ が成り立つが、実験室系では非自明な関係式になる。

最後にミューオンの散乱角 θ_e^f と電子のエネルギー E_e^f の間の関係を考えよう。これは式 (4.1) と式 (4.2) を連立することで求めることができる。具体的な数式は示さないが、図示すると以下の図 4.4 のようになる。

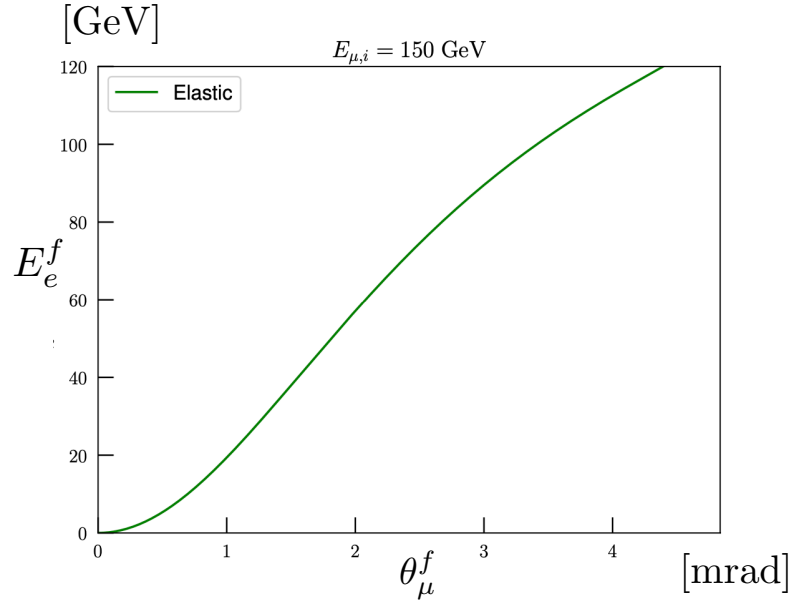


図4.4 終状態のミューオンの角度 θ_μ^f と終状態の電子のエネルギー E_e^f の関係。 θ_μ^f を固定しても E_e^f は一意には決まらないが、値の小さい方をプロットして表示した。

4.3 HVP 測定における戦略

本節では MUonE 実験での HVP 測定における戦略について述べる。詳細に入る前に、MUonE 実験が探索できる $\Delta\alpha_{\text{had}}(t(x))$ の範囲について簡単にコメントしておく。前節でも触れたように、変数 t は今回の場合、 $t = 2m_e^2 - 2m_e E_e^f$ で与えられ、 E_e^f によって探索可能な $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の範囲が決定される。観測できる E_e^f の値は運動学的な制限と、実験の要請からくる低エネルギーカットによって概ね

$$1 \text{ GeV} \leq E_e^f \leq 139.8 \text{ GeV}, \quad (4.6)$$

である [47]。ただし、MUonE 実験のセットアップは完全には決まっていないため、低エネルギーカットを 1 GeV と仮定した。これを x の言葉で表すと、

$$0.26 \leq x \leq 0.93, \quad (4.7)$$

となる*17。式 (3.5) 右辺における x の積分範囲は $0 \leq x \leq 1$ なので、 x が 0.26 より小さい (低エネルギー) 領域と x が 0.93 より大きい (高エネルギー) 領域は、別の方法で補完する必要がある*18。MUonE 実験の戦略としては、 x が大きい領域では摂動的 QCD や Lattice QCD を用いて補完し、 x が小さい領域では fitting 関数を仮定した上で time-like data 等を用いて外挿する予定となっている [2]。

*17 t と x の関係は、 $t(x) \equiv -\frac{x^2}{1-x} m_\mu$ であった。

*18 式 (3.5) 右辺の被積分関数 $(1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}(t(x))$ は、 $x \simeq 0.914$ で最大ピークをもつ関数である [46]。MUonE 実験では $E_\mu^i = 150 \text{ GeV}$ のミューオンビームを使用することで、このピークを超える領域まで調べることができる。

さて、続いて MUonE 実験の肝となる $\Delta\alpha_{\text{had}}(t(x))$ 測定の戦略について概説していこう。これから述べる内容は文献 [39] に基づいているため、詳細に興味があれば合わせて参照されたい。

まず HVP 由来のミューオン $g-2$ への寄与 $a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ は、有効結合定数 $\alpha_{\text{eff}}(t) = \frac{\alpha}{1-\Delta\alpha(t)}$ に含まれる HVP の情報 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ を測定することで理論上得られるのだった。一方、実際に実験で測定する量はイベント数であるため、 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ をイベント数の言葉に翻訳する必要がある。

まずは、散乱弾面積と $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の関係を考えよう。 $\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-$ 過程の QED 最低次の弾面積 σ_0 は、HVP の寄与を含めた弾面積 σ_{had} と比べると

$$\frac{d\sigma_{\text{had}}}{dt} \simeq (1 + 2\Delta\alpha_{\text{had}}(t)) \frac{d\sigma_0}{dt}, \quad (4.8)$$

で関係づけられる^{*19}。式 (4.8) では、HVP の寄与と QED の最低次の寄与のみを含む σ_{had} に注目したが、最終的には他の SM 由来の寄与も考慮に入れなければならない。そこで以下では、HVP だけでなく他の SM の寄与を含んだ散乱断面積を、 σ と表記することにする。さて、微分断面積 $\frac{d\sigma}{dt}(t)$ をある t の範囲 (bin) で積分したものを σ_i とおく。 i は i 番目の t bin で積分したことを表す^{*20}。すると、この σ_i は式 (4.8) より、

$$\sigma_i \simeq \sigma_{0,i}(1 + 2\Delta\alpha_{\text{had},i} + \delta_{\text{SM},i}), \quad (4.9)$$

と展開できる。ここに、右辺括弧中の初項 1 は $\sigma_{0,i}$ で規格化された QED の最低次の寄与、二項目 $2\Delta\alpha_{\text{had},i}$ は、HVP と QED の最低次との干渉項、三項目 $\delta_{\text{SM},i}$ は SM のその他の寄与を表す。

散乱断面積と $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の関係が分かったので、次はイベント数から $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の情報を抽出する方法を考える。まず、異なる bin で測定されたイベント数 N_i と N_n を用意する。そして、 n を固定し N_n で規格化された i 番目の bin におけるイベント数 N_i/N_n を定義しよう。すると、この量は実験のルミノシティによらない量になっていて便利である。また、この比は式 (4.9) より

$$\frac{N_i}{N_n} \simeq \frac{\sigma_{0,i}}{\sigma_{0,n}} [1 - 2(\Delta\alpha_{\text{had},i} - \Delta\alpha_{\text{had},n}) + \delta_{\text{SM},i} - \delta_{\text{SM},n}], \quad (4.10)$$

として表すこともできる。右辺の因子のうち、 $\sigma_{0,i}, \sigma_{0,n}$ や $\delta_{\text{SM},i}, \delta_{\text{SM},n}$ については、既に知られている理論値を用いて計算が可能である。さらに、固定された n 番目の bin の位置を MUonE 実験で到達可能な低エネルギー限界と外挿領域の境界^{*21} に取れば、外挿に使用する time-like data などを使用することで、 $\Delta\alpha_{\text{had},n}$ を決めることができる。以上より、式 (4.10) の右辺から $\Delta\alpha_{\text{had},i}$ 以外の因子を差し引くことで、イベント数の情報から $\Delta\alpha_{\text{had},i}$ を得ることができる。最後に i を MUonE 実験が探索可能な範囲内で動かすことで、 t の関数 $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の関数形が得られる。

^{*19} $\frac{d\sigma_0}{dt}$ は $O(\alpha^2)$ 、 $\frac{d\sigma_{\text{had}}}{dt}$ は $O(\alpha_{\text{eff}}^2)$ に注意せよ。

^{*20} 定義を書くとき $\sigma_i \equiv \int_i dt \frac{d\sigma}{dt}$ である。

^{*21} 実験の低エネルギーカットが 1 GeV の時、 $x \sim 0.26$ 程度で、 $t \sim -0.001$ 程度である。

第 5 章

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性

本章では、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明できるモデルの候補の一つである、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性についてまとめていく。初めにミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能な BSM のスケールについて軽く触れた後、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性の特徴や既知の実験からの制限について整理する。主に、本論文のメインパートである第6章の議論に必要な部分に絞って説明を入れることにする。

5.1 典型的な BSM スケール

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を導入する前に、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能な BSM のスケールについて簡単にコメントしておこう。2.1節で既に述べたように、SM の予言値 a_μ^{SM} と、実験値 a_μ^{Exp} の差は

$$a_\mu^{\text{Exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = (25.1 \pm 5.9) \times 10^{-10}, \quad (5.1)$$

である [1]。この差が新粒子 X 由来のものであると仮定する。

今、ミューオンと光子の vertex に新粒子 X が一つ伝搬してループを作り、これが SM の予言値 a_μ^{SM} と実験値 a_μ^{Exp} の間の差を生んでいるとしよう。次元解析より新物理由来のミューオン $g-2$ への寄与 a_μ^X は、新粒子 X の質量を M_X 、ミューオンとの結合定数を g_X と置くと、

$$a_\mu^X \sim \begin{cases} \frac{g_X^2}{16\pi^2} \frac{m_\mu^2}{M_X^2} & m_\mu \lesssim m_X \text{ のとき,} \\ \frac{g_X^2}{16\pi^2} & m_\mu \gtrsim m_X \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.2)$$

程度と見積もることができる^{*22*}^{*23}。これが SM の予言値と実験値の間の差を説明できるとすると、おおよそ結合定数 g_X は

$$g_X \sim \begin{cases} \frac{M_X}{150 \text{ GeV}} & m_\mu \lesssim m_X \text{ のとき,} \\ 6 \times 10^{-4} & m_\mu \gtrsim m_X \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.3)$$

程度であると言えるだろう。この概算から例えば、 $(M_X, g_X) = (O(100) \text{ MeV}, O(10^{-3}))$ などの点が、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明しうる典型的なパラメータであることが分かる。

^{*22} 新粒子 X が電子にも結合する場合には、 a_e^X を同様に見積もることができる。ただし $m_\mu \lesssim m_X$ の場合、その大きさは a_μ^X と比べて、 $m_e^2/m_\mu^2 \sim 10^{-5}$ 程度に抑えられる。

^{*23} 実際は、例えばレプトクォーク [16–18] のように、BSM 粒子に加えてミューオン以外の SM 粒子がループに寄与する場合や、ALPs [19–22] のように、結合定数が次元を持っている場合もある。このようなモデルの場合は、本節の見積もりからある程度逸脱しうる。

次に導入する $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型では、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' が一つ伝搬するダイアグラム (図 5.1) がミューオン $g-2$ に寄与するため、以上の見積もりは X を Z' と思えば、良い近似になっている。

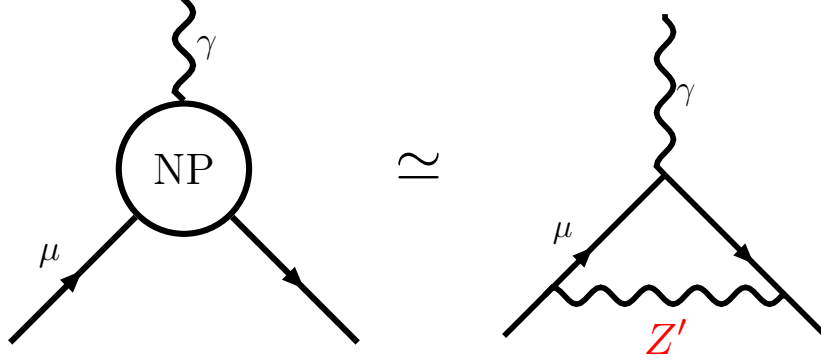


図5.1 ミューオン $g-2$ における、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' 由来の寄与。

5.2 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性の導入

標準模型のゲージ対称性の拡張の一つとして、新たに $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を付け加えたモデルがある [3-6]。このゲージ対称性では、 μ フレーバーを持つ粒子に $+1$ 、 τ フレーバーを持つ粒子に -1 のチャージを割り当てる。そして、SM 粒子に加えて $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' が BSM 粒子として導入される。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g_{Z'} Z'_\mu \sum_{\psi} Q_{\psi} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi. \quad (5.4)$$

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' は、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場の真空期待値から質量を得る。以下、その質量を $m_{Z'}$ と置く。さて、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型では、図 5.1 のように、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンが伝搬することで、ミューオン $g-2$ に対して新たな寄与を与える*24。図 5.1 のダイアグラムから来るミューオン $g-2$ の補正は

$$\Delta a_{\mu}^{Z'} = \frac{g_{Z'}^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)\frac{m_{Z'}^2}{m_{\mu}^2}}, \quad (5.5)$$

と求めることができる*25。 $\Delta a_{\mu}^{Z'}$ の漸近的な振る舞いを見ると、

$$a_{\mu}^{Z'} \sim \begin{cases} \frac{g_{Z'}^2}{12\pi^2} \frac{m_{\mu}^2}{m_{Z'}^2} & m_{\mu} \ll m_{Z'} \text{ のとき,} \\ \frac{g_{Z'}^2}{8\pi^2} & m_{\mu} \gg m_{Z'} \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.7)$$

*24 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場は、 $U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷しか持たないので、ミューオンとは直接結合しない (NG ボゾンも同様)。故に、ミューオン $g-2$ への寄与を考える場合は図 5.1 の通り、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンの寄与のみ考えれば良い。

*25 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' のプロパゲーターは R_{ξ} ゲージで

$$iD_{\text{F}}^{\mu\nu}(k^2) = \frac{-i}{k^2 - m_{Z'}^2} \left(\eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k^2 - \xi m_{Z'}^2} \right), \quad (5.6)$$

で与えられる。縦波成分はゲージに依存するため、観測量である $g-2$ には寄与しないことに注意せよ。

となる。これは前節で述べた概算的な見積りの式 (5.2) とファクター倍を除き等しい。様々な研究 [27–30, 35–38, 54–96] で議論されているように、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' の質量 $m_{Z'}$ が $m_{Z'} \sim 10 - 200$ MeV の範囲であれば、実験からの制限を回避しつつ、知られているミューオン $g-2$ の SM の予言値と実験値との差を説明することが可能である (実験からの制限について詳細は次節で述べる)。

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型の特徴として、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能という点以外に、特に以下の三つが挙げられる。

- (i) 電子と直接結合しない。
- (ii) ゲージアノマリーフリー。
- (iii) ニュートリノセクターと関連がある。

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンが電子と直接結合しないことは、電子にチャージを割り当てていないことから当然ではあるが、重要な性質である。この性質により、実験からの制限が電子と直接結合する模型と比べて緩く、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型が未だミューオン $g-2$ アノマリーを説明できる模型として棄却されていない大きな要因である。さらに $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンはクォークとも結合しないため、より一層実験からの制限は緩い。

また、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性は、 μ ニュートリノや τ ニュートリノにもチャージを割り当てるため、ニュートリノセクターとも関連しており、実際、模型に右巻きニュートリノを導入することで、ニュートリノセクターやレプトジェネシスの文脈での議論もされている [31–33, 97–99]。

5.3 実験による制限の現状

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つモデルでは、ゲージボゾンが電子やクォークとは直接結合しないため、実験による制限が難しいモデルである。

しかしながら、様々な実験によって精力的な探索が行われており、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明可能なパラメータ平面の一部の領域は、図 5.2 のように既に棄却されている。この節では $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つモデルを制限する実験について簡単にまとめていく。

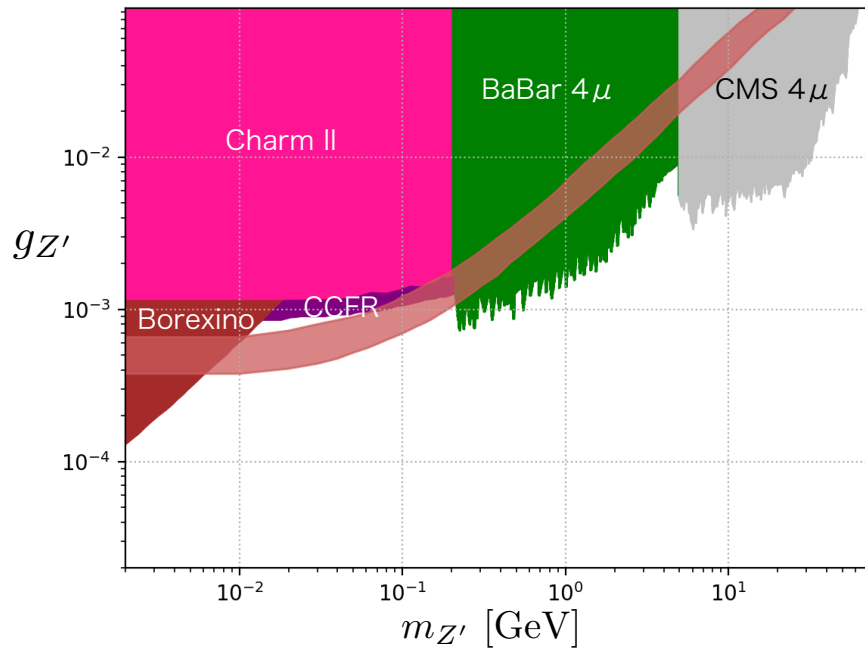


図5.2 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンへの実験からの主な制限。薄赤の帯がミューオン $g-2$ favored な領域 (2σ) で、銀色が CMS 実験 [100]、緑が BaBar 実験 [101]、茶色が Borexino 実験 [102]、ピンクが Charm-II 実験 [103]、そして紫が CCFR 実験 [104] で棄却されている領域。図を描くにあたり、文献 [85] を参考にした。

5.3.1 BaBar 実験と CMS 実験

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' の質量が、ミューオンの質量の二倍より重い領域 $m_{Z'} \geq 2m_{\mu}$ では、 $Z' \rightarrow \mu^+\mu^-$ 崩壊が許されるため、例えば図 5.3 のように終状態が 4μ の過程を調べることで Z' に制限をつけることができる。

e^- と e^+ を衝突させる BaBar 実験 [101] では $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ 、LHC に付随する CMS 実験 [100] では $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ によって終状態が 4μ の過程を探索でき、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つモデルに対して図 5.2 のような制限を与えている。Belle 実験からの制限も BaBar 実験と同程度の制限を与える [105]。

BaBar 実験と CMS 実験の結果を合わせると、ミューオン $g-2$ favored な領域のうち、 $m_{Z'} \geq 2m_{\mu}$ の領域が棄却されることが分かる。

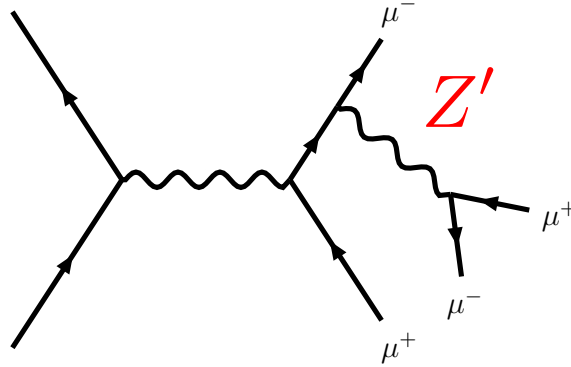


図5.3 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' に制限を与える終状態が 4μ の過程の一例。BaBar 実験 [101] では $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ 過程が、CMS 実験 [100] では、 $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ 過程が模型に制限をつける。

5.3.2 Borexino 実験と White dwarf cooling

本節冒頭でも述べたように、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' は電子とは直接結合しない。しかしながら、 μ または τ のループを介して光子と結合し、間接的に電子と結合することができる^{*26}。これにより、太陽ニュートリノを捉える Borexino 実験 [102] で図 5.4 のようなミュー (タウ) ニュートリノと電子との散乱過程 $e^-\nu \rightarrow e^-\nu$ を観測することにより、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンに関する制限を得ることができる [66]。その結果、図 5.2 のように、ミューオン $g-2$ favored な領域のうち、 $m_{Z'}$ が小さい部分が棄却される。

また、図 5.4 のダイアグラムを 90 度回転させた s-channel 過程 $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ も $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つモデルの制限に寄与する。 $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ 過程の終状態は、相互作用をほとんどしないニュートリノなので直接検出することは難しい。しかしこの過程は、その性質から天体内部のエネルギーを外へ持ち去ることができる。故に、例えば白色矮星の冷却 (White dwarf cooling) を観測することで、間接的に痕跡を得ることが可能である。一方、白色矮星の光度関数は標準模型とは無矛盾なので、新物理由来の冷却効果は十分小さくなければならない [65, 106]。結論としては White dwarf cooling からの制限は上述の Borexino 実験と同程度の制限を与える [66]。

^{*26} ループを介した Z' と光子の結合の大きさは以下の積分で評価できる (導出は省略。計算自体は、例えば QED の真空偏極と同様)。

$$\epsilon_{\mu\tau} = \frac{-eg'^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \sum_{f=\mu,\tau} Q_f \log \left(\frac{\mu^2}{m_f^2 - x(1-x)q^2} \right). \quad (5.8)$$

ただし、 Q_f, m_f はフェルミオン f の $U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷及び質量を、 μ は繰り込みスケールを表す。特に $q^2 \ll m_\mu^2$ の場合は容易に積分が実行でき、光子との結合 $\epsilon_{\mu\tau}$ が

$$\epsilon_{\mu\tau} \sim \frac{eg_{Z'}}{6\pi^2} \log \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right) \simeq -\frac{g_{Z'}}{70}, \quad (5.9)$$

で与えられる。即ち、概ね $g_{Z'}$ の 1/100 程度である。ここに、 Q_μ, Q_τ は符号が正反対なので、繰り込みスケール μ は計算の過程でキャンセルされた。今回は tree-level で Z' と光子が結合しないモデルを仮定したが、より一般には tree-level で結合するモデルも存在する。その場合は、(tree の kinetic mixing パラメータの大きさにもよるが) $\epsilon_{\mu\tau} \sim -g_{Z'}/70$ は sub-leading の補正となる。

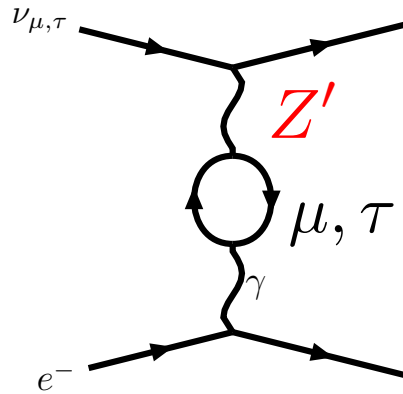


図5.4 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' に制限を与える $e^- \nu \rightarrow e^- \nu$ 散乱のダイアグラム。Borexino 実験 [102] では、太陽ニュートリノと電子との散乱過程の情報によって $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型を制限できる。

5.3.3 CCFR 実験と Charm-II 実験

原子核とニュートリノの散乱によって荷電レプトンを2つ生成する過程のことを Neutrino Trident Production と呼ぶが、この過程から来る制限もある [54,56]。実際、図 5.2の CCFR 実験 [104] と Charm-II 実験 [103] による制限がこれに該当する。両実験は $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu N \mu^+ \mu^-$ 過程 (図 5.5参照) を観測することで、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンのパラメータ領域を制限した。

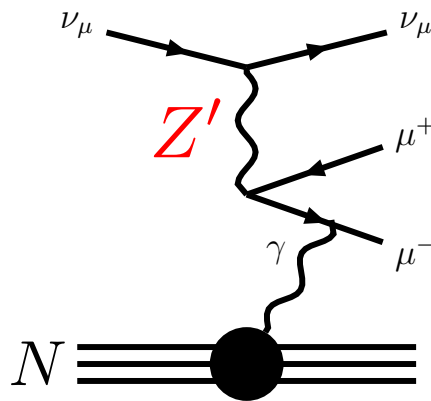


図5.5 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' に制限を与える Neutrino Trident Production のダイアグラム。核子を N で表記した。過去に行われた CCFR 実験 [104] と Charm-II 実験 [103] の測定値が Z' に対し制限を与える。

上述の実験と比べると、ミューオン $g-2$ favored な領域とはほとんど抵触していないが、CCFR 実験は領域の一部を制限していることが分かる。

5.4 将来実験による制限

これまでの実験によって、ミューオン $g-2$ を説明可能な領域の一部が既に棄却されている現状を確認した。残りの領域も、近い将来実験によって検証される運命にある。本節では $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンを探索可能な将来実験についていくつか列挙する。残されたミューオン $g-2$ を説明可能なパラメータ領域 $m_{Z'} < 2m_\mu$ を探索する場合、 Z' はミューオンペアに崩壊できないため、自ずとニュートリノペアに崩壊する過程の痕跡を探る invisible search が前提となる^{*27} ^{*28}。

5.4.1 NA62 実験

NA62 実験 [107] とは CERN の陽子ビームを用いた fixed target 実験である。NA62 実験は大量の K^+ 崩壊を観測する実験であるが^{*29}、 K^+ の主な崩壊モードである $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ の測定を通じ図 5.6 の過程 $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu Z'$ 、 $Z' \rightarrow \nu \bar{\nu}$ を調べることで、 Z' に制限をつけられることが指摘されている [73]。文献 [73] に

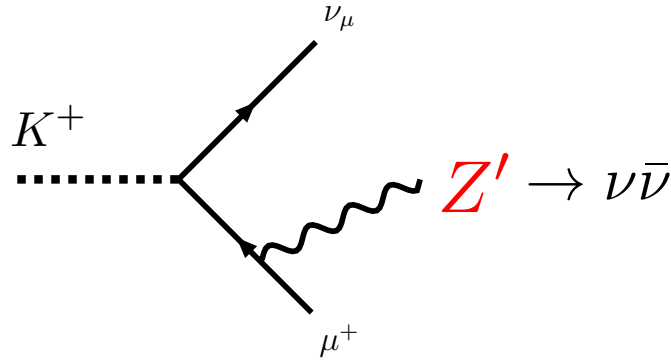


図5.6 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソン Z' に制限を与える K^+ 崩壊のダイアグラム。パラメータ領域 $m_{Z'} < 2m_\mu$ では、途中で生成された Z' はニュートリノペアに崩壊する。

^{*27} $m_{Z'} \gtrsim 1$ MeV であれば、 Z' は μ 又は τ のループを介することで、電子陽電子ペアにも崩壊は可能である。ただし、この過程の分岐比は $e\epsilon_{\mu\tau} \ll g_{Z'}$ で大きく抑えられるため、検出が困難である。このため、特にミューオン $g-2$ の文脈では invisible search が前提となる。

^{*28} 余談ではあるが、 Z' の寿命や飛程を見積もってみると以下ようになる。まず、 $Z' \rightarrow \nu \bar{\nu}$ 過程の崩壊幅 $\Gamma_{Z'}$ は、ニュートリノ質量を無視すると、

$$\Gamma_{Z'} \simeq \frac{g_{Z'}^2}{8\pi} m_{Z'} \quad (5.10)$$

と概算できる。 $m_{Z'} < 2m_\mu$ のパラメータ領域では、他に崩壊可能なチャンネルは (leading では) ないため、 Z' の寿命 $\tau_{Z'}$ は単に崩壊幅の逆数 $\tau_{Z'} \simeq 1/\Gamma_{Z'}$ で評価できる。例えばミューオン $g-2$ favored なベンチマークポイントで具体的に計算してみると、

$$\tau_{Z'} \sim \begin{cases} O(10^{-16}) \text{ sec} & (m_{Z'}, g_{Z'}) = (100 \text{ MeV}, 10^{-3}) \text{ のとき,} \\ O(10^{-14}) \text{ sec} & (m_{Z'}, g_{Z'}) = (10 \text{ MeV}, 5 \times 10^{-4}) \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.11)$$

程度となる。 Z' が持ち得るエネルギーが高々 100 GeV の場合、ブーストを考慮しても飛程は精々

$$\gamma c\tau_{Z'}|_{\text{max}} \sim \begin{cases} O(10^{-5}) \text{ m} & (m_{Z'}, g_{Z'}) = (100 \text{ MeV}, 10^{-3}) \text{ のとき,} \\ O(10^{-2}) \text{ m} & (m_{Z'}, g_{Z'}) = (10 \text{ MeV}, 5 \times 10^{-4}) \text{ のとき,} \end{cases} \quad (5.12)$$

程度となる。

^{*29} NA62 実験の本来の目的は、 K^+ 中間子の rare decay $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ を観測し分岐比を測定することである [107]。

よれば、図 5.6の過程において $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ 崩壊の痕跡を調べることで、残されたミューオン $g-2$ を説明可能な領域 (2σ) を全て探索可能である。

5.4.2 NA64 μ 実験

NA64 μ 実験 [108, 109] とは $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索を目的とした fixed target 実験である。NA64 μ 実験ではミューオンビームを標的中の核子に衝突させることで、図 5.7の過程 $\mu N \rightarrow \mu N Z', Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ を通じて Z' を探索することができ、ミューオン $g-2$ favored な領域を含む広範囲のパラメータ領域を調査することができる^{*30} [110]。

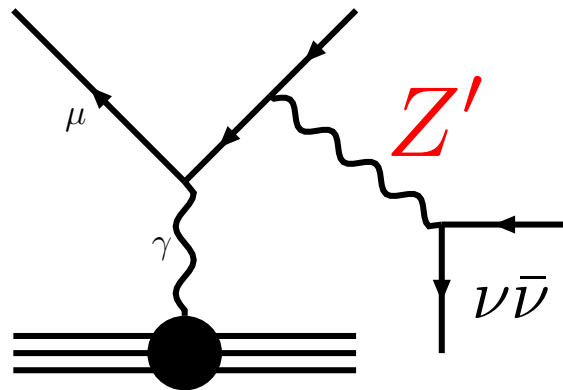


図5.7 NA64 μ 実験が観測を目指す $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' が関与するダイアグラム。核子を N で表記した。パラメータ領域 $m_{Z'} < 2m_\mu$ では、途中で生成された Z' はニュートリノペアに崩壊する。

5.4.3 MUonE 実験

序論でも触れたように、MUonE 実験 [2] によっても $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索が可能であることが筆者らの論文 [7] によって示された。

^{*30} ミューオンと核子の散乱を利用する利点として、 \sqrt{s} を稼げる点が挙げられる。これによりミューオンと電子の散乱の場合と比較して、より重い質量の Z' を生成可能となる。

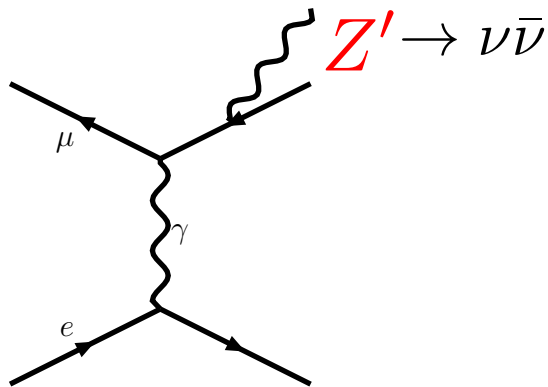


図5.8 筆者らの論文 [7] の中で議論した、 Z' 探索において注目するダイアグラム。パラメータ領域 $m_{Z'} < 2m_\mu$ では、途中で生成された Z' はニュートリノペアに崩壊する。

MUonE 実験で図 5.8 の過程 $\mu e \rightarrow \mu e Z', Z' \rightarrow \nu \bar{\nu}$ を調べることで、ミューオン $g-2$ favored な領域を含む広範囲のパラメータ領域を調査することができる。詳細は次の第6章を参照されたい。

5.4.4 Belle II 実験

上記に挙げた実験の他に、Belle II 実験 [111] によっても $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索が可能である。実際、ミューオンから直接 Z' が伸びる $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-Z', Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ 過程 [112] や、対消滅で生じた光子から、ループを介して Z' が生成される $e^+e^- \rightarrow \gamma Z', Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ 過程 [61] を調べることで Z' を探索できることが指摘されている。

第 6 章

MUonE 実験と新物理

この章では、MUonE 実験による新物理探索について議論する。MUonE 実験が観測する $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱に新物理の兆候が現れる可能性については、先行研究 [113, 114] など議論がされてきたが、いずれも MUonE 実験の精度では探索することは難しいという結論を出していた。本章では、これらの先行研究について簡単に触れた後、筆者と共同研究者らによる論文に基づき [7]、MUonE 実験における $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程に注目した invisible search によって新物理が探れることを示す。

6.1 $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱と新物理

MUonE 実験の目的である $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱の測定に新物理が与える影響について考えよう。以下では新粒子の質量が $O(1)$ GeV より重い場合と軽い場合に分けて議論することにする。

6.1.1 新粒子が重い場合 ($\gg O(1)$ GeV)

新粒子の質量が $O(1)$ GeV より重い場合、その寄与を積分することで有効理論の議論に帰着することができる。これは先行研究 [113] の中で用いられている手法であり、利点として、特定の BSM 理論に依存しない一般的な議論が可能である。詳細は省くが、先行研究 [113] の結論は、電子の $g-2$ など、既に知られている実験からの制限を考慮に入れると、MUonE 実験の精度では $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱への新物理からの寄与を測定することは難しいだろう、ということである。

6.1.2 新粒子が軽い場合 ($\lesssim O(1)$ GeV)

反対に、新粒子の質量が $O(1)$ GeV より軽い場合、有効理論の議論は使えないため、モデルに依存した議論が必要になる。代表的なものとして、dark photon [113] や、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン [114] について寄与を分析した先行研究があるが、いずれも結論は、重い新粒子の場合と同じく、既知の実験制限を考慮に入れると、MUonE 実験の精度では $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱への新物理からの寄与は無視できてしまう、という主張にまとめられる。

6.2 $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程に注目した invisible search

上述の通り、MUonE 実験における $\mu e \rightarrow \mu e$ 測定への新物理からの影響は無視できるほど小さい。そこで、他の過程で新物理を探索することを考える。そのために、最も単純な過程の一つとして $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾン Z' を一つ放出する $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程を考えてみよう。驚くべきことに、これまで MUonE 実験の文脈でこのような過程を通して新粒子を探す試みはなかった。そこで、筆者と共同研究者らはこの $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程に注目し、このシグナルを追うことで Z' を探すことを提案した [7]。本節では、その内容について簡単にまとめていく。

初めに、シグナルである $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程についてコメントをしておこう。今回 Z' を探索する上で我々が注目したのは、 $m_{Z'} < 2m_\mu$ のパラメータ領域である。この領域は5.3節で述べたように、未だミューオン $g-2$ favored な領域が残っているため、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボゾンを探す上では打って付けと言える。ただし、生成した on-shell の Z' がミューオンペアに崩壊できないため、直接 Z' を観測することはできない。即ち、ニュートリノペアへの崩壊の痕跡を探る invisible search が前提となる。

次に、 Z' 探索のための戦略を述べる。考えられる SM 由来のバックグラウンドとして、主に $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱過程、 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程、及び電弱過程 $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ が挙げられる。このうち、 $\mu e \rightarrow \mu e$ 過程については既に4.2節で説明したように、我々は運動学をよく知っているため、適切な運動学的選択基準を課すことでシグナルとの判別が可能である。さらに $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程も、後述するように選択基準を考慮することで取り除くことができる。残る電弱過程 $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ については、シグナル $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ と最終的な終状態が同じであるため^{*31}、運動学的には除去することができない。そこで、電弱過程についてはモンテカルロ・シミュレーションを用いてイベントの数を具体的に計算することにする。

まず、運動学的選択基準によって $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱過程、 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程が除去できることを確認しよう。今、次の三つの選択基準を課すことを考える^{*32}。

- (i) $\theta_\mu^f > 1.5$ mrad.
- (ii) $1 \text{ GeV} < E_e^f < 25 \text{ GeV}$.
- (iii) Photon veto.

図 6.1 に、選択基準として採用した θ_μ^f と E_e^f 、そして $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱の elastic curve を示した。図 6.1 から明らかな様に、 $\mu e \rightarrow \mu e$ 過程は条件 (i),(ii) を同時に満たすことはない。実際、条件 (i) を満たした場合、 E_e^f の最小値は 38 GeV であって、条件 (ii) の領域外である^{*33}。

^{*31} Z' の崩壊幅が $m_{Z'}$ よりも十分小さいため、最終的な終状態が同じではあるが、シグナルと電弱過程 $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ の干渉は無視して良い。実際、今回注目するパラメータ領域では、崩壊幅は $\Gamma_{Z'} \simeq \frac{g_{Z'}^2}{8\pi} m_{Z'}$ かつ結合定数 $g_{Z'}$ も小さいため、narrow width 近似が有効な条件 $\Gamma_{Z'}/m_{Z'} \ll 1$ を満たす。この元では近似的に

$$\left| \frac{1}{p^2 - m_{Z'}^2 + im_{Z'}\Gamma_{Z'}} \right|^2 = \frac{1}{(p^2 - m_{Z'}^2)^2 + m_{Z'}^2\Gamma_{Z'}^2} \xrightarrow{\Gamma_{Z'}/m_{Z'} \ll 1} \frac{\pi}{m_{Z'}\Gamma_{Z'}} \delta(p^2 - m_{Z'}^2), \quad (6.1)$$

が成り立つ。即ち、 Z' はほとんど on-shell であって、off-shell の Z^* とは干渉しない。

^{*32} MUonE の θ_μ^f 分解能は $O(0.01)$ mrad である。また、 E_e^f や E_γ^f を測定する ECAL の分解能は、 $\lesssim 10\%$ 程度である。

^{*33} 実際の実験では、ECAL のエネルギー分解能のため、弾性散乱イベントのごく一部が信号領域に漏れてしまうことがある。このエネルギー分解能は、電子が生成される位置に依存し、 $E_e^f \geq 40 \text{ GeV}$ で約 2 ~ 5% と見積もられている [2]。この位置依存性は、シリコン検出器やバリウムターゲットとの二次的な相互作用に起因するもので、電子軌道に沿ってヒットのパターンを再構成することで、エネルギー分解能を向上させることができるかもしれない [2]。いずれにしても、検出器の校正後には、弾性散乱イベン

続いて、 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程を考える。今、この過程における終状態の電子と光子のエネルギーの和 $E_{e\gamma}^f \equiv E_e^f + E_\gamma^f$ は、soft photon 極限 $E_\gamma^f \rightarrow 0$ で最小となり、弾性散乱時の電子のエネルギーに一致する（この証明は付録 C.2.2で与える）。このため、条件 (i),(ii) の元で、 E_γ^f は少なくとも $38 \text{ GeV} - E_e^f \gtrsim 13 \text{ GeV}$ 以上のエネルギーを持つ。このような高いエネルギーを持つ光子は、電子と十分離れていれば、ECAL で検知可能であり条件 (iii) で落とすことができる。また、この過程における光子の角度は選択基準のもとで $\theta_\gamma^f \leq 6 \text{ mrad}$ 程度であり*³⁴、MUonE 実験で想定されている ECAL の横方向の大きさ $O(1 \times 1) \text{ m}^2$ で全ての光子を検知することが可能である。仮に、電子と光子が十分離れておらず、ECAL で判別ができない場合も、これが 38 GeV 以上の一つの電子として観測されるはずなので、やはり条件 (ii) で落とすことができる。以上より、 $\mu e \rightarrow \mu e$ 過程と $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程は上記の選択基準によって運動学的に取り除くことができる。

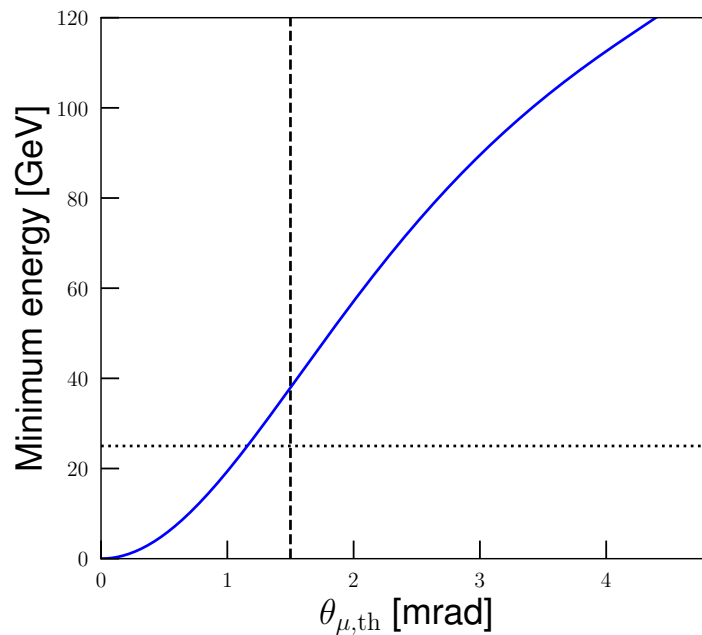


図6.1 $\mu e \rightarrow \mu e$ ($\mu e \rightarrow \mu e \gamma$) 過程における、 θ_μ^f を固定した場合の E_e^f ($E_{e\gamma}^f$ の最小値) を表すグラフ。垂直方向の破線と、水平方向の点線はそれぞれ選択基準として採用した θ_μ^f と E_e^f を表す。

さて、その他の潜在的なバックグラウンドとして、 $\mu e \rightarrow \mu e$ 過程に伴う多重散乱と、ミューオンの原子核散乱についてもコメントしておこう。この二つについてはまだ完全には決定されていない実験装置に強く依存するため、ここでは深く立ち入らないが、この2つのバックグラウンドはうまくコントロールできると期待できる。なぜなら、多重散乱はミューオンの散乱角が選択基準の条件 (i) を満たし、かつその後の散乱で電子がエネルギーを失って条件 (ii) の範囲に入った場合や、終状態の電子のエネルギーが条件 (ii) の範囲にあり、かつミューオンが2度目の散乱を受け、散乱角が大きくなり条件 (i) を満たした場合に、選択基準を満たすが、いずれの場合も、2回目の散乱点に相当のエネルギーのデポジットがあるため、その痕跡はキック、あるいはブランチとしてトラッカーで検出することができるからである。同様に、ミューオンの原子核散乱イベントについては、文献 [2] で議論されているように、トラッカーで電磁シャワー由来の粒子多重度を見て識別すること

トの混入が十分に抑制されるように、条件 (i),(ii) を調整する必要がある。

*³⁴ 詳細は付録 C.2.3を参照。

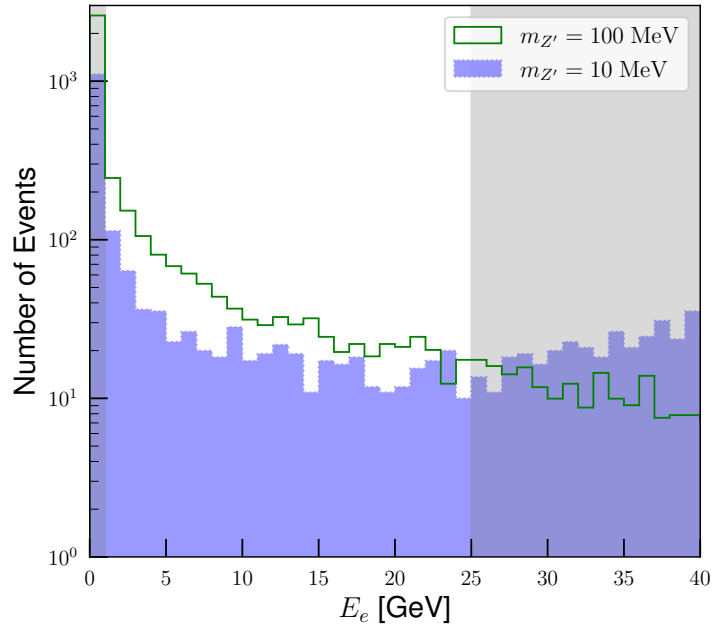


図6.2 選択基準の条件 (i) を課した元でのシグナルイベントの E_e^f の分布。積分ルミノシティは 15 fb^{-1} を仮定した。 $(m_{Z'}, g_{Z'}) = (100 \text{ MeV}, 10^{-3})$ を緑で、 $(m_{Z'}, g_{Z'}) = (10 \text{ MeV}, 5 \times 10^{-4})$ を青で表してある。灰色の領域は選択基準 (ii) の範囲外。

が可能である。

最後に、本研究で得た結果を述べる。今回我々はモンテカルロ・シミュレーションによってシグナル $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 及び、電弱バックグラウンド $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ の過程についてイベント数を計算した。その際、我々が用いたのは UFO ファイルを生成するための、FeynRules v2.3.48 [115, 116] 及びシミュレーションを行うための MadGraph5_aMC@NLO v3.1.1 [117] である。また、積分ルミノシティは 15 fb^{-1} を仮定した。これは、MUonE が数年で到達できるとされている値である [2]。

まず、図 6.2は選択基準の条件 (i) ($\theta_\mu^f > 1.5 \text{ mrad}$) を課した元でのシグナルイベントの E_e^f の分布である。ミューオン $g-2$ を説明できる二つのベンチマークポイントについて、 $(m_{Z'}, g_{Z'}) = (100 \text{ MeV}, 10^{-3})$ を緑で、 $(m_{Z'}, g_{Z'}) = (10 \text{ MeV}, 5 \times 10^{-4})$ を青で表した。いずれの場合も、多くのシグナルイベントが選択基準の条件 (ii) ($1 \text{ GeV} < E_e^f < 25 \text{ GeV}$ 、図では灰色で表記) を満たしていることがわかる。また、これらのイベントでは電子は前方 ($\theta_e^f \lesssim 20 \text{ mrad}$) に散乱されるため、ほとんどのシグナルイベントは ECAL に当たるということがわかった。一方、電弱プロセスの $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ も同様に MadGraph5_aMC@NLO v3.1.1 によってシミュレーションを行った結果、イベント数は $\sim 10^{-4}$ 程度で無視できるとわかった。

図 6.3では、 $(m_{Z'}, g_{Z'})$ 平面において、選択基準 (i-iii) を満たすシグナルのイベント数 N_{sig} を等高線によって図示した。ここでも積分ルミノシティは 15 fb^{-1} を仮定してある。オレンジと黄色の帯は、ミューオン $g-2$ の観測値と標準模型の理論値との差を、それぞれ $1\sigma, 2\sigma$ レベルで説明可能な領域である。赤い二つの星は、それぞれ図 6.2で用いたベンチマークポイントで、 1σ の帯に含まれる。緑の影の領域は既に BABAR 実験 [101] で棄却されている領域で、Belle 実験からの制限も同程度である [105]。灰色の影は、Borexino 実験からくる制限で棄却されている [102]。この制限は [66] から引用した。濃い(薄い)青の領域は、Neutrino Trident Production からくる制限で、CHARM-II [103] 実験及び CCFR [104] 実験で棄却されている(文

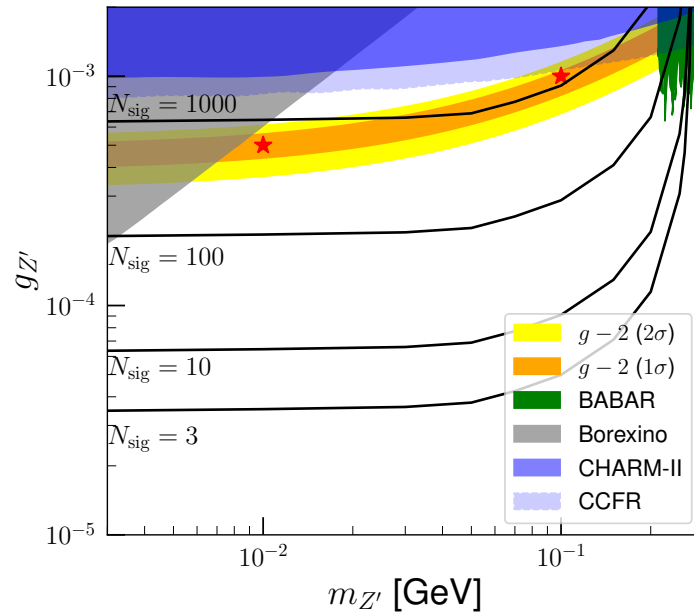


図6.3 $(m_{Z'}, g_{Z'})$ 平面における、選択基準 (i-iii) を満たすシグナルのイベント数 N_{sig} の等高線。オレンジと黄色の帯はミューオン $g-2$ アノマリーをそれぞれ 1σ , 2σ レベルで説明可能な領域。赤い二つの星は、それぞれ図 6.2 で用いたベンチマークポイント。緑、灰色、濃い青、薄い青の領域はそれぞれ BABAR [101], Borexino [102], CHARM-II [103], そして CCFR [104] 実験で棄却されている。

献 [54] から引用)。図から見て取れるように、ミューオン $g-2$ アノマリーを説明できる領域において、シグナルが $\sim 10^3$ イベントほど得られることが期待される。軽い質量領域では、 $g_{Z'}$ が $O(10^{-5})$ 程度まで小さい領域でも、 $O(1)$ イベントが得られることが期待できる。一方、 $m_{Z'} \gtrsim 100$ MeV 程度の領域では、イベント数は運動学的に抑えられ、 $m_{Z'} \simeq 300$ MeV 程度でイベント数は 0 になる。

第 7 章

結論

本修士論文ではミューオン $g-2$ アノマリーを解決するモデルの一つである、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型の MUonE 実験による検証可能性を議論した。結果として図 6.2, 6.3のように、 $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ 過程に注目することで、MUonE 実験による $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンの探索は、追加の装置を導入することなく十分に可能である結論を得た。

SM 由来のバックグラウンドを取り除くため、我々は次の三つの選択基準を課した。

- (i) $\theta_{\mu}^f > 1.5$ mrad.
- (ii) $1 \text{ GeV} < E_e^f < 25 \text{ GeV}$.
- (iii) Photon veto.

$\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱は、大きいミューオンの散乱角には常にエネルギーを持った電子が伴うため、この選択基準を満たすことができない。 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程は、hard な光子が存在する場合のみ選択基準 (i,ii) を満たしうるが、光子を veto する条件 (iii) によって取り除くことができる。また、電弱過程 $\mu e \rightarrow \mu e \nu \bar{\nu}$ のイベント数は無視できるほど小さい。故にこの戦略のもとでシグナル $\mu e \rightarrow \mu e Z'$ を追えば、バックグラウンドを気にすることなく invisible search を行うことができる。また、我々の選択基準 (i-iii) は、閾値を最適化したり、電子の散乱角や acoplanarity などの変数を追加して改善することが可能である。

実際の実験装置や検出器の性能に関する知識が不足しているため、この研究では定量的に議論されていない他の潜在的な SM バックグラウンドプロセス (多重散乱や原子核散乱など) が存在する。6.2節で述べたように、これらの過程は制御可能であると期待されているが、実験にあたってこの議論の検証、並びにこれらの過程に関連するイベントの数に対し、事前の正確な評価が必要である。これらの問題やその他の問題については、今後検討すべき課題である。

$U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージボソンを探索する実験としては、MUonE 実験と同時期に NA64 μ が提案されている [108, 109]。一方 MUonE 実験は本来 $\mu - e$ 弾性散乱を用いてハドロンの真空分極 (HVP) の寄与を評価することに特化した実験であって、先行研究でも BSM の探索の是非については否定的な見方がされてきた [113, 114]。その中で著者らの論文 [7] は MUonE 実験は新物理にも敏感であることを示し、MUonE 実験が二重の目的を果たすことができることを初めて指摘した。さらに6.2節で述べた戦略は、他の模型 (例えば ALPs など) を MUonE 実験によって探索する上でも応用できることが期待される。

謝辞

本修士論文の執筆にあたり、多くの方々にご支援いただきました。共同研究者である濱口幸一准教授、永田夏海助教、浅井健人氏、Shih-Yen Tseng 氏には心から感謝申し上げます。特に濱口幸一准教授には日々の研究指導を初め、本修士論文を初めとする様々な書類やスライドについて確認、助言をしてくださいました。また、永田夏海助教には研究内容についてはもちろんのこと、研究以外の部分でも様々な助言を頂き大変お世話になりました。重ねてお礼申し上げます。東京大学素粒子論研究室の皆様には、ゼミなどを通して様々な助言、質問、議論をしていただき、物理の理解、研究の助けとなりました。諸井健夫教授、伊部昌宏准教授には修士論文の副査を務めて頂きました。

この修士論文は、これらの方々のおかげで書き上げることが出来ました。心より感謝し、御礼申し上げます。

付録 A

Dirac 方程式における磁気能率

外場 $A_\mu^{\text{cl}}(x)$ がある時の Dirac 方程式は以下で与えられる。

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu^{\text{cl}}(x)) - m]\psi(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

これの非相対論的極限を考えたとき、磁場との相互作用が

$$H_{\text{Pauli}} = \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}^{\text{cl}}(x), \quad (\text{A.2})$$

として現れることを確認しよう。第2章で述べた様に、上記の場合 g 因子は 2 である。

今注目するのは静磁場との相互作用なので、外場として $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (0, \mathbf{A}^{\text{cl}}(x))$ を考える。そして、この時の Dirac 方程式はハミルトニアンという言葉で

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x), \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{\text{cl}}(x)) + m\beta, \quad (\text{A.4})$$

と書ける。ここに $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 及び、

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

である。

今、ディラック方程式の解のうち、正エネルギー解に注目しよう^{*35}。非相対論的極限 ($m \gg |\mathbf{p}|$) を考えると、位相因子のうち時間発展する部分は

$$e^{-iEt} \simeq e^{-imt} e^{-iE^{\text{cl}}t}, \quad (\text{A.6})$$

と分割できる (ただし、 $E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $E^{\text{cl}} \equiv \mathbf{p}^2/2m$ と置いた)。 e^{-imt} には運動量依存性はないので、これを前に出すと非相対論極限における $\psi(x)$ の表式

$$\psi(x) \rightarrow e^{-imt} \begin{pmatrix} \kappa(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

を得る。ただし、後の便利のために右边を 2 成分スピノル $\kappa(x), \chi(x)$ で表しておいた^{*36}。

^{*35} 後述するように、ここで負エネルギー解を選ぶと反粒子の方程式が導かれる。

^{*36} 本文ではスピノルをカイラル表示で表していたが、ここでは非相対論極限を取ったときに見やすいようにディラック表示を使っているのに注意せよ。

さて、この $\psi(x)$ の非相対論的な表式 (A.7) を Dirac 方程式 (A.3) に代入してみよう。すると 2 成分スピノル $\kappa(x), \chi(x)$ に関する方程式

$$\left(m + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\kappa(x) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\chi(x) + m\kappa(x), \quad (\text{A.8})$$

$$\left(m + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi(x) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\kappa(x) - m\chi(x), \quad (\text{A.9})$$

を得ることができた。二つの式は対称的な形をしているが、右辺第二項の符号が反転している。故に、整理すれば、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\kappa(x) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\chi(x), \quad (\text{A.10})$$

$$\left(2m + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi(x) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\kappa(x), \quad (\text{A.11})$$

となる。ここで式 (A.11) 左辺に注目してみよう。今、非相対論的極限を考えているから、 $m \gg E^{cl}$ より $\chi(x)$ の時間微分は近似的に落とすことができる。

$$\left(2m + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi(x) \simeq 2m\chi(x). \quad (\text{A.12})$$

よって、式 (A.11) は簡単に解くことができ、

$$\chi(x) = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\kappa(x), \quad (\text{A.13})$$

と分かる。後はこれを式 (A.10) に代入すれば良い。実際にやってみると、 $\kappa(x)$ の方程式として

$$i\frac{\partial}{\partial t}\kappa(x) = \hat{H}\kappa(x), \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\{\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\}\{\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))\}, \quad (\text{A.15})$$

が得られる。

この形は少々不便なので、よく知るシュレディンガー方程式の形に帰着させたい。パウリ行列の公式 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を用いることで速やかに

$$i\frac{\partial}{\partial t}\kappa(x) = \hat{H}\kappa(x), \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\nabla + q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))^2 + \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}^{cl}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.17})$$

が導出できる^{*37}。ただし、途中で $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ を使った。これがディラック方程式の非相対論的極限 (いわゆるパウリ方程式) であり、冒頭で述べたように、磁場との相互作用が $\frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}^{cl}(\mathbf{x})$ として現れていることが分かる。

^{*37} 正エネルギー解ではなく、負エネルギー解の非相対論的極限を取った場合は、式 (A.16), (A.17) の代わりに

$$i\frac{\partial}{\partial t}(i\sigma_2\chi^*) = \hat{H}(i\sigma_2\chi^*), \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A}^{cl}(\mathbf{x}))^2 + \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}^{cl}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.19})$$

が導かれる (ただし、 $\boldsymbol{\sigma} = -\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2$ を途中で使った)。これは式 (A.16) と比べて電荷を反転させた方程式になっているため、反粒子の運動方程式と解釈できるだろう。実際、CP 変換 $\psi \xrightarrow{CP} i\gamma^2\gamma^0\psi^*$ は 2 成分の言葉で書くと、 $\kappa \rightarrow i\sigma_2\chi^*$ の置き換えに相当する。

付録 B

$a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の計算

この付録では第3章では割愛した、 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を現象論的に計算するための二つの公式

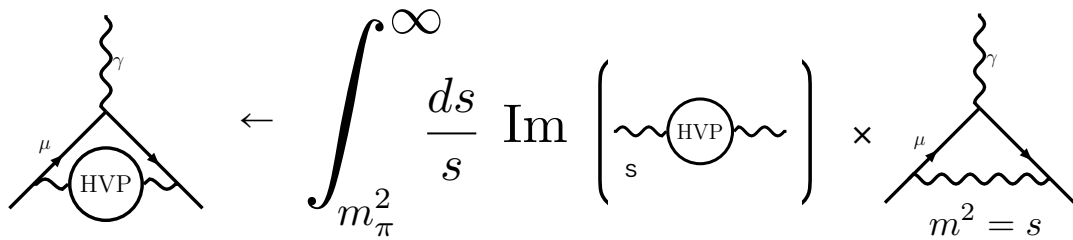
$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{K(s)}{s} R(s) ds, \quad (3.1)$$

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}(t(x)) dx, \quad (3.5)$$

の導出を行う。本文でも述べたように、これらの表式は古くから知られたものではあるが [48, 49, 51]、その過程を追うことは $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の現象論的計算を理解する上で重要である。

B.1 White Paper の方法

まずは White Paper [10] で採用された、公式 (3.1) の導出に取り掛かりよう。方針として、初めに HVP 由来の $g-2$ 因子を、非摂動的な情報を含む HVP 本体の部分と、HVP を含まない部分の $g-2$ 因子の積に分解できることを示す (図B.1を参照)。



図B.1 分散関係式による $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の計算法の概念図。分散関係を用いることで、HVP 由来の $g-2$ 因子を、非摂動的な情報を含む HVP 本体の虚部と、質量が s の massive vector boson 由来の $g-2$ 因子に分解し、それらの積の積分に帰着できる (ただし係数は省略した)。

そのために、真空偏極 $\Pi(k^2)$ について解析接続を行ない、分散関係式を使う^{*38}。今、図 B.2の様な経路 C

^{*38} 解析接続の際、 $\Pi(s)$ は $s < 0$ のとき実である ($\Pi(s)^* = \Pi(s^*)$) が、複合粒子が生成される branch cut 近くでは

$$\text{Re}\Pi(s + i\epsilon) = \text{Re}\Pi(s - i\epsilon), \quad \text{Im}\Pi(s + i\epsilon) = -\text{Im}\Pi(s - i\epsilon), \quad (\text{B.1})$$

のように振る舞うことに注意せよ。

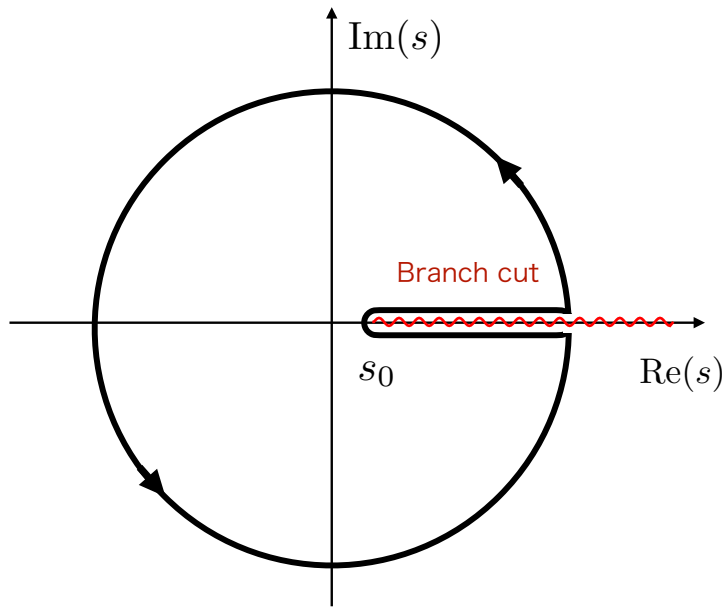
を考えよう。コーシーの積分公式から、 $\Pi(k^2)$ は C 上の周回積分として表すことができる。

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{\Pi(s)}{s - k^2}. \quad (\text{B.2})$$

ここで、右辺の積分には外周からの寄与はないので、branch cut 上下の経路からくる因子のみ抽出される。このうち、実部は cut を跨いでも不変なので上下で打ち消し合い、結局虚部のみが残る。以上より、真空偏極 $\Pi(k^2)$ の分散関係式

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s + i\epsilon)}{s - k^2}, \quad (\text{B.3})$$

を得る。ここに、 $\epsilon > 0$ である*39。



図B.2 分散関係式における積分経路 C 。経路 C で $\Pi(s)/(k^2 - s)$ を積分すると、外周からの寄与はないため branch cut 上下の経路からくる因子が抽出される。実部は cut を跨いでも変わらないので、結局虚部だけの積分に帰着される。複合粒子が生成される閾値を s_0 とした。

また、繰り込まれた真空偏極 $\Pi_{\text{ren}}(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(0)$ は、式 (B.3) を使えば

$$\Pi_{\text{ren}}(k^2) = \frac{k^2}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s + i\epsilon)}{s(s - k^2)}, \quad (\text{B.4})$$

で与えられる。

ここまでの議論から、ハドロン真空偏極 (HVP) の因子 $i\Pi_{\text{had,ren}}^{\rho\sigma}(k^2) \equiv i(k^2\eta^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma)\Pi_{\text{had,ren}}(k^2)$ は、光子の伝搬関数で挟むと次のような変形を経て、綺麗に HVP 本体と $k^2 = s$ に pole を持つプロパゲータ (の

*39 $\text{Im}\Pi(s + i\epsilon)$ の因子は、footnote *38でも述べたように、引数虚部の正負によって符号が反転する。このため、符号間違いを犯さないためにも、 $i\epsilon$ の前の符号 (及び ϵ の正負) には細心の注意を払う必要がある。また、陽には表記しなかったが、分母にも $s + i\epsilon - k^2$ の形で $i\epsilon$ 依存性が入る。この後ループ積分を計算する際に、通常プロパゲータの分母に $1/(k^2 - m^2 + i\epsilon)$ として $i\epsilon$ が挿入されるが、これと上記の $i\epsilon$ は異なることに注意しよう。

ようなもの)に分解できる。

$$\begin{aligned}
& \frac{-i}{k^2} \left(\eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) i \Pi_{\text{had,ren}}^{\rho\sigma}(k^2) \frac{-i}{k^2} \left(\eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \\
&= \frac{-i}{k^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi_{\text{had,ren}}(k^2) \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon) \frac{-i}{k^2-s} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \tag{B.5}
\end{aligned}$$

ただし、 $U(1)_{\text{EM}}$ のゲージパラメータを ξ と表記した。

さて、我々が求めたいのは $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ の公式であった。 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を求めるには理論上、図 2.2 にファインマンルールを適用して得られる、以下のループ積分を評価すれば良い。

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} \xleftarrow{g-2} e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') \gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu u(p)}{((p' - k)^2 - m^2)((p - k)^2 - m^2)} \frac{-i \eta_{\mu\rho}}{k^2} i \Pi_{\text{had,ren}}^{\rho\sigma}(k^2) \frac{-i \eta_{\sigma\nu}}{k^2}. \tag{B.6}$$

ただし、 $\xleftarrow{g-2}$ はループ積分から $g-2$ への寄与の抽出を意味するものとする。また、 m, p, p' はそれぞれ、外線のフェルミオンの質量と運動量である。しかし、本文でも述べたように HVP の因子は非摂動効果を含んでいるため、このままでは評価することは難しい。そこで、先程導出した式 (B.5) をこのループ積分に適用しよう。すると、ループ積分を非摂動効果を含む部分、そしてそれ以外の部分の積分に分解することができる。

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} \xleftarrow{g-2} -\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon) \bar{u}(p') \delta \Gamma_\alpha(q^2, s) u(p) \tag{B.7}$$

$$\delta \Gamma_\alpha(q^2, s) \equiv -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu}{((p' - k)^2 - m^2)((p - k)^2 - m^2)} \frac{-i}{k^2-s} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \tag{B.8}$$

ただし、式変形に当たって積分の順序を交換し、 $q' \equiv p' - p$ と置いた。

ここまでの導出から分かるように、 $\delta \Gamma_\alpha(q^2, s)$ は、質量が $m = \sqrt{s}$ であるような、ゲージボゾンループ由来の vertex 補正因子と酷似している (図 B.1 を参照)。実際、 $g-2$ への寄与という観点では、縦波成分 ($k_\mu k_\nu / k^2$) を含む積分は計算すると 0 になる。このため、 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ を考える上では、ファインマンゲージにおけるゲージボゾンの vertex 補正と等しい *40。一般に、質量が M のゲージボゾンからくる、フェルミオン f の $g-2$ に対する補正 Δa_f は、結合定数を g として

$$\Delta a_f = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)M^2/m^2} \tag{B.10}$$

であることが知られている (導出は教科書 [118] などを参考にせよ)。今回は $g = e, M = \sqrt{s}$ と読み替えればよく、 $g-2$ 補正因子は以下の通りとなる。

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma_\alpha(q^2, s) u(p) \Big|_{q^2 \rightarrow 0} \xrightarrow{g-2} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m^2}. \tag{B.11}$$

*40 $\delta \Gamma_\alpha(q^2, s)$ の縦波成分が消える理由は、次のように理解できる。

まず、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型で、ミューオン $g-2$ 補正を考えたとして。この際、 Z' 伝搬関数の縦波成分は、ゲージに依存するため、観測量である $g-2$ への寄与はない。また、footnote *24 より、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場や NG ボゾンの効果は考えなくて良い。

そこで、式 (5.6) において $m_{Z'}^2 = s$ と読み替えて、ランダウゲージ $\xi = 0$ を取ってみよう。すると縦波成分に注目すれば、

$$\frac{-i}{k^2-s} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \xrightarrow{g-2} 0, \tag{B.9}$$

を得る。ただし、 $\xrightarrow{g-2}$ は左辺に含まれる $g-2$ への寄与を抽出するものとする。この表式の左辺はまさに $\delta \Gamma_\alpha(q^2, s)$ の縦波成分そのものであって、 $g-2$ への寄与が 0 であることが確認できた。

故に、 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ は次の形に帰着できることが分かった。

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon)K(s). \quad (\text{B.12})$$

ここに、 $K(s)$ は Kernel function と呼ばれる関数で、

$$K(s) \equiv \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m^2}, \quad (\text{B.13})$$

として定義された関数である^{*41}。

さて、式 (B.12) は、 $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ が図 B.1のように、解析的な計算が困難な HVP 本体の虚部と、HVP を含まない部分の $g-2$ 因子に分解できることを示している。しかしながら、このままではただ同値変形を施しただけであって、 $\text{Im}\Pi(s+i\epsilon)$ の情報を得られなければ、式変形した意味を為さない。そこで、光学定理を使うことで、HVP の虚部を観測量である $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ 過程の散乱断面積に言い換えることを考える。

図B.3 HVP の虚部と $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ 過程の散乱断面積を結びつける光学定理の模式図。ただし、右辺に現れる電子質量は近似的に落としていたため、左辺には電子の情報は現れない。

今、光学定理を用いると、図 B.3のように、HVP の虚部を $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ 過程の散乱断面積に帰着することができる。実際、等式として以下が成り立つ。

$$\text{Im}\Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon) = -\frac{s}{e^2} \sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s). \quad (\text{B.14})$$

ただし、 σ^0 は bare な散乱断面積を表す^{*42}。

以上より、改めて

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{m_\pi^2}^{\infty} ds \sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)K(s), \quad (\text{B.15})$$

を得る。通常は、散乱断面積の代わりに R-ratio を定義して

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{K(s)}{s} R(s) ds, \quad (\text{B.16})$$

$$R(s) \equiv \frac{\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}; s)}{4\pi\alpha^2/3s}, \quad (\text{B.17})$$

と書くことが多い。

^{*41} この積分を実行後の表式は White Paper [10] を参照されたい。

^{*42} 式 (B.14) の右辺に本来現れる電子質量は、 s より十分小さいため無視してある。そのため、左辺には電子の情報が入っていないことに注意せよ。実際、式 (B.12) より $s > m_\pi^2$ であるため、 $s \gg m_e^2$ であってこの近似は妥当である。

B.2 MUonE 実験の方法

続いて、MUonE 実験の提案 [46, 47] の中で取り上げられている表式 (3.5) を導出する。途中までの式変形は White Ppaer の手法と全く同じであるため、その部分は割愛する。

さて、前節では分散関係式を使うことで次の表式を得た。

$$a_{\mu}^{\text{HVP,LO}} = -\frac{1}{\pi} \int_{m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon) \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m^2}. \quad (\text{B.18})$$

これは式 (B.12) において、 $K(s)$ の中身を陽に示した形である。今、少々唐突ではあるが、変数 $t(x)$ を以下のように定義する。

$$t(x) \equiv -\frac{x^2}{1-x} m^2. \quad (\text{B.19})$$

この変数 $t(x)$ は x の積分範囲が $0 \leq x \leq 1$ なので、その定義から常に負である。さて、 $a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ はこの $t(x)$ を用いて

$$a_{\mu}^{\text{HVP,LO}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \int_{m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{t(x)}{s-t(x)} \text{Im}\Pi_{\text{had}}(s+i\epsilon), \quad (\text{B.20})$$

と書き直すことができる (ただし、 s, x の積分を入れ替えた)。この表式の s 積分に注目すると、繰り込まれた真空偏極の分散関係式 (B.4) 右辺において、 $k^2 \rightarrow t$ と置き換えたものに一致する。故に、分散関係式 (B.4) を逆に使えば、式 (B.12) と異なる以下の表式に帰着できる。

$$a_{\mu}^{\text{HVP,LO}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \Pi_{\text{had,ren}}(t(x)). \quad (\text{B.21})$$

本文でも強調したように、重要なのは式 (B.12) では Π_{had} の引数が正 ($s \geq 0$) であったのに対し、この表式では $\Pi_{\text{had,ren}}$ の引数が負 ($t(x) \leq 0$) であるという点である。この違いによって、ハドロン真空偏極の情報を実験の観測量に置き換える際に、time-like (s-channel) 過程を使うのか、space-like (t-channel) 過程を使うのかの差異になる。

今回は $\Pi_{\text{had,ren}}$ の引数が負 ($t(x) \leq 0$) であるので、対応させる過程は space-like (t-channel) の実験データである。ここで、繰り込まれた真空偏極 Π_{ren} と、有効結合定数 $\alpha_{\text{eff}}(t) = \frac{\alpha}{1-\Delta\alpha(t)}$ の間に

$$\alpha_{\text{eff}}(k^2) = \frac{\alpha}{1-\Pi_{\text{ren}}(k^2)}, \quad (\text{B.22})$$

の対応関係が成り立つことを思い出そう。すなわち $\Pi_{\text{ren}}(k^2) = \Delta\alpha(k^2)$ である *43。

*43 これは次のように確認できる。光子の Full なプロパゲーター (縦波成分は省略)

$$iD_{\mu\nu}(k^2) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2[1-\Pi(k^2)]}, \quad (\text{B.23})$$

は波動関数の繰り込み $Z_3 \equiv 1/(1-\Pi(0))$ と物理的な電荷 $e \equiv \sqrt{Z_3}e_0$ (e_0 は裸の電荷) の導入によって、

$$ie_0^2 D_{\mu\nu}(k^2) \simeq \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \left(\frac{e^2}{1-[\Pi(k^2)-\Pi(0)]} \right), \quad (\text{B.24})$$

と書き直せる。この表式から、右辺括弧の中身が有効結合定数 α_{eff} と解釈でき、式 (B.22) を得る。

厳密には vertex からの補正 $F_1(k^2)$ も $k^2 \neq 0$ ならば考慮した方がよい。ただし、MUonE 実験で測定する t-channel 散乱では、HVP が vertex ループに入るダイアグラムは高次の寄与なので、ここでは無視した。

このうちハドロンの真空偏極 $\Pi_{\text{had,ren}}$ に対応する因子を $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ と表したとすると、最終的な表式として

$$a_{\mu}^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}(t(x)) dx, \quad (\text{B.25})$$

が得られる。これが、MUonE 実験の方法である。

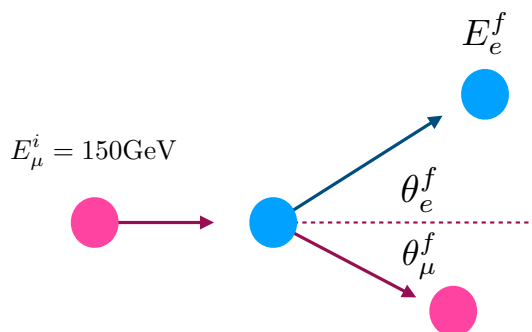
付録 C

Kinematics note

この付録では MUonE 実験の運動学について整理し、適宜本文で提示した公式の導出を行う。

C.1 $\mu e \rightarrow \mu e$ 散乱過程の運動学

本節では MUonE 実験で測定する $\mu - e$ 散乱の運動学についてまとめていく。今回は MUonE 実験に則し、静止した電子と、入射エネルギーが 150 GeV のミューオンによる弾性散乱を考える。もちろん、本稿の計算は質量や入射エネルギーの値を変更すれば、他の $2 \rightarrow 2$ 散乱問題への応用が可能である。



図C.1 (再掲) $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱の概念図及び実験室系における変数。MUonE 実験では、終状態の電子のエネルギー E_e^f は ECAL で、終状態の電子とミューオンの角度 θ_e^f, θ_μ^f はトラックで測定ができる。

C.1.1 準備 1：実験室系における変数

計算前の準備として、記法の整理をしておこう。まずは図 C.1において、 z 軸を入射するミューオン方向にとる。そして、実験室系 (lab-frame) における始状態の変数を、次のように定義する。

$$p_\mu^i = (E_\mu^i, 0, 0, |\mathbf{p}_\mu^i|), \quad (\text{C.1})$$

$$p_e^i = (m_e, 0, 0, 0), \quad (\text{C.2})$$

$$p_{\text{lab}} \equiv p_\mu^i + p_e^i = (E_{\text{lab}}, 0, 0, |\mathbf{p}_{\text{lab}}|). \quad (\text{C.3})$$

ただし、 $E_\mu^i = 150$ GeV である。また、定義から明らかなように、 $E_{\text{lab}} = E_\mu^i + m_e$, $|\mathbf{p}_{\text{lab}}| = |\mathbf{p}_\mu^i|$ である。終状態の変数も $p_\mu^f = (E_\mu^f, \mathbf{p}_\mu^f)$, $p_e^f = (E_e^f, \mathbf{p}_e^f)$ と置いておこう。ここに、始状態と終状態の変数を区別しやす

のように、肩に i, f でラベル付けを施した。

C.1.2 Mandelstam 変数

以下、ローレンツ不変な変数を組んで運動学を調べていく。手始めに Mandelstam 変数は以下の通り。

$$s = (p_\mu^i + p_e^i)^2 = m_\mu^2 + m_e^2 + 2m_e E_\mu^i, \quad (\text{C.4})$$

$$t = (p_\mu^i - p_e^i)^2 = 2m_e^2 - 2m_e E_e^f. \quad (\text{C.5})$$

本文でも述べたように、特に t は MUonE 実験で探索可能な $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ の範囲を決定するため重要な変数である。また、 \sqrt{s} は系の重心エネルギーに対応し、MUonE 実験の設定では $\sqrt{s} \simeq 406$ MeV 程度である。

C.1.3 電子の散乱角とエネルギーの関係式

続いて電子の散乱角 θ_e^f と終状態のエネルギー E_e^f の関係を導出する。今、エネルギー運動量保存より、 $p_\mu^{f2} = (p_{\text{lab}} - p_e^f)^2$ が成り立つ。ここに on-shell 条件 $p_\mu^{f2} = m_\mu^2$, $p_e^{f2} = m_e^2$ を代入し、

$$m_\mu^2 = p_{\text{lab}}^2 + m_e^2 - 2E_{\text{lab}}E_e^f + 2|\mathbf{p}_{\text{lab}}||\mathbf{p}_e^f| \cos\theta_e^f, \quad (\text{C.6})$$

さらにこれを $\cos\theta_e^f$ について解くと、以下の関係式を得る。

$$\cos\theta_e^f = \frac{E_{\text{lab}}E_e^f - m_e}{|\mathbf{p}_{\text{lab}}||\mathbf{p}_e^f|}. \quad (\text{C.7})$$

ただし、途中 $p_{\text{lab}}^2 = s = m_\mu^2 + m_e^2 + 2m_e E_\mu^i$ や、 $E_\mu + m_e = E_{\text{lab}}$ を使って式を整頓した。右辺の E_{lab} , $|\mathbf{p}_{\text{lab}}|$ は入射ミューオンのエネルギー E_μ^i だけで決まるから、今導いた式 (C.7) は電子の散乱角 θ_e^f と終状態のエネルギー E_e^f の関係を意味する。

これをより見やすくするために、 $|\mathbf{p}_{\text{lab}}| = |\mathbf{p}_\mu^i| = \sqrt{E_\mu^{i2} - m_\mu^2}$, $|\mathbf{p}_e^f| = \sqrt{E_e^{f2} - m_e^2}$ を使って、 $|\mathbf{p}|$ を消去してみよう。

$$\theta_e^f = \arccos \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{E_e^f - m_e}{E_e^f + m_e}}. \quad (\text{C.8})$$

ここに、 $\beta \equiv |\mathbf{p}_{\text{lab}}|/E_{\text{lab}} (= \sqrt{E_\mu^{i2} - m_\mu^2}/(E_\mu^i + m_e))$ を定義した^{*44}。また、 E_e^f について式 (C.8) を逆に解くと

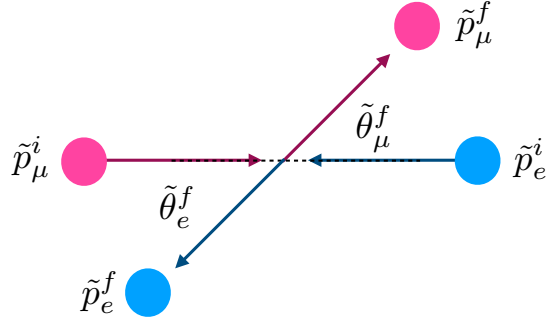
$$E_e^f = m_e \frac{1 + \beta^2 \cos^2\theta_e^f}{1 - \beta^2 \cos^2\theta_e^f}. \quad (\text{C.9})$$

を得る。これが本文で紹介した公式 (4.1) である。

C.1.4 準備 2：重心系における変数

ここまで実験室系の変数のみで計算してきたが、重心系の変数を用いると計算が楽に行える場合がある。そこで実験室系の変数 p_μ^i, p_e^i をブーストして、重心系の変数 $\tilde{p}_\mu^i, \tilde{p}_e^i$ を以下のように導入する (図 C.2)。

^{*44} 後でC.1.4節で導入するが、 β は重心系へのブーストパラメータである。特に、今回のような静止標的の問題の場合は、 β は入射する粒子のエネルギーで値が決まる。



図C.2 $\mu e \rightarrow \mu e$ 弾性散乱の概念図及び重心系における変数。実験室系と区別するために、 $\tilde{\cdot}$ をつけている。

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\mu^i \\ |\mathbf{p}_\mu^i| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_\mu^i - \beta\gamma |\mathbf{p}_\mu^i| \\ -\beta\gamma E_\mu^i + \gamma |\mathbf{p}_\mu^i| \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{E}_\mu^i \\ |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^i| \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_e \\ -\beta\gamma m_e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{E}_e^i \\ -|\tilde{\mathbf{p}}_e^i| \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

また、終状態の変数も $\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f = (\tilde{E}_\mu^f, \tilde{\mathbf{p}}_\mu^f)$, $\tilde{\mathbf{p}}_e^f = (\tilde{E}_e^f, \tilde{\mathbf{p}}_e^f)$ と置いておく*45。ただし、 β, γ はブーストパラメータで、重心系の変数は実験室系のそれらと区別するために $\tilde{\cdot}$ を付けてある。重心系では $|\tilde{\mathbf{p}}_e^i| = |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^i|$ が成り立つから、この条件からブーストパラメータが

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}_\mu^i|}{E_\mu^i + m_e} \left(= \frac{|\mathbf{p}_{\text{lab}}|}{E_{\text{lab}}} \right), \quad (\text{C.12})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_{\text{lab}}}{s}, \quad (\text{C.13})$$

で与えられることが確認できる。MUonE 実験では $E_{\text{lab}} \simeq 150 \text{ GeV}$, $\sqrt{s} = 406 \text{ MeV}$ なので、代入して具体的な数値を求めると以下ようになる*46。

$$\gamma = 369.5, \quad (\text{C.14})$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - 3.65 \times 10^{-6}, \quad (\text{C.15})$$

また、重心系では $|\tilde{\mathbf{p}}_e^i| = |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^i| \equiv |\tilde{\mathbf{p}}|$ と置いた時、これは次のように書けることが知られている。

$$|\tilde{\mathbf{p}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_\mu^2, m_e^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (\text{C.16})$$

ただし、 $\lambda(a, b, c) \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$ と置いた。この公式は、重心系におけるエネルギー保存の式 $\sqrt{s} = \sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}|^2 + m_\mu^2} + \sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}$ を $|\tilde{\mathbf{p}}|$ について解くと書き下せる。

*45 $\tilde{E}_e^f, \tilde{E}_\mu^f$ は、重心系からみたエネルギーであって、重心のエネルギーとは区別すること。むしろ、相対運動に関するエネルギーである。

*46 今回ミューオンは相対論的なので、 $\beta = \sqrt{E_{\text{lab}}^2 - |\mathbf{p}_{\text{lab}}|^2} / E_{\text{lab}} \simeq 1 - |\mathbf{p}_{\text{lab}}|^2 / 2E_{\text{lab}}^2$ の展開による計算は、かなり精度が悪いので注意せよ。

C.1.5 電子の散乱角とミューオンの散乱角の関係式

本節では、重心系の変数を利用し、実験室系における電子の散乱角 θ_e^f と、ミューオンの散乱角 θ_μ^f の間に成り立つ関係式を導く。まずは、重心系における電子の散乱角 $\tilde{\theta}_e^f$ と、ミューオンの散乱角 $\tilde{\theta}_\mu^f$ の間に成り立つ、自明な関係式から出発しよう。

$$\tilde{\theta}_\mu^f = \pi - \tilde{\theta}_e^f. \quad (\text{C.17})$$

これを実験室系の言葉に翻訳したい。そのためには、重心系における散乱角 $\tilde{\theta}_e^f, \tilde{\theta}_\mu^f$ と実験室系の散乱角 θ_e^f, θ_μ^f の間に成り立つ関係式をそれぞれ知る必要がある。

$$\begin{array}{ccc} \tan \theta_\mu^f & \overset{\textcircled{1}}{\longleftrightarrow} & \tilde{\theta}_\mu^f \\ & & \updownarrow \text{自明な関係式(重心系)} \\ & & \tilde{\theta}_\mu^f = \pi - \tilde{\theta}_e^f \\ & & \updownarrow \\ \tan \theta_e^f & \overset{\textcircled{2}}{\longleftrightarrow} & \tilde{\theta}_e^f \end{array}$$

図C.3 電子の散乱角とミューオンの散乱角の関係式を導出する上での方針。 $\tan \theta_\mu^f$ と $\tilde{\theta}_\mu^f$ の関係 (①) と、 $\tan \theta_e^f$ と $\tilde{\theta}_e^f$ の関係 (②) がわかれば、自明な関係式 (C.17) を経由して、実験室系における散乱角の関係式を導くことができる。

方針として、図 C.3に示した通り、まずは $\tan \theta_\mu^f$ を重心系における角度 $\tilde{\theta}_\mu^f$ で表す。同様に $\tan \theta_e^f$ も $\tilde{\theta}_e^f$ で表す。そして最後に二つの関係式と、自明な関係式 (C.17) を連立し、実験室系における関係式を導く。

手始めに、図 C.2において入射軸 (z 軸) に平行な運動量成分を考える。重心系と実験系は互いにブーストで関連づくから、運動量の入射軸成分は以下の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_\mu^f| \cos \theta_\mu^f &= \gamma \left(|\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f| \cos \tilde{\theta}_\mu^f + \beta \tilde{E}_\mu^f \right) \\ &= \gamma |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f| \left(\cos \tilde{\theta}_\mu^f + \frac{\beta}{\tilde{\beta}_\mu^f} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

ここに、 β, γ は重心系と実験室系を結ぶブーストパラメータで、既にC.1.4節で導入済みである。また、 $\tilde{\beta}_\mu^f \equiv |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f| / \tilde{E}_\mu^f$ は重心系における終状態のミューオンの速度を意味する。一方、衝突軸に垂直な運動量成分は、衝突軸のブーストに対して不変であって、

$$|\mathbf{p}_\mu^f| \sin \theta_\mu^f = |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f| \sin \tilde{\theta}_\mu^f, \quad (\text{C.19})$$

を満たす。そして、式 (C.18) と式 (C.19) の各辺での比を取ると、欲しかった $\tan \theta_\mu^f$ と $\tilde{\theta}_\mu^f$ の間に成り立つ関係式

$$\tan \theta_\mu^f = \frac{\sin \tilde{\theta}_\mu^f}{\gamma \left(\cos \tilde{\theta}_\mu^f + \beta / \tilde{\beta}_\mu^f \right)}, \quad (\text{C.20})$$

を得る。特に、今回の $2 \rightarrow 2$ 散乱の問題では、 $|\tilde{\mathbf{p}}_\mu^f| = |\tilde{\mathbf{p}}_\mu^i|$ なので、 $\tilde{\beta}_\mu^f = \tilde{\beta}_\mu^i$ である。また、同様に $\tan \theta_e^f$ と

$\tilde{\theta}_e^f$ に関して、

$$\tan \theta_e^f = \frac{\sin \tilde{\theta}_e^f}{\gamma (\cos \tilde{\theta}_e^f + 1)}, \quad (\text{C.21})$$

を得る。ただし、始状態の電子は静止していたから、 $\tilde{\beta}_e^f = \beta$ が成り立つことを使った。

以上で準備は整ったので、いよいよ実験室系における電子の散乱角 θ_e^f と、ミューオンの散乱角 θ_μ^f の公式の導出に取り掛かりたい。計算の前に便利のため、 $R \equiv \beta / \tilde{\beta}_\mu^i$ と置いておいておこう*47。さて、少々天下り的ではあるが、結論から先に言うと次の関係式が成り立つ。

$$\tan \theta_\mu^f = \frac{2 \tan \theta_e^f}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_e^f)(1 + R) - 2}. \quad (\text{C.22})$$

実際、これは式 (C.20) や式 (C.21) を代入することで確認できる。もちろん、式 (C.20) から出発し、図 C.3に従って変数同士の関係を代入しても以下の変形を経て示すことができる。

$$\begin{aligned} \tan \theta_\mu^f &= \frac{\sin \tilde{\theta}_\mu^f}{\gamma (\cos \tilde{\theta}_\mu^f + R)} = \frac{\sin \tilde{\theta}_e^f}{\gamma (-\cos \tilde{\theta}_e^f + R)} \\ &= \frac{\sin \tilde{\theta}_e^f}{\gamma (\cos \tilde{\theta}_e^f + 1)} \frac{(1 + \cos \tilde{\theta}_e^f)}{(1 + R) - (1 + \cos \tilde{\theta}_e^f)} \\ &= \frac{2 \tan \theta_e^f}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_e^f)(1 + R) - 2}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

ただし、二つ目の等号で式 (C.17) を、最後の等号で式 (C.21) を用いた*48。そしてこの結果は、本文の式 (4.2) に他ならない。

最後に $R \equiv \beta / \tilde{\beta}_\mu^i$ については、以下のように書き換えることができる。

$$R \equiv \frac{E_\mu^i m_e + m_\mu^2}{E_\mu^i m_e + m_e^2}. \quad (\text{C.25})$$

ただし、相対論的な速度の加算公式

$$\tilde{\beta}_\mu^i = \frac{\beta_\mu^i - \beta}{1 - \beta \beta_\mu^i} = \frac{m_e |\mathbf{p}_\mu^i|}{E_\mu^i m_e + m_\mu^2}, \quad (\text{C.26})$$

及び、 $\beta = \frac{|\mathbf{p}_\mu^i|}{E_\mu^i + m_e}$ を使った。

*47 既に述べたが、 $\tilde{\beta}_\mu^f = \tilde{\beta}_\mu^i$ であった。

*48 式 (C.21) から、

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \cos \tilde{\theta}_e^f} &= \frac{2(1 + \cos \tilde{\theta}_e^f)}{(1 + \cos \tilde{\theta}_e^f)^2} = 1 + \left(\frac{\sin \tilde{\theta}_e^f}{1 + \cos \tilde{\theta}_e^f} \right)^2 \\ &= (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_e^f), \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

が成り立つことを先に確認しておくが良い。

C.1.6 MUonE 実験における t の探索範囲

さて、表式 (C.9) から、 E_e^f が $\cos^2 \theta_e^f$ に関して単調増加し、運動学的に許される値域

$$m_e \leq E_e^f \leq m_e \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (\text{C.27})$$

が存在することが理解できる。今回の設定では $\beta \simeq 1 - 3.65 \times 10^{-6}$ だから、電子のエネルギーの最大値 $E_e^f|_{\max}$ は $E_e^f|_{\max} \simeq 139.8$ GeV 程度である。これと既に求めた $t = 2m_e^2 - 2m_e E_e^f$ を合わせると、 E_e^f によって探索できる t が運動学的に以下の範囲に限定される^{*49}。

$$-0.143 \text{ GeV}^2 \lesssim t \lesssim 0 \text{ GeV}^2. \quad (\text{C.28})$$

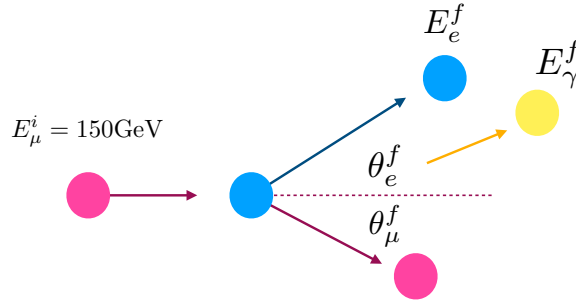
この制限の存在は、重心系で見るとより明らかとなる。実際、 $t = (p_e^i - p_e^f)^2$ の範囲は、重心系では自然に

$$(\tilde{p}_e^i - \tilde{p}_e^f)^2|_{\tilde{\theta}_e^f=\pi} \leq t \leq (\tilde{p}_e^i - \tilde{p}_e^f)^2|_{\tilde{\theta}_e^f=0}, \quad (\text{C.29})$$

であることが理解できる。これは成分で書くと、 $-2|\tilde{p}_e^i| \leq t \leq 0$ を意味する。今、式 (C.16) より、 $|\tilde{p}_e^i| = \lambda^{1/2}(s, m_\mu^2, m_e^2)/2\sqrt{s}$ だから、ここに $s = (406 \text{ MeV})^2$ を代入すると、実験室系の議論と同じ t の制限を得る。

C.2 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程の運動学

本節では、本論文のメインパートである第6章において、背景事象として考慮した制動放射 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程の運動学についてまとめていく。また、本文では省略した公式の導出も行う。



図C.4 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程の概念図及び実験室系における変数。MUonE 実験では、終状態の電子、及び光子のエネルギー E_e^f, E_γ^f は ECAL で、終状態の電子とミュオンとの角度 θ_e^f, θ_μ^f はトラックで測定ができる。

C.2.1 準備：実験室系における変数

計算前の準備として、変数と記法を導入しておく。まず始状態は、 $\mu - e$ 散乱の時と変わらないため、同じ運動量変数を用いればよい。次に終状態についても、それぞれ粒子の運動量を $p_\mu^f = (E_\mu^f, \mathbf{p}_\mu^f)$, $p_e^f =$

^{*49} β を変数とした時、 E_e^f の最大値は β に関して単調増加する。 β は入射ミュオンのエネルギーだけで決まるので、入射ビームのエネルギーが強い程、ナイーブには探索できる t の範囲は広がると言える。

$(E_e^f, \mathbf{p}_e^f), p_\gamma^f = (E_\gamma^f, \mathbf{p}_\gamma^f)$ と表記すれば良い。ここで、新たな変数として

$$E_{e\gamma}^f \equiv (E_e^f + E_\gamma^f), \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{p}_{e\gamma}^f \equiv (\mathbf{p}_e^f + \mathbf{p}_\gamma^f), \quad (\text{C.31})$$

$$m_{e\gamma} \equiv \sqrt{(p_e^f + p_\gamma^f)^2}, \quad (\text{C.32})$$

を導入する。これらの変数は、soft photon 極限 $E_\gamma^f \rightarrow 0$ では $m_{e\gamma} \rightarrow m_e$, $E_{e\gamma}^f \rightarrow E_e^f$ であって、単に $\mu - e$ 散乱の時の変数へ帰着される。

C.2.2 $E_{e\gamma}^f$ の最小値

ここでは、本文中 (6.2節) の議論で用いた、 $E_{e\gamma}^f$ の最小値に関する性質を証明する。その性質とは、 $(\theta_\mu^f$ を固定した元で) $E_{e\gamma}^f$ の最小値が $E_{e,\text{elastic}}^f$ に一致することである。ただし、弾性散乱時の電子のエネルギーを $E_{e,\text{elastic}}^f$ と記した。そのためには、 $E_\gamma^f = 0$ で最小値をとる $m_{e\gamma}^2$ を利用すれば良い。さて、 $m_{e\gamma}^2$ について、

$$\begin{aligned} m_{e\gamma}^2 &= (p_e^f + p_\gamma^f + p_\mu^f - p_\mu^f)^2 \\ &= s + m_\mu^2 - 2(p_e^f + p_\gamma^f + p_\mu^f) \cdot p_\mu^f, \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

と展開できるが、これを重心系から見ると

$$m_{e\gamma}^2 = s + m_\mu^2 - 2\sqrt{s}\tilde{E}_\mu^f \quad (\text{C.34})$$

とシンプルに表せる。 θ_μ^f を固定して考えると、この式から「 $m_{e\gamma}^2$ が最小」 \Leftrightarrow 「 E_μ^f が最大」であることが分かる。さらにエネルギー保存から、「 E_μ^f が最大」 \Leftrightarrow 「 $E_{e\gamma}^f$ が最小」である。以上より、「 $m_{e\gamma}^2$ が最小」 \Leftrightarrow 「 $E_{e\gamma}^f$ が最小」が結論づけられる。

$m_{e\gamma}^2$ は $E_\gamma^f = 0$ で最小値 m_e^2 を取るのだったから、本文中で主張した通り、電子と光子のエネルギーの和は、 $E_{e\gamma}^f \geq E_{e,\text{elastic}}^f$ のように下から抑えることができる。ただし、等号は $E_\gamma^f = 0$ のときに成立する。

C.2.3 光子の角度 θ_γ^f の最大値

続いて、光子の角度 θ_γ^f の最大値について議論する。まず、 $\mu e \rightarrow \mu e \gamma$ 過程では、エネルギー運動量保存より、終状態の電子と光子の運動量の和 $\mathbf{p}_{e\gamma}^f \equiv \mathbf{p}_e^f + \mathbf{p}_\gamma^f$ が、終状態のミューオンのエネルギー E_μ^f と角度 θ_μ^f で決まることに注意しよう。これは即ち、電子と光子の間のなす角度 $\theta_{e\gamma}^f$ は E_μ^f, θ_μ^f で決定できることを意味する。

今、二つの運動量ベクトル \mathbf{p}_γ^f と $\mathbf{p}_{e\gamma}^f$ の間の角度 $\theta_{e\gamma,\gamma}^f$ は

$$\cos \theta_{e\gamma,\gamma}^f = \frac{2E_{e\gamma}^f E_e^f + m_e^2 - m_{e\gamma}^2}{2|\mathbf{p}_{e\gamma}^f| E_\gamma^f}, \quad (\text{C.35})$$

で表すことができる^{*50}。さて、 $m_{e\gamma}^2 \geq m_e^2$ なので、 $\theta_{e\gamma,\gamma}^f$ は E_γ^f が最小の時最大となる。これは言い換えれば E_e^f が最大の時最大になるということである。

^{*50} これは実際、以下の展開を $\cos \theta_{e\gamma,\gamma}^f$ について解けば、確認できる。

$$\begin{aligned} m_e^2 &= (p_{e\gamma}^f - p_\gamma^f)^2 \\ &= m_{e\gamma}^2 - 2E_{e\gamma}^f E_\gamma^f + 2|\mathbf{p}_{e\gamma}^f| E_\gamma^f \cos \theta_{e\gamma,\gamma}^f. \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

この最大値 $\theta_{e\gamma,\gamma}^{f,(\max)}$ は、 E_μ^f と θ_μ^f を固定した元での θ_γ^f の上限を決める。つまり、 $\theta_\gamma^f < \theta_{e\gamma,\gamma}^{f,(\max)} + \theta_{e\gamma}$ が成り立つ^{*51}。以上より、 θ_γ^f には最大値が存在することが言えた。

6.2節でも言及した通り、選択基準 (i) $\theta_\mu^f > 1.5$ mrad、(ii) $1 \text{ GeV} < E_e^f < 25 \text{ GeV}$ の両方を満たす場合は、 $\theta_\gamma^f \leq 6$ mrad 程度であり、光子は ECAL に必ず入る。

^{*51} これは次のように確認できる。考えられる場合分けとして、(a) $\theta_e^f < \theta_\gamma^f$ と (b) $\theta_e^f > \theta_\gamma^f$ のパターンがあるが、(a) の場合は $\theta_\gamma^f = \theta_{e\gamma,\gamma}^f + \theta_{e\gamma}^f$ が成り立つ。今、冒頭でも述べたように、 E_μ^f と θ_μ^f を固定すれば $\theta_{e\gamma}^f$ は一意に決まる。故に光子の角度 θ_γ^f を、 $\theta_{e\gamma,\gamma}^{f,(\max)}$ で上からおさえることが可能である ($\theta_\gamma^f \leq \theta_{e\gamma,\gamma}^{f,(\max)} + \theta_{e\gamma}^f$)。 (b) は光子の角度が電子の角度より小さいので、最大値を考える上では (a) のみを考えれば良い。

付録 D

minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型

第5章で導入した $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を持つ模型の一例として、minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型 [33,97-99] がある。この模型は SM の単純な拡張ながら、ミューオン $g-2$ の文脈以外にもニュートリノの質量やニュートリノ振動など様々な現象と関係し興味深い。この付録では minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型についてニュートリノセクターとの関連に焦点を当てつつ、簡単にまとめていく。

D.1 模型の導入

minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型とは、SM を $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性で拡張し、さらに右巻きニュートリノ 3 世代と $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場 σ を一つ導入した模型である。右巻きニュートリノの導入によって、最小限の拡張ながら、ニュートリノの質量やニュートリノ振動を説明可能な点が特徴である。各粒子への $U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷の割り当ては、表 D.1 の通りである。

場	$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, e_R, N_e$	$L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \mu_R, N_\mu$	$L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \mu_L \end{pmatrix}, \tau_R, N_\tau$	σ	others
$U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷	0	+1	-1	+1	0

表D.1 minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型における各場の $U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷。 $e_{R,L}, \mu_{R,L}, \tau_{R,L}$ は左、右巻きの荷電レプトン、 ν_e, ν_μ, ν_τ は左巻きニュートリノ、 N_e, N_μ, N_τ は右巻きニュートリノ、 σ は $U(1)_{\mu-\tau}$ を破るスカラー場である。

即ち、 μ フレーバーを持つ粒子に +1 を、 τ フレーバーを持つ粒子に -1 を、そして、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場 σ には +1 を割り当てる。その他の粒子は $U(1)_{\mu-\tau}$ 電荷を持たない。この対称性の元、minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutrino}} = & -\lambda_e N_e^c (L_e \cdot H) - \lambda_\mu N_\mu^c (L_\mu \cdot H) - \lambda_\tau N_\tau^c (L_\tau \cdot H) \\ & - \frac{1}{2} M_{ee} N_e^c N_e^c - M_{\mu\tau} N_\mu^c N_\tau^c - \lambda_{e\mu} \sigma N_e^c N_\mu^c - \lambda_{e\mu} \sigma^* N_e^c N_\tau^c + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

で与えられる。ただし、全体のラグランジアンのうち、ニュートリノセクターの部分のみ表記した。また、 $L_i = (L_e, L_\mu, L_\tau)$ は各フレーバーのレプトン doublet で、 $N_i = (N_e, N_\mu, N_\tau)$ は右巻きニュートリノ、 H はヒッグス場で、 σ は $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場である。

D.2 ニュートリノ質量行列とパラメータへの制限

ヒッグス場 H と $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性を破るスカラー場 σ が真空期待値を獲得した後、 $\mathcal{L}_{\text{neutrino}}$ から、以下のようにニュートリノの質量項が現れる。

$$\mathcal{L}_{\nu, \text{mass}} = -\frac{1}{2} \left(\nu^T, (N^c)^T \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_D \\ \mathcal{M}_D^T & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ N^c \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

ここに、Dirac 質量行列 \mathcal{M}_D 、及び Majorana 行列 \mathcal{M}_R は

$$\mathcal{M}_D = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_R = \begin{pmatrix} M_{ee} & \lambda_{e\mu} \langle \sigma \rangle & \lambda_{e\tau} \langle \sigma \rangle \\ \lambda_{e\mu} \langle \sigma \rangle & 0 & M_{\mu\tau} \\ \lambda_{e\tau} \langle \sigma \rangle & M_{\mu\tau} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

で与えられる。ただし、 H, σ の真空期待値をそれぞれ $v, \langle \sigma \rangle$ とおいた。

今、Majorana 質量行列が Dirac 質量行列と比べて非常に大きい $\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \ll 1$ 状況を仮定する。この状況下において式 (D.2) の質量項をブロック対角化してみよう。

$$\mathcal{L}_{\nu, \text{mass}} = -\frac{1}{2} \left(\nu'^T, (N^{c'})^T \right) \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\nu_L} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu' \\ N^{c'} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

ここに、軽いニュートリノと、重いニュートリノの質量行列はそれぞれ

$$\mathcal{M}_{\nu_L} \simeq -\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \mathcal{M}_D^T \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{M}_N \simeq \mathcal{M}_R \quad (\text{D.6})$$

であることが確認できる^{*52}。最初に置いた仮定 $\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \ll 1$ より、軽いニュートリノは重いニュートリノと比較して著しく軽い (Type-I seesaw 機構 [119–122])。

さて、今興味があるのは軽いニュートリノの質量行列 $\mathcal{M}_{\nu_L} \simeq -\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \mathcal{M}_D^T$ である。 \mathcal{M}_{ν_L} は Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata 行列 (PMNS 行列) [123, 124] と呼ばれるユニタリ行列 U_{PMNS} を用いて次のように対角化可能である^{*53}。

$$U_{\text{PMNS}}^T \mathcal{M}_{\nu_L} U_{\text{PMNS}} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3). \quad (\text{D.9})$$

ここに、 U_{PMNS} の中身は

$$U_{\text{PMNS}} = VP \quad (\text{D.10})$$

$$V \equiv \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} & \\ & & e^{i\frac{\alpha_3}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

^{*52} 元のブロック行列の対角和と行列式はそれぞれ

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_D \\ \mathcal{M}_D^T & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} = \text{Tr}(\mathcal{M}_R), \quad (\text{D.7})$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_D \\ \mathcal{M}_D^T & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} = \det(\mathcal{M}_R) \det(-\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \mathcal{M}_D^T), \quad (\text{D.8})$$

である。ブロック対角化の操作の前で、対角和と行列式は等しいはずだから、 $(\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1})^2$ を無視する近似では、 $\mathcal{M}_{\nu_L}, \mathcal{M}_N$ が本文の通りとなる。(ただし、 $\mathcal{M}_{\nu_L}, \mathcal{M}_N$ を相似変換する自由度が残るので一意には決まらない。)

^{*53} 複素対称行列 M は、ユニタリ行列 U とその転置行列 U^T ではさむことによって対角化可能である (Autonne-Takagi 分解 [125, 126])。その際、 $U^T M U$ の対角成分は全て正の実数にとることができる。

で与えられる。ここに、 s_{ij}, c_{ij} は $\sin \theta_{ij}, \cos \theta_{ij}$ の略記であり、 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ は各世代同士の混合角、 δ は Dirac 位相、 α_2, α_3 は Majorana 位相である。

ニュートリノ振動の観測によって、軽いニュートリノは混合角が測定されているため^{*54}、 $\mathcal{M}_{\nu L}$ を構成するパラメータはこの測定値から制限を受ける。例えば、仮に $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性が破れない $\langle \sigma \rangle = 0$ とすると、 $\mathcal{M}_{\nu L} \simeq -\mathcal{M}_D \mathcal{M}_R^{-1} \mathcal{M}_D^T$ において、 \mathcal{M}_D が対角、かつ \mathcal{M}_R がブロック対角となるため、ニュートリノ振動における各世代の混合を説明できない。このため、観測結果から自ずと $\langle \sigma \rangle \neq 0$ が決まる^{*55}。

対称性による制限を明らかにするために、 $\mathcal{M}_{\nu L}$ の逆行列を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu L}^{-1} &= U_{\text{PMNS}} \text{diag}(m_1, m_2, m_3) U_{\text{PMNS}}^T \\ &\simeq -(\mathcal{M}_D^{-1})^T \mathcal{M}_R \mathcal{M}_D^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

さて、 \mathcal{M}_D は対角行列で \mathcal{M}_R は (μ, μ) 成分、及び (τ, τ) 成分が 0 だったから、一行目右辺も (μ, μ) 成分、及び (τ, τ) 成分が 0 でなければならない。これは二つの複素の条件式

$$\frac{1}{m_1} V_{\mu 1}^2 + \frac{1}{m_2} V_{\mu 2}^2 e^{i\alpha_2} + \frac{1}{m_3} V_{\mu 3}^2 e^{i\alpha_3} = 0, \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{1}{m_1} V_{\tau 1}^2 + \frac{1}{m_2} V_{\tau 2}^2 e^{i\alpha_2} + \frac{1}{m_3} V_{\tau 3}^2 e^{i\alpha_3} = 0, \quad (\text{D.15})$$

として書き下せる。ただし、 $V_{\alpha i}$ は式 (D.11) で定義される行列で、 α はフレーバーの添字、 i は質量固有状態の添字を意味する。この二つの条件式を $e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}$ について解くと、

$$e^{i\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1} R_2(\delta), \quad (\text{D.16})$$

$$e^{i\alpha_3} = \frac{m_3}{m_1} R_3(\delta), \quad (\text{D.17})$$

の形となる。ここに、 R_2, R_3 は $V_{\alpha i}$ の関数、即ち混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ と、Dirac 位相 δ の関数である。ここでは混合角は既知とし、 δ の関数として表記した^{*56}。さて、方程式を解いて得られた式 (D.16), (D.17) は、Majorana 位相 α_2, α_3 と Dirac 位相 δ を関連づけるだけでなく、両辺の絶対値をとることで δ そのものを決定する条件式

$$1 = \frac{m_2}{m_1} |R_2(\delta)|, \quad 1 = \frac{m_3}{m_1} R_3(\delta), \quad (\text{D.20})$$

に帰着できる。我々はニュートリノ振動実験によって各世代の質量の二乗差 $\delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$, $\Delta m^2 \equiv m_3^2 - (m_2^2 + m_1^2)/2$ を知っているので、これらを導入することで δ, m_1 に関する連立方程式

$$\delta m^2 = m_1^2 \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1 \right) = m_1^2 \left(\frac{1}{|R_2(\delta)|^2} - 1 \right), \quad (\text{D.21})$$

$$\Delta m^2 + \frac{\delta m^2}{2} = m_1^2 \left(\frac{m_3^2}{m_1^2} - 1 \right) = m_1^2 \left(\frac{1}{|R_3(\delta)|^2} - 1 \right), \quad (\text{D.22})$$

*54 最新のニュートリノ振動の観測結果は nu-fit <http://www.nu-fit.org/?q=node/12> で閲覧可能である。また、文献 [127] も参照すると良い。

*55 後でも触れるが、 \mathcal{M}_R がブロック対角にならないためには条件 $\langle \sigma \rangle \neq 0$ では不十分であり、 \mathcal{M}_R の各成分が同程度 $\lambda_{\alpha\beta} \langle \sigma \rangle \sim M_{\alpha\beta}$ である必要がある。

*56 R_2, R_3 の具体形は以下の通り。

$$R_2(\delta) \equiv \frac{(V_{\mu 1} V_{\tau 3} + V_{\mu 3} V_{\tau 1}) V_{e 2}^*}{(V_{\mu 2} V_{\tau 3} + V_{\mu 3} V_{\tau 2}) V_{e 1}^*}, \quad (\text{D.18})$$

$$R_3(\delta) \equiv \frac{(V_{\mu 1} V_{\tau 2} + V_{\mu 2} V_{\tau 1}) V_{e 3}^*}{(V_{\mu 2} V_{\tau 3} + V_{\mu 3} V_{\tau 2}) V_{e 1}^*}. \quad (\text{D.19})$$

を得る。これを解くと δ, m_1 が求められる。既に二乗差は導入してあるから、結局混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ と、質量の二乗差 $\delta m^2, \Delta m^2$ から、 m_1, m_2, m_3, δ が対称性の条件から決定されることになる。

続いて式 (D.16), (D.17) の位相部分に注目すると、

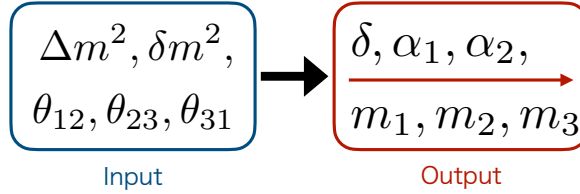
$$\alpha_2 = \text{Arg} \left[\frac{m_2}{m_1} R_2(\delta) \right], \quad \alpha_3 = \text{Arg} \left[\frac{m_3}{m_1} R_3(\delta) \right], \quad (\text{D.23})$$

のように、 δ から α_2, α_3 を導出できる。

以上より、軽いニュートリノの質量行列

$$\mathcal{M}_{\nu_L} = U_{\text{PMNS}}^* \text{diag}(m_1, m_2, m_3) U_{\text{PMNS}}^{-1}, \quad (\text{D.24})$$

を構成するパラメータを、インプットパラメータ $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta m^2, \Delta m^2$ のみから全て決定することができた (図 D.1)。特に、Dirac 位相 δ は観測結果に対する予言値となる。この、対称性からくる予言性の高さが minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型の特徴の一つである。



図D.1 軽いニュートリノの質量行列 \mathcal{M}_{ν_L} を構成するパラメーター一覧と、minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型における Input パラメータと Output パラメータの分類。minimal gauged $U(1)_{\mu-\tau}$ 模型では、混合角と質量の二乗差 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta m^2, \Delta m^2$ から、Dirac 位相 δ 及び、一番小さい質量固有値 m_1 を導出できる。さらに、 δ を起点に二つの Majorana 位相 α_2, α_3 (Output の上段) を、 m_1 を起点にその他の質量固有値 m_2, m_3 (Output 下段) をそれぞれ決定できる。

最後に、以上の結果は $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性が破れるスケール $\langle \sigma \rangle$ 、及び Majorana 質量スケール $M_{ee}, M_{\mu\tau}$ には依らないことに注意しよう。実際、対称性の要請からくる条件式にはこれらのスケールは現れてこなかった。

ただし、ニュートリノ振動の結果を再現するには、 \mathcal{M}_R がブロック対角として振る舞っては困るので、 \mathcal{M}_R の各成分が同程度、つまり $\lambda_{\alpha\beta} \langle \sigma \rangle \sim M_{\alpha\beta}$ である必要がある。これは、右巻きニュートリノの質量固有値 M_i と、 $U(1)_{\mu-\tau}$ ゲージ対称性が破れるスケール $\langle \sigma \rangle$ の間に

$$\lambda_{\alpha\beta} \langle \sigma \rangle \sim M_i, \quad (\text{D.25})$$

が成り立つことを意味する。通常レプトジェネシスの文脈では、右巻きニュートリノの質量を十分重く設定するため、 $\langle \sigma \rangle$ のスケールも 10^{13-15} GeV 程度となる [99]。一方、ミューオン $g-2$ を説明する動機の前では、本文でも述べたように典型的な BSM スケールが $g_{Z'}/150 \text{ GeV}$ 程度なので、 $\langle \sigma \rangle$ は電弱スケール 10^2 GeV 程度となる。

参考文献

- [1] **Muon g-2** Collaboration, B. Abi *et al.*, *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm*, *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021) 141801, arXiv:2104.03281 [hep-ex].
- [2] G. Abbiendi *et al.*, *Letter of Intent: the MUonE project*, Jun, 2019.
<https://cds.cern.ch/record/2677471>.
- [3] R. Foot, *New Physics From Electric Charge Quantization?*, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 527–530.
- [4] X. G. He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas, *NEW Z-prime PHENOMENOLOGY*, *Phys. Rev. D* **43** (1991) 22–24.
- [5] X.-G. He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas, *Simplest Z-prime model*, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 2118–2132.
- [6] R. Foot, X. G. He, H. Lew, and R. R. Volkas, *Model for a light Z-prime boson*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 4571–4580, arXiv:hep-ph/9401250.
- [7] K. Asai, K. Hamaguchi, N. Nagata, S.-Y. Tseng, and J. Wada, *Probing the L_μ - L_τ Gauge Boson at the MUonE Experiment*, arXiv:2109.10093 [hep-ph].
- [8] **Muon g-2** Collaboration, G. W. Bennett *et al.*, *Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 072003, arXiv:hep-ex/0602035.
- [9] M. Abe *et al.*, *A New Approach for Measuring the Muon Anomalous Magnetic Moment and Electric Dipole Moment*, *PTEP* **2019** (2019) 053C02, arXiv:1901.03047 [physics.ins-det].
- [10] T. Aoyama *et al.*, *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*, *Phys. Rept.* **887** (2020) 1–166, arXiv:2006.04822 [hep-ph].
- [11] S. Borsanyi *et al.*, *Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD*, *Nature* **593** (2021) 51–55, arXiv:2002.12347 [hep-lat].
- [12] J. L. Lopez, D. V. Nanopoulos, and X. Wang, *Large $(g-2)$ -mu in $SU(5) \times U(1)$ supergravity models*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 366–372, arXiv:hep-ph/9308336.
- [13] U. Chattopadhyay and P. Nath, *Probing supergravity grand unification in the Brookhaven g-2 experiment*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 1648–1657, arXiv:hep-ph/9507386.
- [14] T. Moroi, *The Muon anomalous magnetic dipole moment in the minimal supersymmetric standard model*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 6565–6575, arXiv:hep-ph/9512396. [Erratum: *Phys.Rev.D* 56, 4424 (1997)].
- [15] M. Endo, K. Hamaguchi, S. Iwamoto, and T. Kitahara, *Supersymmetric interpretation of the muon $g - 2$ anomaly*, *JHEP* **07** (2021) 075, arXiv:2104.03217 [hep-ph].
- [16] D. Chakraverty, D. Choudhury, and A. Datta, *A Nonsupersymmetric resolution of the anomalous*

- muon magnetic moment, *Phys. Lett. B* **506** (2001) 103–108, arXiv:hep-ph/0102180.
- [17] U. Mahanta, *Implications of BNL measurement of delta a(mu) on a class of scalar leptoquark interactions*, *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 171–173, arXiv:hep-ph/0102176.
- [18] P. Athron, C. Balázs, D. H. Jacob, W. Kotlarski, D. Stöckinger, and H. Stöckinger-Kim, *New physics explanations of a_μ in light of the FNAL muon $g - 2$ measurement*, *JHEP* **09** (2021) 080, arXiv:2104.03691 [hep-ph].
- [19] D. Chang, W.-F. Chang, C.-H. Chou, and W.-Y. Keung, *Large two loop contributions to $g-2$ from a generic pseudoscalar boson*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 091301, arXiv:hep-ph/0009292.
- [20] W. J. Marciano, A. Masiero, P. Paradisi, and M. Passera, *Contributions of axionlike particles to lepton dipole moments*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 115033, arXiv:1607.01022 [hep-ph].
- [21] M. A. Buen-Abad, J. Fan, M. Reece, and C. Sun, *Challenges for an axion explanation of the muon $g - 2$ measurement*, *JHEP* **09** (2021) 101, arXiv:2104.03267 [hep-ph].
- [22] W.-Y. Keung, D. Marfatia, and P.-Y. Tseng, *Axion-Like Particles, Two-Higgs-Doublet Models, Leptoquarks, and the Electron and Muon $g-2$* , *LHEP* **2021** (2021) 209, arXiv:2104.03341 [hep-ph].
- [23] M. Pospelov, *Secluded $U(1)$ below the weak scale*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 095002, arXiv:0811.1030 [hep-ph].
- [24] M. Endo, K. Hamaguchi, and G. Mishima, *Constraints on Hidden Photon Models from Electron $g-2$ and Hydrogen Spectroscopy*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 095029, arXiv:1209.2558 [hep-ph].
- [25] **NA48/2** Collaboration, J. R. Batley *et al.*, *Search for the dark photon in π^0 decays*, *Phys. Lett. B* **746** (2015) 178–185, arXiv:1504.00607 [hep-ex].
- [26] **BESIII** Collaboration, M. Ablikim *et al.*, *Dark Photon Search in the Mass Range Between 1.5 and 3.4 GeV/ c^2* , *Phys. Lett. B* **774** (2017) 252–257, arXiv:1705.04265 [hep-ex].
- [27] S. Baek, N. G. Deshpande, X. G. He, and P. Ko, *Muon anomalous $g-2$ and gauged $L(\text{muon}) - L(\text{tau})$ models*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 055006, arXiv:hep-ph/0104141.
- [28] E. Ma, D. P. Roy, and S. Roy, *Gauged $L(\text{mu}) - L(\text{tau})$ with large muon anomalous magnetic moment and the bimaximal mixing of neutrinos*, *Phys. Lett. B* **525** (2002) 101–106, arXiv:hep-ph/0110146.
- [29] J. Heeck and W. Rodejohann, *Gauged $L_\mu - L_\tau$ Symmetry at the Electroweak Scale*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 075007, arXiv:1107.5238 [hep-ph].
- [30] K. Harigaya, T. Igari, M. M. Nojiri, M. Takeuchi, and K. Tobe, *Muon $g-2$ and LHC phenomenology in the $L_\mu - L_\tau$ gauge symmetric model*, *JHEP* **03** (2014) 105, arXiv:1311.0870 [hep-ph].
- [31] S. Verma, *Non-zero θ_{13} and CP-violation in inverse neutrino mass matrix*, *Nucl. Phys. B* **854** (2012) 340–349, arXiv:1109.4228 [hep-ph].
- [32] J. Liao, D. Marfatia, and K. Whisnant, *Texture and Cofactor Zeros of the Neutrino Mass Matrix*, *JHEP* **09** (2014) 013, arXiv:1311.2639 [hep-ph].
- [33] K. Asai, K. Hamaguchi, and N. Nagata, *Predictions for the neutrino parameters in the minimal gauged $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 763, arXiv:1705.00419 [hep-ph].
- [34] J.-C. Park, J. Kim, and S. C. Park, *Galactic center GeV gamma-ray excess from dark matter*

- with gauged lepton numbers, *Phys. Lett. B* **752** (2016) 59–65, arXiv:1505.04620 [hep-ph].
- [35] S. Baek, *Dark matter and muon ($g - 2$) in local $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ -extended Ma Model*, *Phys. Lett. B* **756** (2016) 1–5, arXiv:1510.02168 [hep-ph].
- [36] S. Patra, S. Rao, N. Sahoo, and N. Sahu, *Gauged $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ model in light of muon $g - 2$ anomaly, neutrino mass and dark matter phenomenology*, *Nucl. Phys. B* **917** (2017) 317–336, arXiv:1607.04046 [hep-ph].
- [37] A. Biswas, S. Choubey, and S. Khan, *Neutrino Mass, Dark Matter and Anomalous Magnetic Moment of Muon in a $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ Model*, *JHEP* **09** (2016) 147, arXiv:1608.04194 [hep-ph].
- [38] A. Biswas, S. Choubey, and S. Khan, *FIMP and Muon ($g - 2$) in a $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ Model*, *JHEP* **02** (2017) 123, arXiv:1612.03067 [hep-ph].
- [39] P. Banerjee *et al.*, *Theory for muon-electron scattering @ 10 ppm: A report of the MUonE theory initiative*, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 591, arXiv:2004.13663 [hep-ph].
- [40] T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio, *Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment*, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 036001, arXiv:1712.06060 [hep-ph].
- [41] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, *New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 120801, arXiv:0801.1134 [physics.atom-ph].
- [42] D. Hanneke, S. F. Hoogerheide, and G. Gabrielse, *Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment*, *Phys. Rev. A* **83** (2011) 052122, arXiv:1009.4831 [physics.atom-ph].
- [43] P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014*, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 035009, arXiv:1507.07956 [physics.atom-ph].
- [44] R. H. Parker, C. Yu, W. Zhong, B. Estey, and H. Müller, *Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model*, *Science* **360** (2018) 191, arXiv:1812.04130 [physics.atom-ph].
- [45] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon $g-2$* , *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 111808, arXiv:1205.5370 [hep-ph].
- [46] C. M. Carloni Calame, M. Passera, L. Trentadue, and G. Venanzoni, *A new approach to evaluate the leading hadronic corrections to the muon $g-2$* , *Phys. Lett. B* **746** (2015) 325–329, arXiv:1504.02228 [hep-ph].
- [47] G. Abbiendi *et al.*, *Measuring the leading hadronic contribution to the muon $g-2$ via μe scattering*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 139, arXiv:1609.08987 [hep-ex].
- [48] S. J. Brodsky and E. De Rafael, *SUGGESTED BOSON - LEPTON PAIR COUPLINGS AND THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT OF THE MUON*, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1620–1622.
- [49] M. Gourdin and E. De Rafael, *Hadronic contributions to the muon g -factor*, *Nucl. Phys. B* **10** (1969) 667–674.
- [50] **Particle Data Group** Collaboration, M. Tanabashi *et al.*, *Review of Particle Physics*, *Phys.*

- Rev. D* **98** (2018) 030001.
- [51] B. e. Lautrup, A. Peterman, and E. de Rafael, *Recent developments in the comparison between theory and experiments in quantum electrodynamics*, *Phys. Rept.* **3** (1972) 193–259.
- [52] S. Eidelman and F. Jegerlehner, *Hadronic contributions to $g-2$ of the leptons and to the effective fine structure constant $\alpha(M(z)^{**2})$* , *Z. Phys. C* **67** (1995) 585–602, arXiv:hep-ph/9502298.
- [53] F. Jegerlehner, *The Running fine structure constant $\alpha(E)$ via the Adler function*, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **181-182** (2008) 135–140, arXiv:0807.4206 [hep-ph].
- [54] W. Altmannshofer, S. Gori, M. Pospelov, and I. Yavin, *Neutrino Trident Production: A Powerful Probe of New Physics with Neutrino Beams*, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 091801, arXiv:1406.2332 [hep-ph].
- [55] T. Araki, F. Kaneko, Y. Konishi, T. Ota, J. Sato, and T. Shimomura, *Cosmic neutrino spectrum and the muon anomalous magnetic moment in the gauged $L - L$ model*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 037301, arXiv:1409.4180 [hep-ph].
- [56] A. Kamada and H.-B. Yu, *Coherent Propagation of PeV Neutrinos and the Dip in the Neutrino Spectrum at IceCube*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 113004, arXiv:1504.00711 [hep-ph].
- [57] T. Araki, F. Kaneko, T. Ota, J. Sato, and T. Shimomura, *MeV scale leptonic force for cosmic neutrino spectrum and muon anomalous magnetic moment*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 013014, arXiv:1508.07471 [hep-ph].
- [58] K. Fuyuto, W.-S. Hou, and M. Kohda, *Z' -induced FCNC decays of top, beauty, and strange quarks*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 054021, arXiv:1512.09026 [hep-ph].
- [59] M. Ibe, W. Nakano, and M. Suzuki, *Constraints on $L_\mu - L_\tau$ gauge interactions from rare kaon decay*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 055022, arXiv:1611.08460 [hep-ph].
- [60] Y. Kaneta and T. Shimomura, *On the possibility of a search for the $L_\mu - L_\tau$ gauge boson at Belle-II and neutrino beam experiments*, *PTEP* **2017** (2017) 053B04, arXiv:1701.00156 [hep-ph].
- [61] T. Araki, S. Hoshino, T. Ota, J. Sato, and T. Shimomura, *Detecting the $L_\mu - L_\tau$ gauge boson at Belle II*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 055006, arXiv:1702.01497 [hep-ph].
- [62] C.-H. Chen and T. Nomura, *$L_\mu - L_\tau$ gauge-boson production from lepton flavor violating τ decays at Belle II*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 095023, arXiv:1704.04407 [hep-ph].
- [63] S. N. Gninenko and N. V. Krasnikov, *Probing the muon $g_\mu - 2$ anomaly, $L_\mu - L_\tau$ gauge boson and Dark Matter in dark photon experiments*, *Phys. Lett. B* **783** (2018) 24–28, arXiv:1801.10448 [hep-ph].
- [64] T. Nomura and T. Shimomura, *Searching for scalar boson decaying into light Z' boson at collider experiments in $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model*, *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) 594, arXiv:1803.00842 [hep-ph].
- [65] M. Bauer, P. Foldenauer, and J. Jaeckel, *Hunting All the Hidden Photons*, *JHEP* **07** (2018) 094, arXiv:1803.05466 [hep-ph].
- [66] A. Kamada, K. Kaneta, K. Yanagi, and H.-B. Yu, *Self-interacting dark matter and muon $g - 2$ in a gauged $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model*, *JHEP* **06** (2018) 117, arXiv:1805.00651 [hep-ph].
- [67] H. Banerjee, P. Byakti, and S. Roy, *Supersymmetric gauged $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model for neutrinos and the muon ($g - 2$) anomaly*, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 075022, arXiv:1805.04415 [hep-ph].
- [68] A. Crivellin, M. Hoferichter, and P. Schmidt-Wellenburg, *Combined explanations of $(g - 2)_{\mu,e}$ and*

- implications for a large muon EDM, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 113002, arXiv:1807.11484 [hep-ph].
- [69] P. Foldenauer, *Light dark matter in a gauged $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ model*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 035007, arXiv:1808.03647 [hep-ph].
- [70] H. Banerjee and S. Roy, *Signatures of supersymmetry and $L_\mu - L_\tau$ gauge bosons at Belle-II*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 035035, arXiv:1811.00407 [hep-ph].
- [71] M. Escudero, D. Hooper, G. Krnjaic, and M. Pierre, *Cosmology with A Very Light $L_\mu - L_\tau$ Gauge Boson*, *JHEP* **03** (2019) 071, arXiv:1901.02010 [hep-ph].
- [72] W. Altmannshofer, S. Gori, J. Martín-Albo, A. Sousa, and M. Wallbank, *Neutrino Tridents at DUNE*, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 115029, arXiv:1902.06765 [hep-ph].
- [73] G. Krnjaic, G. Marques-Tavares, D. Redigolo, and K. Tobioka, *Probing Muonphilic Force Carriers and Dark Matter at Kaon Factories*, *Phys. Rev. Lett.* **124** (2020) 041802, arXiv:1902.07715 [hep-ph].
- [74] P. Ballett, M. Hostert, S. Pascoli, Y. F. Perez-Gonzalez, Z. Tabrizi, and R. Zukanovich Funchal, *Z 's in neutrino scattering at DUNE*, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 055012, arXiv:1902.08579 [hep-ph].
- [75] A. Biswas and A. Shaw, *Reconciling dark matter, $R_{K^{(*)}}$ anomalies and $(g-2)_\mu$ in an $L_\mu - L_\tau$ scenario*, *JHEP* **05** (2019) 165, arXiv:1903.08745 [hep-ph].
- [76] D. W. P. d. Amaral, D. G. Cerdeno, P. Foldenauer, and E. Reid, *Solar neutrino probes of the muon anomalous magnetic moment in the gauged $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$* , *JHEP* **12** (2020) 155, arXiv:2006.11225 [hep-ph].
- [77] D. Borah, S. Mahapatra, D. Nanda, and N. Sahu, *Inelastic fermion dark matter origin of XENON1T excess with muon $(g-2)$ and light neutrino mass*, *Phys. Lett. B* **811** (2020) 135933, arXiv:2007.10754 [hep-ph].
- [78] T. Shimomura and Y. Uesaka, *Kinematical distributions of coherent neutrino trident production in gauged $L_\mu - L_\tau$ model*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 035022, arXiv:2009.13773 [hep-ph].
- [79] K. Asai, S. Okawa, and K. Tsumura, *Search for $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ charged Dark Matter with neutrino telescope*, *JHEP* **03** (2021) 047, arXiv:2011.03165 [hep-ph].
- [80] H. Banerjee, B. Dutta, and S. Roy, *Supersymmetric gauged $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ model for electron and muon $(g-2)$ anomaly*, *JHEP* **03** (2021) 211, arXiv:2011.05083 [hep-ph].
- [81] Y. Zhang, Z. Yu, Q. Yang, M. Song, G. Li, and R. Ding, *Probing the $L_\mu - L_\tau$ gauge boson at electron colliders*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 015008, arXiv:2012.10893 [hep-ph].
- [82] G.-y. Huang, F. S. Queiroz, and W. Rodejohann, *Gauged $L_\mu-L_\tau$ at a muon collider*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 095005, arXiv:2101.04956 [hep-ph].
- [83] T. Araki, K. Asai, K. Honda, R. Kasuya, J. Sato, T. Shimomura, and M. J. S. Yang, *Resolving the Hubble tension in a $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ model with Majoron*, arXiv:2103.07167 [hep-ph].
- [84] H. Banerjee, B. Dutta, and S. Roy, *Probing $L_\mu-L_\tau$ models with CE ν NS: A new look at the combined COHERENT CsI and Ar data*, *Phys. Rev. D* **104** (2021) 015015, arXiv:2103.10196 [hep-ph].
- [85] D. W. P. Amaral, D. G. Cerdeno, A. Cheek, and P. Foldenauer, *Distinguishing $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ from $U(1)_{L_\mu}$ as a solution for $(g-2)_\mu$ with neutrinos*, arXiv:2104.03297 [hep-ph].
- [86] L. Zu, X. Pan, L. Feng, Q. Yuan, and Y.-Z. Fan, *Constraining $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ charged dark matter*

- model for muon $g - 2$ anomaly with AMS-02 electron and positron data, arXiv:2104.03340 [hep-ph].
- [87] D. Borah, M. Dutta, S. Mahapatra, and N. Sahu, *Muon ($g - 2$) and XENON1T excess with boosted dark matter in $L_\mu - L_\tau$ model*, *Phys. Lett. B* **820** (2021) 136577, arXiv:2104.05656 [hep-ph].
- [88] S. Zhou, *Neutrino Masses, Leptonic Flavor Mixing and Muon ($g - 2$) in the Seesaw Model with the $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Gauge Symmetry*, arXiv:2104.06858 [hep-ph].
- [89] J. A. Carpio, K. Murase, I. M. Shoemaker, and Z. Tabrizi, *High-energy cosmic neutrinos as a probe of the vector mediator scenario in light of the muon $g - 2$ anomaly and Hubble tension*, arXiv:2104.15136 [hep-ph].
- [90] X. Qi, A. Yang, W. Liu, and H. Sun, *Scalar dark matter and Muon $g - 2$ in a $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model*, arXiv:2106.14134 [hep-ph].
- [91] D. Borah, A. Dasgupta, and D. Mahanta, *TeV Scale Resonant Leptogenesis with $L_\mu - L_\tau$ Gauge Symmetry in the Light of Muon ($g - 2$)*, arXiv:2106.14410 [hep-ph].
- [92] A. Greljo, Y. Soreq, P. Stangl, A. E. Thomsen, and J. Zupan, *Muonic Force Behind Flavor Anomalies*, arXiv:2107.07518 [hep-ph].
- [93] I. Holst, D. Hooper, and G. Krnjaic, *The Simplest and Most Predictive Model of Muon $g - 2$ and Thermal Dark Matter*, arXiv:2107.09067 [hep-ph].
- [94] M. Drees and W. Zhao, *$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ for Light Dark Matter, $g_\mu - 2$, the 511 keV excess and the Hubble Tension*, arXiv:2107.14528 [hep-ph].
- [95] T. Hapitas, D. Tucker, and Y. Zhang, *General Kinetic Mixing in Gauged $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Model for Muon $g - 2$ and Dark Matter*, arXiv:2108.12440 [hep-ph].
- [96] D. Borah, M. Dutta, S. Mahapatra, and N. Sahu, *Lepton Anomalous Magnetic Moment with Singlet-Doublet Fermion Dark Matter in Scotogenic $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Model*, arXiv:2109.02699 [hep-ph].
- [97] K. Asai, K. Hamaguchi, N. Nagata, S.-Y. Tseng, and K. Tsumura, *Minimal Gauged $U(1)_{L_\alpha - L_\beta}$ Models Driven into a Corner*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 055029, arXiv:1811.07571 [hep-ph].
- [98] K. Asai, *Predictions for the neutrino parameters in the minimal model extended by linear combination of $U(1)_{L_e - L_\mu}$, $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ and $U(1)_{B - L}$ gauge symmetries*, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 76, arXiv:1907.04042 [hep-ph].
- [99] K. Asai, K. Hamaguchi, N. Nagata, and S.-Y. Tseng, *Leptogenesis in the minimal gauged $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ model and the sign of the cosmological baryon asymmetry*, *JCAP* **11** (2020) 013, arXiv:2005.01039 [hep-ph].
- [100] **CMS** Collaboration, A. M. Sirunyan *et al.*, *Search for an $L_\mu - L_\tau$ gauge boson using $Z \rightarrow 4\mu$ events in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV*, *Phys. Lett. B* **792** (2019) 345–368, arXiv:1808.03684 [hep-ex].
- [101] **BaBar** Collaboration, J. P. Lees *et al.*, *Search for a muonic dark force at BABAR*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 011102, arXiv:1606.03501 [hep-ex].
- [102] G. Bellini *et al.*, *Precision measurement of the ^7Be solar neutrino interaction rate in Borexino*, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 141302, arXiv:1104.1816 [hep-ex].

- [103] **CHARM-II** Collaboration, D. Geiregat *et al.*, *First observation of neutrino trident production*, *Phys. Lett. B* **245** (1990) 271–275.
- [104] **CCFR** Collaboration, S. R. Mishra *et al.*, *Neutrino tridents and $W Z$ interference*, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 3117–3120.
- [105] T. Czank *et al.*, *Search for $Z' \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in the $L_\mu - L_\tau$ gauge-symmetric model at Belle*, arXiv:2109.08596 [hep-ex].
- [106] H. K. Dreiner, J.-F. Fortin, J. Isern, and L. Ubaldi, *White Dwarfs constrain Dark Forces*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 043517, arXiv:1303.7232 [hep-ph].
- [107] S. Martellotti, *The NA62 Experiment at CERN*, in *12th Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics*. 10, 2015. arXiv:1510.00172 [physics.ins-det].
- [108] S. N. Gninenko, N. V. Krasnikov, and V. A. Matveev, *Muon $g-2$ and searches for a new leptophobic sub-GeV dark boson in a missing-energy experiment at CERN*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 095015, arXiv:1412.1400 [hep-ph].
- [109] **NA64, Physics Beyond Colliders Conventional Beams Working Group** Collaboration, D. Banerjee, *Search for Dark Sector Physics at the NA64 experiment in the context of the Physics Beyond Colliders Projects*, *PoS LeptonPhoton2019* (2019) 061, arXiv:1909.04363 [hep-ex].
- [110] H. Sieber, D. Banerjee, P. Crivelli, E. Depero, S. N. Gninenko, D. V. Kirpichnikov, M. M. Kirsanov, V. Poliakov, and L. Molina Bueno, *Prospects in the search for a new light Z' boson with the NA64 μ experiment at the CERN SPS*, arXiv:2110.15111 [hep-ex].
- [111] **Belle-II** Collaboration, T. Abe *et al.*, *Belle II Technical Design Report*, arXiv:1011.0352 [physics.ins-det].
- [112] Y. Jho, Y. Kwon, S. C. Park, and P.-Y. Tseng, *Search for muon-philic new light gauge boson at Belle II*, *JHEP* **10** (2019) 168, arXiv:1904.13053 [hep-ph].
- [113] A. Masiero, P. Paradisi, and M. Passera, *New physics at the MUonE experiment at CERN*, *Physical Review D* **102** (2020) 075013.
- [114] P. Dev, W. Rodejohann, X.-J. Xu, and Y. Zhang, *MUonE sensitivity to new physics explanations of the muon anomalous magnetic moment*, *Journal of High Energy Physics* **2020** (2020) 1–30.
- [115] N. D. Christensen and C. Duhr, *FeynRules - Feynman rules made easy*, *Comput. Phys. Commun.* **180** (2009) 1614–1641, arXiv:0806.4194 [hep-ph].
- [116] A. Alloul, N. D. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, and B. Fuks, *FeynRules 2.0 - A complete toolbox for tree-level phenomenology*, *Comput. Phys. Commun.* **185** (2014) 2250–2300, arXiv:1310.1921 [hep-ph].
- [117] J. Alwall, R. Frederix, S. Frixione, V. Hirschi, F. Maltoni, O. Mattelaer, H. S. Shao, T. Stelzer, P. Torrielli, and M. Zaro, *The automated computation of tree-level and next-to-leading order differential cross sections, and their matching to parton shower simulations*, *JHEP* **07** (2014) 079, arXiv:1405.0301 [hep-ph].
- [118] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [119] P. Minkowski, *$\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays?*, *Phys. Lett. B* **67** (1977) 421–428.

- [120] T. Yanagida, *Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos*, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980) 1103.
- [121] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, *Complex Spinors and Unified Theories*, *Conf. Proc. C* **790927** (1979) 315–321, arXiv:1306.4669 [hep-th].
- [122] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 912.
- [123] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34** (1957) 247.
- [124] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870–880.
- [125] L. Autonne, *Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaires*, vol. 38. A. Rey, 1915.
- [126] T. Takagi, *On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau*, in *Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts*, vol. 1, pp. 83–93, The Mathematical Society of Japan. 1924.
- [127] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, T. Schwetz, and A. Zhou, *The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations*, *JHEP* **09** (2020) 178, arXiv:2007.14792 [hep-ph].