時空概念の数学的イメージ

中西 襄 *

概要

特殊および一般相対論は、時間は３次元空間と同列のものであり、両者は合体して４次元時空として取り扱わなければならないことを明らかにした。他方、最も稔り多い理論形式である正準理論では、時間はあくまでも別格の存在である。この両者の不整合は、量子アインシュタイン重力においてはその一般線形変換不変性のおかげで自然な形で解消される。そしてその結果、素粒子物理学におけるローレンツ不変性の素性が明らかとなる。こういった歴史的発展を時空概念の変遷という視点から解説する。

1 はじめに

この小論では、要するに「時空とは何ぞや」を論じたいのであるが、もちろん筆者は哲学者ではないので、「その目的のためのみに発明された用語」を弄んで悦に入るつもりはない。あくまでも素粒子屋として筆者は時空概念を数学的に定式化して、その物理的意味を明らかにしたいのである。

次節では古典論での時空概念の変遷を振り返ってみる。３節ではそれを量子化した場合どのようにそれが変更を受けねばならないかを論ずる。４節では量子アインシュタイン重力について説明し、その立場から自然な時空概念の数学的定式化について述べる。最後の節に結論をまとめる。

記述の都合上、空間を表わすのに特殊な記号を使わせて頂く。$\boxed{n}$ は n 次元の連続体を表わす。その具体的な構造について特定したいときは、それに添字をつけることにする。

なお、次元数を増やし、あとから余分の次元を手で差別する、いわゆる「余次元理論」[1] は、筆者は時空構造の変革にならないと思うので一切考えない。

2 古典論における時空概念

2.1 ニュートン力学における時空

近代物理学はニュートンに始まる。筆者は科学史家ではないので、それ以前の科学史を論ずることはしない。

ニュートン力学では時間と空間はそれぞれ全く独立な概念である。ニュートン力学の時空を数式で表わせば

$$\boxed{3}_E \oplus \boxed{1} \tag{2.1}$$

* 京都大学（数理解析研究所）名誉教授.

となる。つまり空間の３次元と時間より成る集合である。ここに３次元空間としてユークリッド空間 ($\boxed{3}_E$ の添字の E は Euclid を示す; 以下同様) を「採用」していることに言及しておきたい。

ニュートンの時代、空間といえば自動的に古代ギリシャで確立されていたユークリッド空間しかなかった。空間の並進不変性と回転不変性は論ずるまでもなく「自明」であった。

大きさのある物体が存在したから、長さの違いは当然意識されていた。それゆえスケール変換不変性はユークリッド空間では排除されているが、これも「自明」のことであった。

ニュートン力学では時空の定義に「速さ」は関係しなかった。それゆえ物体、従ってエネルギーや情報も、いくらでも速く走ることが原理的に許された。しかしよく考えてみれば、これは因果律に反することである。なぜなら宇宙の果てで起こった大事件が即座に地球に到達したら、予測が不可能な世界になってしまうからである。速さに限界があることの認識から、相対論的時空が登場することになる。

2.2　特殊相対論における時空

速さに一定の限界があることが分かり、すべての物体やエネルギーが真空中の光の速さ c を超えられないことが確立された。この光速度不変の原理と慣性系の平等性（相対性）とから、アインシュタインは 1905 年特殊相対論を定式化することに成功した。これによれば時間は観測者の運動に依存して進行することになる。ここで時間と空間が一体となった「時空」という概念が必要になった。式で書くと $\boxed{3}_E \oplus \boxed{1}$ が全体としてローレンツ不変性をもつ。これをミンコフスキー空間と呼び

$$\boxed{4}_M \tag{2.2}$$

と書く。

少し脱線するが、筆者はいまだに「特殊相対性理論」略して「特殊相対論」という名称に納得がいかない。アインシュタインにしてみれば、ニュートンの絶対的な時間が相対的なものになったからというのが、その根拠なのだろう。しかし誰もニュートンの理論を「特殊絶対論」とは呼ばないのだから、アインシュタインの一人相撲のような気がする。筆者は「慣性系アインシュタイン理論」とでも呼ぶのが合理的なように思う。

話を元に戻す。ミンコフスキーの導入した「４次元世界」の時空のイメージは、４次元のテンソル解析を可能にし、物理学の理論的発展に多大なる貢献をした。しかし筆者は、この大成功の影でひっそりと恐ろしい病魔をも育てていたのではないかと思う。以下この小論で、この主張の根拠を説明していきたいと思う。

この病魔が最初に顔を覗かせたのが「パリティ非保存」であった。すなわちローレンツ群は $O(3,1)$ ではなく $SO(3,1)$ だったのである。しかしこれは素粒子物理ではじめて明らかになったことなので、ここでは単に指摘するだけにとどめる。

2.3　一般相対論における時空

特殊相対論は慣性系においてしか成立しないから、これを非慣性系に拡大したいと思うのは当然

のなりゆきであった。このさい指針となったのが等価原理である。

等価原理を実験で確認したのは、ガリレイが初めてであろう。しかし、この原理は古代から知られていたのではないだろうか。アーチの原理である。アーチの原理はエトルリア人によって発見され古代ローマに受け継がれた[*1]。アーチの原理を全く独立に発見したいかなる文明も他に存在しなかったようである。

余談はさておき、アインシュタインは加速度系と重力の影響とが局所的には区別がつかないことに注目して、グロスマンの助けをかりて、一般相対論の定式化に成功した。

「一般相対論」(正しくは「一般相対性理論」) はやはりどうもその内容に適合した名称とは思えない。これはあくまでも重力場の理論である。従って「アインシュタインの重力理論」と呼ぶのがふさわしい。略して「アインシュタイン重力」と呼ぶ。

アインシュタイン重力は物理学史上最大の金字塔の一つである。このあと亜流理論がゴマンと現われたが、結局物理的に正しかったのは最もシンプルで美しいアインシュタイン重力であった。

よく「一般相対論は重力を幾何学化するのに成功した」と言われる。これにだまされたのが、ワイルとカルーツァであった。前者は物理をよく知らなかったため、後者は数学をよく理解していなかったからかも知れない。

アインシュタイン重力はたしかにリーマン幾何学の言葉で定式化されている。しかし、物理として使われているのは擬リーマン幾何学である。つまり計量の符号因子が $\{+,+,+,-\}$ になっている。しかしアインシュタイン方程式のどこを探しても、この情報は入っていない。それでは計量符号の情報はどこから来ているのか。それは境界条件である。観測者はいつでもミンコフスキー空間に住んでいるのである。すなわちアインシュタイン重力における時空は

$$\boxed{4}_M \longrightarrow \boxed{4}_R \text{の像}$$

となる。ここに $\boxed{4}_R$ は 4 次元リーマン空間である。

この点について教科書にはあまり明確に書かれていないようなのでもう少し詳しく論じたい。

例えば最近ブラックホールの映像が撮影されて、その直径なども報じられている。他方でブラックホールの直径は一般座標変換で変化する量である。例えばド・ドンデア座標条件のもとでの直径は、シュヴァルツシルト解の場合、元の解での直径の半分になる。それでは一般座標変換不変性はどうなるのか。実は観測しているのはブラックホールを地球から見た視角であって直接直径を測定しているわけではない。従って真正の (つまり ds^2 の式 $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ で立体角 $d\Omega$ の係数が r^2 であるような) 極座標がとれることが重要なのである。極座標というのは曲者だ。一般座標変換の一つで極座標へ移れるようだが、極座標系自体はユークリッド空間でしか意味がない。一般相対論で回転座標系を考える難しさはこの辺にあるのだろう。角変数に変域を課すようなグローバルな設定は、一般座標変換の前提である一対一対応になじまないのである。

[*1] ローマ人が長い水道橋を造って風呂を楽しめたのはアーチのおかげである。

3　量子論における時空概念

3.1　量子力学における問題点

時空とは何ぞやという問題が難しくなるのは量子論においてである。量子論では実質上、質点をある 1 点に固定することはできないから、特殊相対論を考えたときのアインシュタインの思考実験は根底から壊れてしまう。このことが相対論が量子論となじみにくい根元なのであろう。

歴史的に見ても、シュレーディンガーは最初クライン=ゴルドン方程式を使って水素原子のエネルギースペクトルを出そうと試みた。しかし、それは失敗して、よく知られているように、シュレーディンガー方程式は非相対論的な形で成功を収める。

ディラックはこれを相対論化することに成功し、ディラック方程式を発見した。しかしこれはシュレーディンガー方程式のアプローチを相対論化したものとは違う。スピン $\frac{1}{2}$ をもつ電子などのフェルミオンの基本方程式を見出したのである。実際、湯川はスピン 0 である中間子は、クライン=ゴルドン方程式で記述されることを明らかにした。

ディラックによる偉大な発見は、素粒子は一般的に「反粒子」をもつということである。反粒子の存在は元をたどれば $E^2 = p^2 + m^2$ という式が E について 2 次式だからで、2 次方程式の根が 2 つあるのは当然のことであった。しかしマイナスのエネルギーを持つ粒子は考えられない。一方、クライン=仁科が「それを黙って捨てたらアカン」ということを示したので、ディラックは「ディラックの海」という珍妙なアイディアをひねり出したことは周知であろう。この一時しのぎは結局は場の量子論の導入で解決される。

さて、時空の問題に戻ろう。量子力学の定式化において最も重要な基盤を支えたのが言うまでもなく解析力学である。解析力学は内容的にはニュートン力学と変わりはないが、それをハミルトニアンとポアソン括弧を用いて見事な定式化を行なった。解析力学では、時間 t は絶対的な存在とし別格に扱われる。空間座標は多体系や拘束系にも通用する一般化座標 q^j に置き換えられる。そしてラグランジアン L から $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$ として一般化運動量が定義される。正準形式の登場である。q^j と p_j は互いに正準共役と呼ばれる。

解析力学におけるポアソン括弧式をオペレーター間の交換子の i 倍（ディラックの作用量子 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ を 1 とおく）と置き換えることにより正準交換関係、

$$i\,[\,p_k\,,\,q^j\,] = \delta_k^{\ j}\ (j,k = 1,\cdots,n)\ , \tag{3.1}$$

を設定するのが正準量子化である。p_k と q^j はオペレーターになるが、t は c 数すなわち普通の実数のままである。q^j と p_k と t の任意の関数は、これによって正準量子化できる。「できる」ことはできるが、もちろん一意的ではない。p_k と q^j の並べ方によって答えが違ってくるからである。それでは正しい正準量子化はどのように設定されるのか。経験によれば q^j として直交座標を用い、q^j を全て左の方、p_k を右の方へ並べた順序を採用するのが正しいようである。ここで注意して頂きたいことは、$q^j\ (j = 1,\cdots,n)$ を線形変換しても順序の問題には影響ないことである。つまり座標系は直交座標である必要はなく、任意の斜交系で差し支えない。群論の言葉で言えば、正準量子化は一般線形変換不変である。

ところが曲者の極座標へ移ると話は簡単ではない。見通し易さのため 1 粒子系を考え、その直交座標を $x = q^1$、$y = q^2$、$z = q^3$ とする。通常のように x, y, z を c 数とすれば、正準共役量 $p_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}$、$p_2 = -i\frac{\partial}{\partial y}$、$p_3 = -i\frac{\partial}{\partial z}$ と表現され、ハミルトニアンの運動エネルギー部分はラプラシアン $\triangle$ の c 数倍となる。このラプラシアンを正直に極座標で表わせば正しい正準量子化が得られるが、極座標だけ考えたのではどうにもならない。

極座標の角変数については線形な座標系にはない周期境界条件がつく。そのためアハラノフ=ボーム効果のようなことが実際に起こる。もちろんアハラノフ=ボーム効果が起こるのは、極座標の責任ではなく極座標を採用すれば分かり易いということではあるが。

量子力学では時間と空間が全く別種の量となるので、もはや時空という概念はないと言える。

3.2　場の量子論における時空

量子力学は実用上大変有用であったが理論構成としてはツギハギであった。非相対論的粒子と相対論的電磁場が共存し、ディラック粒子は対生成や対消滅して粒子数が変わったりする。

これらを一掃する統一的な理論が構成された。「場の量子論」である。場の量子論では粒子数変化に対応する自由度が取り込まれ、無限大自由度の系を扱うこととなった。そのため量子力学にはなかった色々の新しい事情が生ずるが、それは後述する。

場の量子論における時空の取り扱いでは、時空座標 x^μ をパラメーターに格下げする。つまり場の量子論では基本量はもはや時空座標ではなく量子化された場　—「量子場」— である。x^μ は場 $\varphi(x)$ のように直接は表に顔を出すことがなくなったので、すべての場に対し共通の x^μ が使えることとなった。そして何よりも重要なのは相対論との矛盾が解消したことである。しかし正準形式とはいまだしっくりいかなかった。

$\varphi(x)$ の正準共役を定義するためには $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}$ のみを利用する。しかしこのことは理論のローレンツ不変性には関係しない。最初のラグランジアン密度さえ明白にローレンツ不変ならば理論は明白にローレンツ不変となる。従って時空は $\boxed{4}_M$ である。

ラグランジアン密度を 4 次元積分して得られる作用積分 S から変分原理によってオイラー=ラグランジュ方程式として場の方程式系が得られ、他方、正準交換関係の設定により場の量のオペレーターとしての性質が規定される。このオペレーターのオペランドとして（広義の）ヒルベルト空間が導入される。これが場の量子論の本来の構成である。数学の言葉で言えば、オペレーター代数とその線形表現を与えることによって理論が構成される。表現は、通常、最低エネルギー状態、すなわち真空状態 $|0\rangle$ の一意的な存在を仮定し、それに量子場の任意の多項式を作用させて得られる無限次元ベクトル空間を完備化したもので与えられる。

なぜか人はこの理論構成を「ハイゼンベルク表示」もしくは「ハイゼンベルク描像」と呼ぶ。それは別のアプローチを導入したいからである。まず「シュレーディンガー描像」であるが、オペレーターの時間的発展をすべて状態ベクトルに移動させるという考え方である。しかしこの考え方は明らかにローレンツ不変性を破るだけでなく、いわゆる真空偏極の発散が分離できなくて使い物にならなかった。そこで考案されたのが朝永とシュウィンガーらによる「相互作用描像」である。

相互作用描像ではラグランジアン密度を自由場部分と相互作用部分とに分離し、場の量は前者で規定し、ダイナミクスを表わす後者は状態ベクトルの方に背負わす。これは結局のところ相互作用定数の冪級数展開である摂動論を導く。

摂動論による S 行列要素の計算は、ファインマンによるファインマン・ダイヤグラムの方法が大成功を収め、場の量子論で「計算する」といえばファインマン・ダイヤグラムの方法を意味するほどとなった。はじめ、場の量子論の終焉を思わせた紫外発散の困難も「くりこみ」と呼ばれる無限大の処理法（無限大が出るのは超高エネルギーでの正しい理論の無知が原因と考え、それを質量や結合定数のような定数の予言不可能性にすりかえること）で解決した。量子電磁力学が摂動論のオールオーダーでくりこみ可能なことを証明したダイソンの業績を忘れてはならない。

ここで経路積分についてコメントしておく。量子力学では数学的裏付けがあるが、場の量子論では全く形式的である。今のところ摂動論の母関数という以上の理論的正当化を保証するものはないのではないか。それなのに、しばしば経路積分は正準形式の結果と同じだという主張がなされる。両者は明確に違うのだ。経路積分測度についてはハイゼンベルク描像に相当するものをどうやって定義したらよいか分からない。表現の状態空間の正定値性について全く情報がないので S 行列のユニタリー性について何も言えない。

また形式的な話としても経路積分では作用積分の変分[*2]ではなくて、その値自体が意味をもつ。そのおかげで、インスタントン、強い相互作用の CP 不変性の問題、アクシオンなど変てこな話が出てきた。気の毒に、アクシオンを一生懸命さがした実験屋さんがいたようだ。

次に「公理論的場の理論」についてコメントする。これをやっている人たちは数学的に厳密にいえないことはすべて意味がないと思っている。物理よりも数学理論の方が大切なのである。ラグランジアン密度のようなものを数学的に定義できないので、物理的内容は明瞭にできない。

公理論的場の理論では、いくつかの公理を前提とし、それに基づいて場の量子論を構成する。ワイトマンは、彼の提案した公理系に基づき、場の量の積の真空期待値によって定義されるワイトマン関数の完全系で理論が作れることを示した。他にもいろいろな公理系の提案はあるが、公理系の 1 つとしてローレンツ不変性が必ず採用されていると思う。

しかしよく考え直してみると、場の量子論がローレンツ不変であるべき論理的根拠はあまり明らかではない。場の量子論では x^μ はパラメーターになっており、アインシュタインの思考実験とは結びつかない。もしローレンツ不変性を疑うと微視的因果律は成立しなくなる。x^μ が「空間的」であるという定義は、ローレンツ不変性に基づくからである。

なお数学的に厳密な場の量子論として「構成的場の理論」がある。これは具体的なモデルを数学的に厳密な手法で実際に構成していくものである。しかし、今までのところ成功しているのは低次元の簡単なモデルしかないと記憶している。

[*2] でたらめな連立偏微分方程式系は、一般に内部矛盾をもつ。変分原理は、それと等価な連立偏微分方程式系が内部矛盾していないことを保証するものである。

3.3 ゲージ場の量子論について

本節では場の量子論のうち、とくに重要であるゲージ場の量子論について述べるので、時空についてはあまり関係しないかも知れない。

驚異の高精度で理論と実験が一致している量子電磁力学 (QED) の正しさを疑う者はいない。しかしそれは究極理論ではなかった。ワインバーグ=サラムの電弱理論の近似として含まれることが明らかとなった。それにはまず、それまでの場の量子論にはなかった、南部らによる「自発的に破れた対称性」の概念とヒッグスらによるいわゆる「ヒッグス機構」の発見があった。

自発的に破れた対称性の概念の基本的重要性について、いくら強調してもし過ぎることはない。これは無限大自由度の系の特性であって、量子力学のように有限自由度の系では起こりえないことである。というのは、フォン・ノイマンの定理により、有限自由度の系ではオペレーター代数の表現はユニタリー同値を除き一意的だからである。物性論では数学的な意味では有限自由度だが、物理的には実質的に無限大自由度となり、相転移が起こる。超伝導における BCS 理論の成功が、南部のアイディアを導いたことは周知であろう。

ゲージ場の量子論の基本的特性は何といっても、表現である状態空間が正定値計量をもたない、すなわち不定計量のベクトル空間であることである*3。

筆者は次節において、これまで素粒子物理において基本的と信じられてきたローレンツ対称性も、実は対称性の自発的な破れの結果生ずる 2 次的なものであることを主張する。

さて本題に戻ろう。ゲージ場の量子論では負ノルム（この言葉は数学者は許さないが、物理では習慣的に用いられる）が存在する。このままでは S 行列は真の意味でのユニタリーではなくなり、確率解釈を許さない。そこで確率解釈可能な理論とするために「物理的部分空間」というものを設定する。物理的部分空間内では負ノルムベクトルは存在しない。つまり正ノルムベクトルとゼロノルムベクトルより成る。ここでゼロノルムベクトルが存在することが、ゲージ場の量子論の醍醐味といえる。物理的部分空間は、また、ハミルトニアンの不変部分空間になっていなければならない。このような物理的部分空間を定義する唯一の方法として知られているのが「補助条件」*4の設定である。

ゲージ場の古典論では、ゲージ場はスカラー関数のグラディエントだけの変換に対して作用積分が不変すなわちニュートラルであって、変分原理がこの自由度に関して無効となる。これでは正準量子化できない。そこで「ゲージ固定」が行なわれる。通常ゲージ固定は人為的な操作のように思われがちだが、それは量子論は古典論を「量子化」して作られるものだという古典論優位の信仰の結果に過ぎない。論理的に考えて明らかに古典論が量子論に先行しているはずはない。今のところゲージ固定の選択を決める物理的根拠は見つかっていないので、理論の審美的見地からランダウゲージをとるのがベストと思われる。ランダウゲージの理論は「補助場」*5と呼ばれる B 場 $B(x)$

---

*3 クーロンゲージのような非局所相互作用の理論は除外する。また軸性ゲージ ($A_3 = 0$) のような理論は偏光方向の単位ベクトルが作れず物理の理論にはならない。

*4 「補助条件」という名称は、その重要性に鑑み、何ともわびしい名前である。「可観測性条件」は固すぎるし正確でもない。「物理条件」もしっくりしない。いい名前はないだろうか。

*5 この名前も嫌いである。

を導入してはじめて定式化可能になる。

ゲージ固定を導入すれば正準量子化はできるが、これでは古典論におけるゲージ不変性の情報は失われてしまう。量子論におけるゲージ対称性に相当するものは「ベッキ=ルーエ=ストラ対称性」略して BRS 対称性と呼ばれるグラスマン数的対称性である。BRS 変換は古典論でのゲージ変換に現われる無限小任意関数を「ファデエフ=ポポフ・ゴースト」（略して「FP ゴースト」）と呼ばれるフェルミオン場の $C(x)$ で置き換える。そしてゲージ固定項も BRS 不変になるように B 場 $B(x)$ に加えて、BRS 変換すれば B 場になる FP 反ゴースト場 $\bar{C}(x)$ を導入する。この B、C、$\bar{C}$ の部分は何らかの量の BRS 変換になっているように設定される。BRS 変換は冪零、すなわち 2 回施すと全て 0 になるので、この部分が BRS 不変なのは自明となる。

補助条件に話を戻そう。歴史的に最初に正しい補助条件を、QED の場合についてのみであるが、与えたのはグプタである。それで「グプタの条件」と呼ぶべきと筆者は思うのだが、一般には「グプタ=ブロイラーの条件」と呼ばれている。補助条件はハイゼンベルク描像でしか意味をもたないのに、ブロイラーはそれを相互作用描像でどうなるか調べたのだ。余計なお世話だと思う。グプタはファインマンゲージで考えたが、これを B 場を使ってランダウゲージで表わせば、QED もヒッグス・モデルも統一的に記述できることを筆者は示した [2]。

さて、一般のゲージ場における補助条件は「九後=小嶋条件」[3] であって、

$$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle = 0\,, \tag{3.2}$$

と書かれる。ここに Q_{B} は BRS 変換の生成子であって、もちろん x^{μ} には依存しない。Q_{B} を作用させて 0 になる状態の全体が物理的部分空間を構成する。九後=小嶋条件の基本的重要性は忘れてはならない*6。

$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ なので、その固有状態はダブレットかシングレットの何れかである。ダブレットの場合 $\{\, |a\rangle, Q_{\mathrm{B}}|a\rangle \mid Q_{\mathrm{B}}\, a\, |0\rangle \neq 0\,\}$ と書ける。$|a\rangle$ をペアレント、$Q_{\mathrm{B}}|a\rangle$ をドーターと呼ぶ。物理的部分空間は、BRS シングレットと BRS ドーターとで構成されることになる。$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ により BRS ドーターのノルムは自動的に 0 になり観測にかかる確率は 0 となる。何らかの方法で BRS シングレット (ゲージ理論の構成にとって必然性のないようなもの) に負ノルム状態がないことが言えれば物理的部分空間に制限した S 行列は実質的にユニタリーになる*7。

ここでゲージ場の経路積分法による量子化について言及しておく。ファデエフとポポフは経路積分測度にゲージ固定の無限次元デルタ関数を導入して、ファインマンやド・ウィットがファインマンダイヤグラムの解析から発見したゴーストループの必要性を見事に再現した。しかし経路積分はあくまで摂動論的サポートしかないので*8、彼らは重大なミスを犯した。$\bar{C}(x)$ を $C(x)$ の反粒子だと考えたのである。つまり複素スカラー場がフェルミ統計に従うものと設定した。ファインマンダイヤグラム的にそれは常識的な考え方だった。FP 反ゴーストという名称はその名残りであ

*6 最近、日本物理学会誌の「ラ・トッカータ」の欄で九後=小嶋理論発見の回顧談 [4] が載っているのを見たが悦ばしいことである。

*7 ここで、よく間違える人があるので注意しておくが、この主張は何も物理的状態から非物理的状態への遷移 S 行列要素が 0 になることではない。そんなものは物理とはカンケイがないのだ。

*8 格子ゲージ理論は、ユークリッド格子使用の妥当性やフェルミオン積分の問題など、数学的によく分からない。

る。正しくは、九後=小嶋によって指摘されたように、両者は別個の実スカラー場だったのである。$C(x)$ は無限小ゲージ変換関数に対応する場、$\bar{C}(x)$ は B 場 $B(x)$ の BRS ペアレントであった。この歴史的事実は経路積分が理論として正しいアプローチではないことを如実に示すものである。筆者は、経路積分をベースにした新しい理論を構成しようとしても決して成功しないと信じている。

現在の素粒子の標準理論は上述の電弱理論に強い相互作用を記述するカラー $SU(3)$ ゲージ場の理論を、単にポンとくっつけて 3 世代にふくらませたものである。なんで 3 世代あるのかは全く分からないし、素粒子に質量を持たせるためだけの役割しかない湯川相互作用の羅列は何とも見苦しい。これらの不満はあるが、今までのところ標準理論は実験的に大変うまくいっている。

ところで忘れてはならないのが、カラー粒子が決して単体として観測されないこと、すなわち「カラーの閉じ込め」が理論的に未解決であることである。中間子をクォーク q と反クォーク $\bar{q}$ とに分離するのが非常に難しいことをダイナミカルに示そうとする、いわゆる「クォークの閉じ込め」の試みは多いが、これをいくらやってみてもカラーの閉じ込めを示したことにはならない。カラーの閉じ込めのようにユニバーサルに成立することは、もっと単純明快に言えるべきだと思う。筆者と小嶋はカラーの閉じ込めは、新たな補助条件、

$$Q^a|\mathrm{phys}\rangle = 0\,, \tag{3.3}$$

を追加することで解決することを提案した [5, 6]（ただし、Q^a $(a = 1, \cdots, 8)$ はカラー生成子)。時空 x^μ に依存しない条件から発生する、いわゆる「お月様の裏側」問題も、カラー $SU(3)$ の非可換性を用いて回避できることを示した。

4　量子重力における時空概念

4.1　量子重力へのいろいろなアプローチ

素粒子の世界ではゲージ場の量子論が成功を収めた。それに反し、重力相互作用について成功を収めたのは古典論である一般相対論、すなわち古典アインシュタイン重力である。重力は古典論のままでよいのではないかという説もあるが、これではアインシュタイン方程式が ［c 数］=［q 数］という式になり、q 数から c 数を決めるという明らかに矛盾した式になってしまう。

さて、今までアインシュタイン定数 κ、すなわちアインシュタイン方程式の右辺の係数が極端に小さいことをいいことに素粒子物理では量子重力を無視してきた。この κ を取り込む最も安直な方法は、今まで成功を収めてきた共変的摂動論を適用することである。しかしながら、重力場のラグランジアン密度は自由場部分プラス相互作用部分とはなっていない。そこで次の仮定を導入する：

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + O(\sqrt{\kappa})\,. \tag{4.1}$$

$\eta_{\mu\nu}$ はもちろんミンコフスキー計量、$O(\varepsilon)$ はランダウの記号で $O(\varepsilon)/\varepsilon$ が $\varepsilon \to 0$ で 0 にも ∞ にもならないことを示す。

$O(\sqrt{\kappa})$ の部分を $\sqrt{\kappa}\, h_{\mu\nu}(x)$ と書いてアインシュタイン=ヒルベルトのラグランジアン密度にぶち込めば、２階のテンソル場 $h_{\mu\nu}(x)$ に対する自由場部分と 3 次以上の相互作用項に分離する。そ

こでお得意の摂動論を適用する。最低次だけはいいが高次に行くほどひどい紫外発散が次々と現われる。くりこみ理論を適用したら無限個のわけの分からないパラメーターを導入しなければならないから、物理にならない。そこで「アインシュタイン重力は量子化できない」と主張する多くの人が現われた。

しかし、そのように結論を急ぐのは論理の飛躍である。まず勝手に導入した (4.1) 式の仮定を疑うべきであろう。実際この式は正しくない。あと智恵による批判だが、この式の BRS 変換をとると、

$$O(1) = O(\sqrt{\kappa})\,, \tag{4.2}$$

という矛盾した式になる（定数の BRS 変換はもちろん 0)。後ほどきちんと証明するが、$g_{\mu\nu}(x)$ の $\kappa \to 0$ 極限はやはり q 数なのである[*9]。

しかしながら、それは後のお話。1960 年代から 1970 年代においては、それこそ量子重力の百家争鳴であった。それをすべてレビューするつもりはないが、簡単に眺めておくことにする。

紫外発散恐怖症の人がまず考えたのが、自由場の微分の個数を増やすことだった。いわゆるマルチ・マスの理論である。しかしこれはパウリ=ヴィラースのレギュレーターと同じで、ゴーストを入れて無限大を差し引いているだけである。ゴーストが S 行列のユニタリー性を壊すことは周知の通り、やっぱり物理にならない。

重力場の正準量子化はディーザー=ミズナー=ホィーラーに始まり、それをシュレーディンガー方程式のように微分形にしたド・ウィット=ホィーラー方程式やディラックの拘束系の量子化を利用した試みなどがある。いずれもローレンツ不変性を暗に想定しながら、正準形式にうまく取り入れられないでいる。

経路積分法を使った重力場の量子化も考えられた。「重力を幾何学化」したという言葉を文字通りとって「すべての可能な多様体」上の積分なるものを考えようとした。もちろんそれをきちんと経路積分測度として数学的に表わすことは不可能であろう。計量の符号さえどうするのかよく分からない。２次元のしかもユークリッド空間での経路積分測度ならば三角形分割を使ってなんとか定義できるが、こんなオモチャではほとんど無意味だ。またたとえこの方法でうまく測度が作れたとしても素粒子の理論と全く整合しないだろう。

他にもいろいろな試みがあるが、どうしても言及しておきたいのが超弦理論（スーパーストリング理論）である。詳しくは筆者の論説「超弦理論はなぜつぶれたのか」[7] を見て頂きたい。

まず重力を考えない素粒子理論において、すべての素粒子に同じ質量をもつが統計性が異なる粒子があり、超対称性（SUSY）が成立すれば紫外発散が抑えられる。もちろんそんな素粒子の相棒があるわけないから、SUSY は自発的に破れ相棒の粒子の質量は極端に大きくなったと想定する。この自発的に破れた SUSY は、破れていない SUSY とは異なり[*10]、なんら理論的に特別な地位にあるものではないのだが、そこには触れないで内緒にしておく。それでも困るのは対称性の自発的

[*9] なお (4.1) 式を単なる変数変換と考えるならば、間違いは $h_{\mu\nu}(x) = O(1)$ と仮定することである。$h_{\mu\nu}(x)$ は $\kappa \to 0$ で特異性をもつのだ。従って、摂動展開と思っていたものは実は冪級数になっていなかったのである。

[*10] ポアンカレ対称性の拡大可能性に関するいわゆる「no-go 定理」は、S 行列に関するものであって、作用積分に関してではない。

な破れから存在が要求される南部=ゴールドストーン・フェルミオンが実在しないことである。そこで「超ヒッグス機構」なるものが働いてそれが見えなくなっていると考える。

しかし SUSY は時空対称性なので対応するゲージ理論は超重力という重力理論になってしまった。素粒子物理では重力場の効果は無視して良いという近似がもはや成立しなくなるわけである。まさにジレンマなのだが、そんなことはおかまいなく暴走はさらにエスカレートし、スピン 2 までが許される最も美しい理論として 11 次元超重力という余次元理論へと発展する。

他方グリーン=シュヴァルツは、廃棄されていた弦理論を再利用、超対称化して「超弦理論」を提案した。20 桁もスケールダウンして重力をも含む「究極理論の唯一の候補」として、ウィッテンのお墨付きを得ることができた。そして弦の長さをゼロにした極限で超重力になると想定した。

1980 年代からスーパーストリングシンドロームの患者は爆発的に増え、パンデミックとなる。何しろちゃんとした理論体系がなく実験的検証も全くできない話であるから、いくらでも言いたい放題であった。仮説の上に仮説を積み重ね困ったら希望的観測でごまかした。物理学者がこれほど「自然」に対して不遜な態度をとり続けたのはアリストテレス以来のことかもしれない。

流行が流行を加速し、異端の理論が主流を占めるという異常事態になったが 21 世紀になってウォイトら批判派の声も大きくなり 2020 年代になってやっとパンデミックも終息したと思われる。

本小節の最後に、重力場の量子化ではないが、時空そのものを変更しようという試みについて言及しておこう。

まず代表的なのが時空の離散化である。最も単純なのが格子空間だが回転不変性を破る。考える点の相互関係をもっと自由にすると背景空間の導入が必要となる。これが連続な空間で、これがないと定量的な計算ができない。

時空の量子化はスナイダーに始まるが、散発的に論文が現われるものの、これといった成果はあがっていないようである。何の理論的な要請も実験的な要請もなしに、ただ時空 x^μ をオペレーターにするのは、単なるお遊びになってしまう危険性大である。

場の量子論での x^μ は、先に注意したようにパラメーターである。物理的な時空と解釈できるのは漸近場の段階である。つまり理論の基本において x^μ をオペレーター化することは、場の量子論との整合性がよくない。従って全く新しい形の理論形式を発明する必要があるが、標準理論を近似的に再現するようにするのは至難のわざであろう。

4.2 量子アインシュタイン重力

古典力学ではアインシュタイン方程式が、素粒子物理学では標準理論が正しいことは疑う余地はない。そこでこの両者を整合的に含むような理論形式を構築することが望まれる。「オッカムの剃刀」というべきか、できるだけ余計な仮説を持ち込まないことが正しい理論への道である。

時空は 4 次元であること、時間は一方向に流れて逆転することは決してないこと、それを疑って SF もどきの理論を考えることはよそう。理論形式としてはラグランジアン密度を場の量の関数として与え、正準形式を用いて正準量子化するのが正しいと考えるべきである。ローレンツ対称性はラグランジアン密度に持ち込むべきではない。それは、$\eta_{\mu\nu}$ という特定の時空計量を持ち込むこと

になるからである。

アインシュタインは特殊相対論からいっぺんに一般相対論へとつき進んだが、論理的にはその中間の一般線形変換不変性を考える必要がある。すなわち $GL(4)$ 不変性である。一般座標変換が並進の局所化なのにローレンツ群のような回転を含んでしまうので、これまであまり注目されることはなかった $GL(4)$ が量子アインシュタイン重力の定式化に極めて重要になる。

以上の省察から、量子アインシュタイン重力における時空概念は

$$\{\phi : \boxed{4}_A \to \boxed{1}\ \text{の逆写像}\ \phi^{-1}\}\ \text{の像の集合} \tag{4.3}$$

となる。ここに $\boxed{4}_A$ は 4 次元アフィン空間、$\boxed{1}$ は「ウルタイム」と名付ける 1 次元連続体、ϕ は線形写像である [8]。ϕ をとって ϕ^{-1} をとるのは無駄なことに見えるかも知れないが、4 次元の $GL(4)$ 不変性を乱さないようにして時間の一方向の連続な流れを明確に取り入れたかったからである。つまり、ウルタイム（t と表わす）の導入でニュートン力学の絶対時間のよい所を、4 次元空間を最初から考えることでアインシュタイン的世界を、実現するのである。

以下において量子アインシュタイン重力の理論構成のすじ道を述べる。具体的な式は筆者の著書・論文 [9, 10] などを見て頂きたい。

まず重力場であるが、$g_{\mu\nu}(x)$ を基本場とするとまずいことが 2 つある。1 つは不変測度 $\sqrt{-g}\,d^4x$ $(g \equiv \det g_{\mu\nu})$ のエルミート性が保証できないことである。もう 1 つはディラック場のラグランジアン密度に現われる γ 行列に四脚場 $h_\mu{}^a(x)$ が必要になることだ。四脚場からは

$$g_{\mu\nu}(x) = \zeta_{ab}\, h_\mu{}^a(x)\, h_\nu{}^b(x) \ \ , \tag{4.4}$$

のようにして $g_{\mu\nu}(x)$ は四脚場の 2 次式で表わされるから、基本の重力場は四脚場である。ここに ζ_{ab} は通常 η_{ab} と書くところだが、まだ話はそこまでしていないので一般的な c 数行列として書いた。2 次形式に関するシルベスターの定理によれば一般性を失うことなく ζ_{ab} は 1 か -1 か 0 の対角要素をもつ対角行列とすることができる。0 であれば ζ_{ab} は特異行列になるので排除する（ジェネリックな場合を考えるということ）。(4.4) 式の両辺の行列式をとれば、

$$g = \pm h^2 \quad (h \equiv \det h_\mu{}^a) \ \ , \tag{4.5}$$

を得る。なお反変成分は逆行列 $h^\nu{}_b(x)$ である（$h_\mu{}^a(x)\, h^\mu{}_b(x) = \delta^a{}_b$）。

一般座標変換は局所変換だから量子化にさいしてはゲージ場の量子論と同じく BRS 変換に置き換わる。ただしそのさい注意しなければならないのは、一般座標変換では x^μ も変換するということである。しかし x^μ は c 数なので量子論的には変換することは許されない。そこで「本質的 BRS 変換」という半古典的な概念を導入する。本質的 BRS 変換では微分演算子 ∂_μ もベクトル場と同じ変換をする。作用積分が本質的 BRS 不変ならば、自動的に量子論的な BRS 不変性がいえることは角運動量の場合と同じである。本質的 BRS 不変性を考えると、一般座標変換群が並進群というアーベル群の局所化であることが明瞭になり、見通しがよくなる。

この本質的 BRS 変換を $\boldsymbol{\delta}$ と書くと、B 場 $b_\rho(x)$、FP ゴースト $c^\sigma(x)$、FP 反ゴースト $\bar{c}_\tau(x)$ は次の関係にある：

$$\boldsymbol{\delta}(x^\mu) = c^\mu\,, \quad \boldsymbol{\delta}(\bar{c}_\nu) = i\, b_\nu \ \ . \tag{4.6}$$

ゲージ固定はゲージ場のランダウゲージに相当するド・ドンデア条件、

$$\partial_\mu(h\, g^{\mu\nu}) = 0 \ , \tag{4.7}$$

をとる。この条件は $GL(4)$ 不変性の要請を満たす。

内部ローレンツ対称性の方についても BRS 量子化を行なう。ゴーストのメンバーは、s_{ab}、t_{ab}、$\bar{t}_{ab}$ と書く、反対称 2 階テンソルである。ゲージ固定は $GL(4)$ を壊さないようにしなければならない。正しいゲージ固定条件はゲージ場に対応するスピン接続 ${\omega_\mu}^{ab}$ を用いて、

$$\partial_\mu(h\, g^{\mu\nu}\, {\omega_\nu}^{ab}) = 0 \tag{4.8}$$

である。

ラグランジアン密度は、アインシュタインのそれ、2 つのゲージ固定項プラスファデエフ=ポポフ項、および標準理論（もしくはそれを含む素粒子理論）のそれを一般座標変換不変な形にしたもの、そして不変測度は $h\, d^4x$ である。これで作用積分を定義して変分原理を適用すればオイラー=ラグランジュ方程式として場の方程式が得られる。

次に量子化の手続であるが、これはもちろん正準量子化の方法に従う。時間はもちろんウルタイム t を用いるが、それは、a_μ を $a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0$ であるような任意実定数とするとき $a_\mu\, x^\mu$ と書ける。理論は $GL(4)$ 不変なので $t = x^0$ となるよう $a_0 = 1,\, a_1 = a_2 = a_3 = 0$ としても一般性を失わない。

s_{ab} 以外の B 場は正準共役量をもたないのでディラックの拘束系の量子化法を用いると量子化に際してこれらの B 場を正準変数と見なさないでよいことが分かる。s_{ab} だけは ${\omega_\mu}^{ab}$ がすでに四脚場の微分を含むので正準共役量をもつ；従っていわゆる「ラグランジュ・マルチプライヤー場」などではない。

正準交換関係を、基本場とその時間についての 1 階微分との間の同時刻交換関係に書き直す。これは長い計算になるが、最後はきれいな形にまとまるので気持ちがよい。結果は全て閉じた形に書ける。

これで場のオペレーターが一応定義されたはずであるが、これではそれらをどうやって扱えばよいのか分からない。次なる仕事は、場の方程式を、場の量の間の 4 次元交換子に対する微分方程式に書き直すことである。これは思ったより面倒な仕事である。ともかくこれにより 4 次元交換子系に対する連立 2 階微分方程式が得られる。

この微分方程式系の初期条件は同時刻交換関係で与えられる。従ってコーシー問題が成立することになる。ただし q 数なので数学的に厳密なことは分からない。

トリビアルなコーシー問題の解は 0 しかないとすると、オペレーター間の等式は、両辺の差を考えて、それがトリビアルなコーシー問題を満たすことを示すことにより証明される。こうして交換子をとるという結合が定義された代数、すなわちリー代数（ただし無限次元）が得られる。

オペレーター代数が出来上がったので、次にその表現を構成しよう。もちろん無限大自由度の系であるから一意的ではない。いろいろな望ましい条件を課して有意義なものを構成する。

まず真空 $|0\rangle$ が一意的に存在するとする（$\langle 0|0\rangle$=1 に規格化する）。表現はすべてのワイトマン関

数を与えることによってなされる。すなわち n 点関数 $\langle 0|\varphi_1(x^{(1)})\varphi_2(x^{(2)})\cdots\varphi_n(x^{(n)})|0\rangle$ を与えることによってなされる（ここで $\varphi_j(x^{(j)})$ は基本場)。

ワイトマン関数は超関数であって解析関数の複素変数 $x^{(j)0} - x^{(j+1)0}$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ の境界値として定義される。ワイトマン関数の中の隣り合った 2 つの場について、その順序を入れ替えてできるワイトマン関数は、その交換子を挟んだ形になるが、それがオペレーター代数の結果とコンシステントになっていなければならない（つまり交換関係の真空期待値をとった式を再現しなければならない)。1 点関数、すなわち場の真空期待値 $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle$ は上の方法で決まらない。これは任意であるが場の方程式の真空期待値をとったものを再現するという要請や、保存則に矛盾しないという要請により 0 になる。0 でないことが可能なのはスカラー場と四脚場のみである。前者はヒッグス機構でおなじみのものである。

ここからが重要なところである。まず基本的な前提として並進不変性は自発的に破れていないとする。これがなければ物理法則が存在しないことになるから当然である。そうすると $\langle 0|h_\mu{}^a(x)|0\rangle$ は定数行列 ($u_\mu{}^a$ と記す）になる。$\det h_\mu{}^a(x) \neq 0$ から予想されるように、$\det u_\mu{}^a \neq 0$ であることが示せる（証明は脚注[*11]参照)。

このとき時空対称性 $GL(4)$ も内部対称性の $SO(k, 4-k)$　$(0 \leq k \leq 4)$ も自発的に破れる。しかし、両者のある特別な一次結合（$u_\mu{}^a$ に依存）は自発的に破れないことが示せる。つまり時空対称性 $SO(k, 4-k)$ が対称性の自発的破れの結果において生き残るものとして顕在化するのである。

さて (4.5) 式の g の値の符号因子の決定であるが、まず $k \geq 2$ の多時間の場合、解析接続により時間の逆行が可能となりウルタイムの一方向性と矛盾する。$k = 0$ の場合は時間が存在しないのでトリビアルな理論となる。結局唯一許されるのは $k = 1$ の場合すなわち $\zeta_{ab} = \eta_{ab}$ の場合である。つまり得られた対称性はローレンツ対称性に他ならない [8, 11, 12]。これと並進対称性とを合わせると素粒子理論で成立したと同様に、理論のポアンカレ不変性が成り立つ・・・と一見思われるが、しかし重大な相違点がある。それは、ローレンツ対称性が作用積分に最初から導入した基本的対称性ではないということである。電弱理論における電荷保存則と同じく基本的対称性ではないのである。

実際、量子アインシュタイン重力においては、オペレーターの段階で「空間的」な距離にある 2 つの場の量は必ずしも可換（または反可換）ではない。2 点関数 $\langle 0|\varphi_1(x)\varphi_2(y)|0\rangle$ については、ローレンツ不変性から $x-y$ が空間的ならば $\langle 0|\varphi_2(y)\varphi_1(x)|0\rangle$ に等しい。しかし多変数関数になってしまう 3 点もしくはそれ以上のワイトマン関数では、他の変数の存在が邪魔になってそれがいえないのである。

最後にワイトマン関数の計算方法であるが、もちろん何らかの近似法によらねば計算はできない。今のところ考えられるのは κ による冪展開の方法である。例えば $g_{\mu\nu}(x)$ については

$$g_{\mu\nu}(x) = g^{(0)}{}_{\mu\nu}(x) + \kappa\, g^{(1)}{}_{\mu\nu}(x) + \kappa^2 g^{(2)}{}_{\mu\nu}(x) + \cdots\ . \tag{4.9}$$

[*11] 原論文 [8] では、$\langle 0|\, h_\mu{}^a(x)\,|0\rangle\langle 0|\, h^\mu{}_b(x)\,|0\rangle = \delta^a{}_b$ が成立しないのが一般的のように書いたが、実は必ず成立する。なぜなら 右辺 − 左辺 は定義により $\langle 0|\, h_\mu{}^a(x)\, h^\mu{}_b(x)\,|0\rangle_{\mathrm{T}}$ に等しいが、それは $\langle 0|\,[\, h_\mu{}^a(x)\,,\, h^\mu{}_b(x)\,]\,|0\rangle = 0$ の表現として 0 でなければならないからである。

κ による展開といっても、共変的摂動論とは異なる。摂動論では $g_{\mu\nu}(x)$ の第 0 近似を勝手に特定の c 数 $\eta_{\mu\nu}$ に置き、展開パラメーターは $\sqrt{\kappa}$ である。それに対して量子アインシュタイン重力では $g^{(0)}{}_{\mu\nu}(x)$ が q 数であり、展開パラメーターは κ になる。

第 0 近似は正確に計算できる。その結果、κ 展開 0 次でトランケイテッド・ワイトマン関数[*12] が 0 にならないものは次のものである[*13]。

$$\begin{gathered}\langle 0|\, b_{\mu_1}(x_1)\cdots b_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})\, h_{\mu_n}{}^{a}(x)\,|0\rangle_{\mathrm{T}} \quad (n\ge 1)\,,\\ \langle 0|\, b_{\mu_1}(x_1)\cdots b_{\mu_{n-2}}(x_{n-2})\, c^{\mu_{n-1}}(x_{n-1})\,\bar{c}_{\mu_n}(x)\,|0\rangle_{\mathrm{T}} \quad (n\ge 2)\,,\\ \langle 0|\, b_{\mu_1}(x_1)\cdots b_{\mu_n}(x_n)\,|0\rangle_{\mathrm{T}} \quad (n\ge 2)\,,\\ \text{及び、}\\ \text{これらの場の順序を変えたもの}\,.\end{gathered} \tag{4.10}$$

従って B 場を含まないものは、

$$\begin{gathered}\langle 0|\, h_{\mu}{}^{a}(x)\,|0\rangle_{\mathrm{T}}\,(=\langle 0|\, h_{\mu}{}^{a}(x)\,|0\rangle)\,,\\ \langle 0\,|c^{\sigma}(x)\bar{c}_{\tau}(y)\,|0\rangle_{\mathrm{T}}\,,\\ \langle 0|\,\bar{c}_{\tau}(x)c^{\sigma}(y)\,|0\rangle_{\mathrm{T}}\,,\end{gathered} \tag{4.11}$$

のみとなる。この他、内部対称性のゴースト場 s_{ab}、t_{ab}、$\bar{t}_{ab}$ に関するものが同様な形で存在するはずだが未だ確認していない。

$h_{\mu}{}^{a}(x)$ の 1 点以外のすべてのトランケイテッド・ワイトマン関数が 0 だということは、$h_{\mu}{}^{a}(x)$ の n 点関数が $\langle 0|h_{\mu}{}^{a}(x)|0\rangle = u_{\mu}{}^{a}$ の積になるということだ。$u_{\mu}{}^{a}$ を対角化して $\delta_{\mu}{}^{a}$ とすれば $h_{\mu a}=\eta_{\mu a}$ としたのと同じである。このように c 数そっくりの振舞をすることが可能なのは、もちろん状態空間が不定計量の空間だからで、もし正定値計量（すなわちヒルベルト空間）であったなら不可能であった。

九後=小嶋条件の設定や漸近場の構成についてはゲージ場の量子論と同じである。

4.3　量子アインシュタイン重力の特性と実験的検証について

量子アインシュタイン重力は極めて著しい特性がある。ダランベルシアンを $h\,\Box \equiv \partial_\mu(h\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\,\cdot)$ と定義すると、$\Box$ は本質的 BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}$ と可換になる。b_ν についての変分から得られるド・ドンデア条件 (4.7) 式により $\Box x^\mu = 0$ であるから、これの $\boldsymbol{\delta}$ をとると $\Box c^\mu = 0$ が得られる。この式は $\bar{c}_\mu$ 変分によるオイラー=ラグランジュ方程式である。同様に $\Box \bar{c}_\mu = 0$ なので、これの本質的 BRS 変換をとると $\Box b_\mu = 0$ が得られる。この方程式は $g_{\mu\nu}$ 変分によるオイラー=ラグランジュ方程式である量子アインシュタイン方程式の共変微分として得られる。

以上を「16 次元座標」、$X = \{\, x^\mu,\, b_\rho,\, c^\sigma,\, \bar{c}_\tau \,\}$、でまとめると $\Box X = 0$ となる。これから 16 次元並進の保存カレント

$$h\, g^{\mu\nu}\partial_\nu X$$

[*12] トランケイテッドとは、真空を中間状態にとった部分を差し引いたものを意味する。例えば $\langle 0|\varphi_1(x)\varphi_2(y)|0\rangle_{\mathrm{T}} = \langle 0|\varphi_1(x)\varphi_2(y)|0\rangle - \langle 0|\varphi_1(x)|0\rangle\langle 0|\varphi_2(y)|0\rangle$ である。

[*13] 時空が 2 次元ならこれが厳密解である [13]。

や 16 次元回転の保存カレント

$$h\,g^{\mu\nu}(\partial_\nu X\cdot Y - X\,\partial_\nu Y)$$

が得られる。これらから作られる生成子は 16 次元のポアンカレ超対称性 $IOSp(8,8)$ (16 次元非斉次オルソ・シンプレクティック超代数）を成すことが、実際に交換関係を用いて確かめられる。

このようにゴースト場とではあるが、時空 x^μ が自然に 16 次元超空間へと形式的に拡張されることは、極めて著しい特性である。過去において、時空 x^μ を、場を時空の成分のように見なして、拡大しようとした試みはいくつか考えられたようだが、何れも失敗している。このように自然に時空と場の「民主主義」が成立したのは初めてのことである。

ディラック場などすべての場をスカラー場としたとき、この理論の作用積分は $GL(4)$ の一部分としてローレンツ不変であるが、量子場の微視的因果律（空間的距離の 2 点に関する量子場の（反）可換性）は成り立たない。後者は前者の自明な結果ではないのである。共変的摂動論で $g_{\mu\nu}$ の $\sqrt{\kappa}$ 展開 0 次の項を手で $\eta_{\mu\nu}$ と置いたり、ゲージ固定項にポンと $\eta_{\mu\nu}$ を挿入してみたりしてきた今までのアプローチに対する反省を促がすものといえよう。

正しい素粒子理論でのローレンツ対称性は、自発的破れの結果現われる 2 次的なものである。これから重大な次の結論が得られる：自発的に破れた超対称性 (いわゆる SUSY) は正しくない。この予言通り、SUSY の非存在は実際上、実験的に明らかになったと思ってよいだろう。

量子アインシュタイン重力のもっと積極的な予言は角運動量間に働くべき「第 3 の基本的長距離力」の存在である [14]。これはスカラー保存量をソースとするクーロン力、ベクトル保存量をソースとする重力（万有引力）と並ぶべき反対称テンソル保存量である角運動量テンソル（のスピン角運動量部分）をソースとする力である。この力はカー・ブラックホールの連星系の合体現象において観測されるかも知れない。

量子アインシュタイン重力では微視的因果律が必ずしも成立しない。従って CPT 定理が使えないので CPT 不変性は保証されない。一般には、粒子とその反粒子でオーダー κ の質量の食い違いがあるだろう。本当にそうなっているかどうかは、目下検討中である [15]。

5 おわりに

ニュートン力学の時空では時間は空間とは全く独立していた。それだから正準形式が素直に使えた。ニュートンの絶対時間に対しアインシュタインは時間は相対的であって、空間と一緒にして考えなければならないことを示した。

量子アインシュタイン重力ではこの矛盾を解決した。時空はもともと 4 次元アフィン空間であるから時間は別にウルタイムとして設定した。アフィン空間からウルタイムへの写像の原像の集合として時空を定義したのである。これにより両者の矛盾を解消し、すっきりした理論を構成することができたのである。

量子アインシュタイン重力では CPT 不変性が破れている可能性がある。従って粒子とその反粒子でオーダー κ の質量差が生ずる可能性がある。

[謝辞]

筆者はかなり以前から両脚と両眼の難病をかかえているが、最近、新たな病で緊急入院した。その後、病床にあってこの小論の原稿を執筆した。その極めて読みにくい手書きの原稿の TEX 入力を吉田律氏[*14]にお願いした。そのさい、同氏から多くのコメントを頂き、また文献表を作成して頂いた。吉田律氏に深く感謝する。

この小論を書くにあたって、原論文を検討することができず、すべて記憶にたよったので、思い違いがあるかもしれない。その点ご容赦頂きたい。

文献

[1] 中西 襄, 素粒子論研究・電子版 **6**, 1 (2010).
[2] 中西 襄, **場の量子論**, 第 3 章 7 節 (培風館, 1975).
[3] T. Kugo and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **66**, 1 (1979).
[4] 九後 汰一郎, 日本物理学会誌 **77**-3, 171 (2022).
[5] N. Nakanishi and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. **71**, 1359 (1984).
[6] N. Nakanishi and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. **72**, 1197 (1984).
[7] 中西 襄, 数学・物理通信 **7**-1, 2 (2017).
[8] N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A29**-6, 1450034 (2014).
[9] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, Chap. 5 (World Scientific, Singapore, 1990).
[10] N. Nakanishi, Publications RIMS **19**, 1095 (1983).
[11] 中西 襄, 素粒子論研究・電子版 **15**, 3 (2013).
[12] 中西 襄, 素粒子論研究・電子版 **20**, 1 (2015).
[13] M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **86**, 1087 (1991).
[14] N. Nakanishi and R. Yoshida, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 043B06 (2020).
[15] 吉田 律, 計算中.

[*14] 亜細亜大学教授. e-mail: rysd@asia-u.ac.jp