離散ハイゼンベルグ群の自己同型群
-$N = 2(2k+1)$ の場合-

古居 泰人

福井大学工学研究科　数理科学コース

北信越地区　素粒子論グループ研究会
2022 年 7 月 8 日

目次

1. 目的
2. 導入
3. 群の拡大と準同型切断および群論的準備
4. 準同型切断
5. 結果
6. まとめ

目的

奇数格子上では spliting が存在していることが分かっているが、偶数格子上ではまだ解明されていない。
そこで偶数格子上 $N = 2(2k+1)$ の場合の、自己同型群 Tp_N の構造を群の拡大とその spliting から考察していく。

Weyl 量子化について

Weyl 量子化とは、群構造の特性を用いた量子化である。

Weyl 量子化

位相点作用素 $\Delta(q, p)$ を用いると, 古典的なハミルトニアンを正準量子化されたハミルトニアン演算子に変換できる.

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \mathcal{H}(q, p) \Delta(q, p)$$

位相点作用素は古典的位相点 (q, p) に対応する量子力学的な演算子.

$$\begin{array}{ccc} (q, p) & \rightarrow & \Delta(q, p) \\ \text{古典的位相点} & & \text{位相点作用素} \end{array}$$

群の定義について

集合 G とその集合上の二項演算 $\cdot$ の組が以下の条件を満たすとき、その集合を群とする。

群の定義

1. 結合法則が成り立つ:
   $G \ni^\forall a, ^\forall b, ^\forall c$ に対し、$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ が成立する。
2. 単位元が存在:
   $G \ni^\forall g$ に対し、$e \cdot g = g \cdot e = g$ となる e が存在する。
3. 逆元が存在:
   $G \ni^\forall g$ に対し、$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = g$ となる g^{-1} が存在する。

Abel 群と準同型

Abel 群 (可換群)

ある群の任意の要素 a,b に対して、$a \cdot b = b \cdot a$ が成り立つとき、その群は Abel 群であるという。

準同型

写像 $f : G \to H$ で、

$$f(ab) = f(a)f(b), (a, b \in G)$$

を満たすものである。

離散 Heisenberg 群 ε_N

次の群の演算則を持つ記号,Q,P を使って離散 Heisenberg 群を定義する. ここで、$\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ である。

離散 Heisenberg 群 ε_N

$$PQ = \omega QP, \ \ P^N = Q^N = \omega^N = 1$$

$$\varepsilon_N \ni \omega^l Q^n P^{-m}$$

自己同型群 $T\mathfrak{p}_N$

$$P'Q' = \omega Q'P', \ \ P'^N = Q'^N = 1$$

$$\varepsilon_N \ni Q', P'$$

$T\mathfrak{p}_N \ni T \qquad T(Q) = Q', T(P) = P'$ として具体的に決定することができる。

自己同型群 Tp_N

$P'Q' = \omega Q'P'$, $P'^N = Q'^N = 1$ の条件から以下のように決まる。

自己同型群 Tp_N

$$T(Q) = Q' = \omega^{l_1} Q^{\delta} P^{-\beta}$$

$$T(P) = P' = \omega^{l_2} Q^{-\gamma} P^{\alpha}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

このことから、自己同型群 Tp_N から離散シンプレクティック群 Sp_N への写像 $\sqcap$ が誘導され, 次の短完全列が得られる.

短完全列

$$0 \to \Gamma_N \xrightarrow{i} Tp_N \xrightarrow{\sqcap} Sp_N \to 1$$

$\Gamma_N = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$

離散シンプレクティック群について

シンプレクティック行列 S の集合は群構造を持つ。

Sp_N:Symplectic 群

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_N\}$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad , \quad \mathrm{mod}\, N$$

$\tilde{S}p_{2N}$

$$\mathbb{Z}_{2N} = \{0, 1, \cdots, 2N-1\}$$

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{2N}\}$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, 1+N \pmod{2N}$$

群の拡大と splits(切断)

群の拡大は、一般的には正規部分群と剰余群を使い群を記述することを意味します。

正規部分群

E を群、A を E の部分群とする。
$E \ni^{\forall} x$ に対して、$xA = Ax$ となるとき、A を正規部分群と呼ぶ。

群の拡大

「E が A による G の拡大」とは短完全列

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1, \mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, \pi$$

が存在することを言う。

切断 s

短完全列に対し,$\pi \cdot s = id_G$ を満たす写像を切断という。

$$s : G \to E$$

spliting

次の完全列

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

において、$\pi \cdot s = id_G$ となる準同型切断 $s : G \to E$ があるとき
この完全列は"split extensions"とよばれ、A が Abel 群の時、E は半直積 $E \cong A \rtimes G$ と表すことができる。

このように半直積を用いて群を表現することため、準同型切断を見つけることは群の構造を見つけることにつながる。

孫子の定理 (中国の剰余定理)

$p = p_1 \times p_2$ について、p_1 と p_2 が互に素であるとき

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2}$$

となる。

これは $\mathbb{Z}_p$ 上の行列環 $M(2, \mathbb{Z}_p)$ にも拡張され、
$N = 2(2k + 1)$ の場合

$$Sp_N \cong Sp_2 \times Sp_{2k+1}$$

となることが分かる。

$0 \to \Gamma_N \xrightarrow{i} T\mathfrak{p}_N \xrightarrow{\Pi} S\mathfrak{p}_N \to 1$ において、
奇数格子上のある離散ハイゼンベルグ群の自己同型
$T_{S,\zeta}(Q) = Q^{\delta} P^{-\beta} \omega^{-\zeta_Q}$
$T_{S,\zeta}(P) = Q^{-\gamma} P^{\alpha} \omega^{-\zeta_P}$
$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$、$\zeta = (\zeta_Q, \zeta_P) \in Z_N \times Z_N$
に対して、次の切断 Σ_0 が準同型になることがわかっている。

切断 Σ_0

$\Sigma_0(S)(Q) = T_{S,\zeta_0(S)}(Q) = Q^{\delta} P^{-\beta} \omega^{\delta\beta(N-1)/2}$
$\Sigma_0(S)(P) = T_{S,\zeta_0(S)}(P) = Q^{-\gamma} P^{\alpha} \omega^{\gamma\alpha(N-1)/2}$
$\zeta_{0Q}(S) = \delta\beta\frac{N-1}{2}$、$\zeta_{0P}(S) = \gamma\alpha\frac{N-1}{2}$

偶数格子上では一般的な準同型切断は見つかっていない。ここで、
$N = 2(2k+1)$ の場合について以下の図のように考察した

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{S}p_{2N} \arrow[ddd, "{[2]}"] & \cong & \tilde{S}p_4 & \times & Sp_{2k+1} & \\
 & & & Sp_2 \arrow[u, "{[1]}"'] & \times & Sp_{2k+1} \arrow[u, "id"'] & \\
 & & & \wr\| & & & \\
\Gamma \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \arrow[r, "i"] & Tp_N \arrow[rr, "\Pi"] & & Sp_N \arrow[rr] \arrow[ll, bend right, "\Sigma"'] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Sp_2 から $\tilde{Sp_4}$ への spliting

Sp_2 の要素

$$H_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; H_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_{QP} = H_Q H_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; H_{PQ} = H_P H_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この $H_Q.H_P$ を使えば、Sp_2 の要素を全て表現できる。このことから、この H_Q,H_P は生成子という。

Sp_2 の要素の性質

$$H_Q{}^2 = H_P{}^2 = I$$
$$H_Q H_P H_Q = H_P H_Q H_P = J$$

$S\mathfrak{p}_2$ の構造

$S\mathfrak{p}_2$ の群表

	I	J	H_Q	H_P	H_{QP}	H_{PQ}
I	I	J	H_Q	H_P	H_{QP}	H_{PQ}
J	J	I	H_{QP}	H_{PQ}	H_Q	H_P
H_Q	H_Q	H_{PQ}	I	H_{QP}	H_P	J
H_P	H_P	H_{QP}	H_{PQ}	I	J	H_Q
H_{QP}	H_{QP}	H_P	J	H_Q	H_{PQ}	I
H_{PQ}	H_{PQ}	H_Q	H_P	J	I	H_{QP}

$S\mathfrak{p}_2$ の H_Q, H_P から持ち上がる $\widetilde{S\mathfrak{p}}_4$ の要素を探し、その 2 つの要素を用いて $S\mathfrak{p}_2$ の群表と一致する表がかけるかを確認することにより、spliting の有無を調べる。

Sp_2 から $\tilde{Sp}_4$ への spiting

${H_Q}^2 = {H_P}^2 = 1$ が満たされる $\tilde{Sp}_4$ の要素を $H_Q{}'$,$H_P{}'$ とする。

表が一致する $H_Q{}'$ と $H_P{}'$ の組み合わせ

$$
\left(\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}\right),\ \left(\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\right),
$$
$$
\left(\begin{pmatrix}3&3\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\3&1\end{pmatrix}\right),\ \left(\begin{pmatrix}3&3\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}\right),
$$
$$
\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}\right),\ \left(\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\right),
$$
$$
\left(\begin{pmatrix}1&3\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\3&1\end{pmatrix}\right),\ \left(\begin{pmatrix}1&3\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}\right)
$$

よって Sp_2 から $\tilde{Sp}_4$ への spliting が 8 通り存在する。

$\tilde{Sp}_4$ の Kernel

Ker π の要素

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$\tilde{Sp}_4$ の Kernel の可換性

$$1 \to \mathrm{Ker}\,\pi \xrightarrow{i} \tilde{Sp}_4 \xrightarrow{\pi} Sp_2 \to 1$$

において、Ker π は Abel 群である。また Ker $\pi \cong {\mathbb{Z}_2}^4$ である。
(π:$\tilde{Sp}_4$ の要素を mod2 で考える)

結果

$Sp_2 \to \tilde{Sp}_4$ への spiting

$Sp_2 \to \tilde{Sp}_4$ への spiting は以下のような準同型写像 T で与えられる。

$$T(S) = VS(V + Td) + Td$$

$$V \in \operatorname{Ker}\pi, Td = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

この写像は $\operatorname{Ker}\pi$ のによって決まるため、16 通り存在し、spiting のが 16 通り存在する可能性を示している。

$\tilde{Sp}_4$ の構造

spliting が存在することから、$\tilde{Sp}_4$ の構造は次のように書ける。

$$\tilde{Sp}_4 \cong {\mathbb{Z}_2}^4 \rtimes Sp_2$$

偶数格子上の準同型切断

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{Sp}_{2N} \arrow[dd, "{[2]}"] & \cong & \tilde{Sp}_4 & \times & Sp_{2k+1} \\
 & & & Sp_2 \arrow[u] & \times & Sp_{2k+1} \arrow[u, "id"'] \\
\Gamma \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \arrow[r, "i"] & Tp_N \arrow[rr, "\Pi"] & & Sp_N \arrow[u, phantom, "\cong"] \arrow[ll, bend right, "\Sigma"'] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{Sp}_{2N} \arrow[dd, "{[2]}"] & \cong & \tilde{Sp}_4 & \times & Sp_{2k+1} \\
 & & & Sp_2 \arrow[u] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \times & Sp_{2k+1} \arrow[u, "id"'] \\
\Gamma \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \arrow[r, "i"] & Tp_N \arrow[rr, "\Pi"] & & Sp_N \arrow[ll, bend right, "\Sigma"'] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}
$$

計算方法　$\tilde{Sp}_{2N} \longrightarrow Tp_N$

$\tilde{Sp}_{2N}$ から離散ハイゼンベルグ群の自己同型 Tp_N に対する切断として、次の切断 Σ を考える。

切断 Σ

$$\Sigma(S)(Q) = \breve{\omega}^{\beta\delta(N-1)} Q^{\delta} P^{-\beta} \breve{\omega}^{n_Q(S)}$$

$$\Sigma(S)(P) = \breve{\omega}^{\alpha\gamma(N-1)} Q^{-\gamma} P^{\alpha} \breve{\omega}^{n_P(S)}$$

ここで、

$$\breve{\omega} = \omega^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{2N}}, \quad \tilde{Sp}_{2N} \ni S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ or } (1+N), \quad \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathbb{Z}_{2N}$$

$$\{n_Q(S), n_P(S)\} \in \mathbb{Z}_{2N}$$

考え方

切断 Σ が準同型になるような $(n_Q(S), n_P(S))$ の組が存在するか

$\tilde{Sp}_{2N} \to Tp_N$

計算方法

$S_1, S_2 \in \tilde{Sp}_{2N}$ を用いて

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

P, Q についての $\Sigma(S_1)\Sigma(S_2)$ と $\Sigma(S_1 S_2)$ を計算し比較する。

まず、Q についての計算をする。

$$\Sigma(S_1)\Sigma(S_2)(Q)$$

$$= \breve{\omega}^{(N-1)(\beta_2\delta_2)+\beta_1\delta_1\delta_2(N-\delta_2)-\alpha_1\gamma_1\beta_2(N+\beta_2)-2\beta_1\gamma_1\beta_2\delta_2}$$

$$Q^{\delta_1\delta_2+\gamma_1\beta_2} P^{-(\beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2)} \breve{\omega}^{\delta_2 n_Q(S_1)-\beta_2 n_P(S_1)+n_Q(S_2)}$$

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2 & \beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2 \\ \gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\Sigma(S_1S_2)(Q)$$

$$= \breve{\omega}^{(N-1)(\beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2)(\delta_1\delta_2+\gamma_1\beta_2)} Q^{\delta_1\delta_2+\gamma_1\beta_2} P^{-(\beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2)} \breve{\omega}^{n_Q(S_1S_2)}$$

同様に、P についての計算をする。

$$\Sigma(S_1)\Sigma(S_2)(P)$$
$$= \breve{\omega}^{(N-1)(\alpha_2\gamma_2)-\beta_1\delta_1\delta_2(N+\gamma_2)+\alpha_1\gamma_1\alpha_2(N-\alpha_2)-2\beta_1\gamma_1\alpha_2\gamma_2}$$
$$Q^{\delta_1\delta_2+\gamma_1\beta_2}P^{-(\beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2)}\breve{\omega}^{-\gamma_2 n_Q(S_1)+\alpha_2 n_P(S_1)+n_P(S_2)}$$

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2 & \beta_1\delta_2+\alpha_1\beta_2 \\ \gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\Sigma(S_1S_2)(P)$$
$$= \breve{\omega}^{(N-1)(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2)}Q^{-(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2)}P^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2}\breve{\omega}^{n_P(S_1S_2)}$$

$\tilde{Sp}_{2N} \rightarrow Tp_N$

それぞれを比較し、$n_Q(S), n_P(S)$ に関する条件式を導く。

$$n_Q(S_1S_2) - \delta_2 n_Q(S_1) + \beta_2 n_P(S_1) - n_Q(S_2) = (N-1)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 - 1)\beta_2\delta_2$$

$$n_P(S_1S_2) + \gamma_2 n_Q(S_1) - \alpha_2 n_P(S_1) - n_P(S_2) = (N-1)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 - 1)\alpha_2\gamma_2$$

この二つの関係式をまとめると

$$\begin{pmatrix} n_Q(S_1S_2) \\ n_P(S_1S_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_Q(S_2) \\ n_P(S_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_2 & -\beta_2 \\ -\gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_Q(S_1) \\ n_P(S_1) \end{pmatrix} = (N-1)(\det S_1 - 1) \begin{pmatrix} \beta_2\delta_2 \\ \alpha_2\gamma_2 \end{pmatrix}$$

$n_Q(S), n_P(S)$ に関する条件式

$$n(S_1S_2) - n(S_2) - \det S_2({S_2}^{-1})n(S_1) = (N-1)(\det S_1 - 1)A$$

この時、

$$n(S) = \begin{pmatrix} n_Q(S) \\ n_P(S) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \beta_2\delta_2 \\ \alpha_2\gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\det S_2({S_2}^{-1}) = \begin{pmatrix} \delta_2 & -\beta_2 \\ -\gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

とした。

結果

以下の $n(S)$ は先の条件式を満たす

$n(S)$

$$n(S) = \mathrm{stg}\,(S) N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{stg}\,(S) = \frac{\det S - 1}{N}$$

したがって、$\tilde{Sp}_{2N} \to Tp_N$ において
次の切断 Σ が準同型となることがわかった。

切断 Σ

$\Sigma(S)(Q) = \tilde{\omega}^{\beta\delta(N-1)} Q^{\delta} P^{-\beta} \tilde{\omega}^{\mathrm{stg}\,(S)N}$
$\Sigma(S)(P) = \tilde{\omega}^{\alpha\gamma(N-1)} Q^{-\gamma} P^{\alpha} \tilde{\omega}^{\mathrm{stg}\,(S)N}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{Sp}_{2N} \arrow[dd] & \cong & \tilde{Sp}_4 & \times & Sp_{2k+1} \\
 & & & Sp_2 \arrow[u, "{[1]}"'] \arrow[d, phantom, "\wr\!\!\mid\!\mid"] & \times & Sp_{2k+1} \arrow[u, "id"'] \\
\Gamma \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \arrow[r, "i"] & Tp_N \arrow[rr, "\Pi"] & & Sp_N \arrow[ll, bend right, "\Sigma"'] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}
$$

まとめ

まとめ

したがって、$N = 2(2k+1)$ の場合で、$Sp_N \to Tp_N$ に準同型切断が存在することがわかった。
そして、群の拡大とその spliting から離散ハイゼンベルグ群の自己同型群 Tp_N の構造は、$Tp_N \cong \Gamma_N \rtimes Sp_N$ と表すことができる。
今後の課題として、$Sp_2 \to \tilde{Sp}_4$ における切断と $\tilde{Sp}_{2N} \to Tp_N$ の切断を、一つの $Sp_N \to Tp_N$ の具体的な準同型切断として構成することが挙げられる。