

グラディエントフローさせた U(1)格子ゲージ理論におけ る閉じ込めと磁気単極子

堀越優弥(新潟大自然)

共同研究者：江尻信司(新潟大理)

北陸合宿(2022/7/8, 10, 23)

動機

- 格子QCDの計算においてグラディエントフロー法は有効である
- Small Flow time eXpansion(SFtX)法ではフローさせた演算子を用いて物理量を計算する
- フローの前後で系の持つ基本的な性質は変わってはいけない
 - 閉じ込め相は閉じ込め相のまま、非閉じ込め相は非閉じ込め相のまま
- 場を粗視化して作用が小さくなるように発展し、粗視化が進むにつれて場の強さ $F_{\mu\nu}$ が小さくなる
- 場の強さが小さくなるにもかかわらず、閉じ込め相でフローさせた場は閉じ込めの性質を維持する
- なぜ閉じ込めの性質が維持されるのかを議論する
- フローに対して安定な何かがあるのではないか

グラディエントフロー法

- 物理量の計算に有効 (SFtX法など)
- ゲージ場 $A_\mu(x)$ に仮想的な時間 $t \geq 0$ を導入し以下の時間発展を考える
 - ある種の拡散方程式を解く \Rightarrow 粗視化

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x), \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

$$G_{\mu\nu}(t, x) \equiv \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\nu^b(t, x) B_\mu^c(t, x)$$

($G_{\mu\nu}(t, x)$ は変形されたゲージ場の強さ)

- 右辺はゲージ場の作用のゲージ場についての汎関数微分にあたる

$$\partial_t B_\mu(t, x) = - \frac{\delta S(t)}{\delta B_\mu(t, x)}$$

- 作用のグラディエントになっているのでグラディエントフロー
- 作用が小さくなるように発展する
- 量子揺らぎを減らす \Rightarrow 統計誤差が減る
- もとの格子の情報が薄れる \Rightarrow 連続極限がとりやすくなる
- 粗視化することにより理論が正則化されているので、連続極限をとることによる新たな発散は起きない

SFtX法 (Small flow time expansion 法)

H. Suzuki, PTEP 2013, 083B03 (2013)

- グラディエントフローさせた場の演算子から、もとの場の物理量の計算をする
 - もとの場の演算子を計算をすることは、少なくともフロータイム t が小さいときは可能
 - ⇒ t 依存性を調べ、 t が小さいところに外挿する
- その連続極限で物理量を定義すれば、例えば、エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ のように、格子上で定義が難しい量も定義できる

$$T_{\mu\nu}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \{c_1(t) U_{\mu\nu}(t, x) + 4c_2(t) \delta_{\mu\nu} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle_0]\}$$

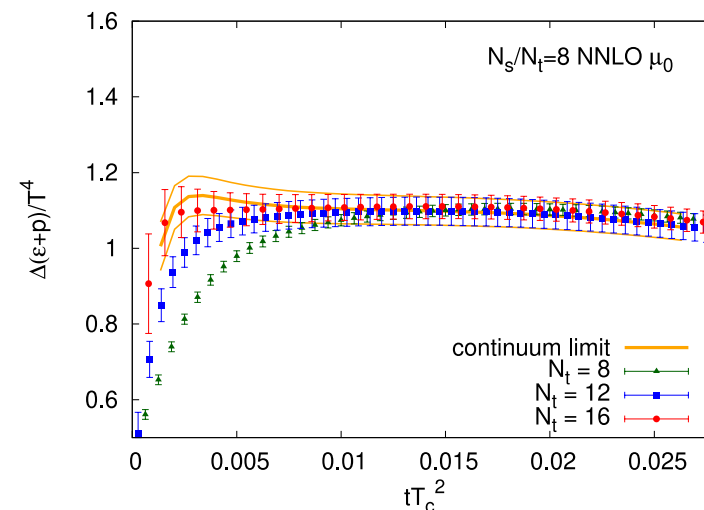
$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}(t, x) G_{\nu\rho}(t, x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}(t, x) G_{\rho\sigma}(t, x)$$

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4} G_{\mu\nu}(t, x) G_{\mu\nu}(t, x)$$

クエンチQCDの一次相転移点での潜熱

(二相間のエネルギー差) Shirogane et al., PTEP, 2021, 013B08

- 体積・温度が同じで、格子間隔が違う結果を比較
- flowさせると格子間隔依存性がなくなる (オレンジの線：連続極限)
- $t = 0$ への外挿値は微分法による潜熱の結果と一致



U(1)格子ゲージ理論

- 今回は簡単のためSU(3)ではなくU(1)の場合について考える
- U(1)格子ゲージ理論の場合にも相転移があり、閉じ込め・非閉じ込めの性質を見ることができる
- 今回はトポロジカルに安定な量として磁気単極子を考えたい
 - 以前から閉じ込めに重要な役割を果たすと考えられてきた
- U(1)格子ゲージ理論の作用

T. Banks, R. Myerson and J. Kogut, Nucl. Phys. B 129, 493 (1997)

$$\begin{aligned}
 S &= -\beta \sum_x \sum_{\mu > \nu} \text{Re}[U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^*(x + \hat{\nu})U_\nu^*(x)] \\
 &= -\beta \sum_x \sum_{\mu > \nu} \cos(\theta_{\mu\nu}(x)) \\
 &\left(\cong -\beta \sum_x \sum_{\mu > \nu} \cos(a(\partial_\nu\theta_\mu - \partial_\mu\theta_\nu)) \right)
 \end{aligned}$$

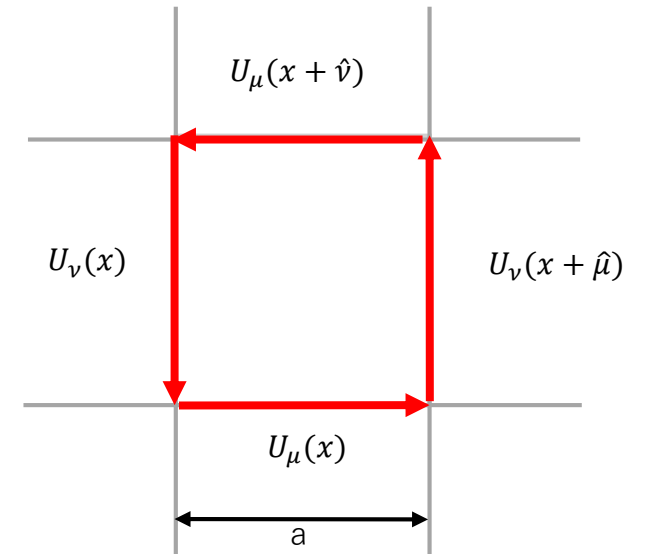
ここで

$$U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}, \quad \theta_\mu = agA_\mu, \quad (-\pi < \theta_\mu \leq \pi)$$

$$\beta = \frac{1}{g^2}$$

$$\theta_{\mu\nu}(x) = \theta_\mu(x) + \theta_\nu(x + \hat{\mu}) - \theta_\mu^*(x + \hat{\nu}) - \theta_\nu^*(x), \quad (-4\pi < \theta_{\mu\nu}(x) \leq 4\pi)$$

- g はゲージ結合定数で g が大きいときは閉じ込め相で、小さいときは非閉じ込め相



U(1)格子ゲージ理論の閉じ込め相転移

- ウィルソンループは、空間方向の長さR、時間方向の長さTの大きさを持つ長方形のループ
- ウィルソンループの振る舞いで系の相を分類できる

$$\langle W(R, T) \rangle \cong \exp(-\sigma RT) \quad (\text{面積則})$$

$$\langle W(R, T) \rangle \cong \exp(-c(R + T)) \quad (\text{周辺則})$$

面積則:閉じ込め相

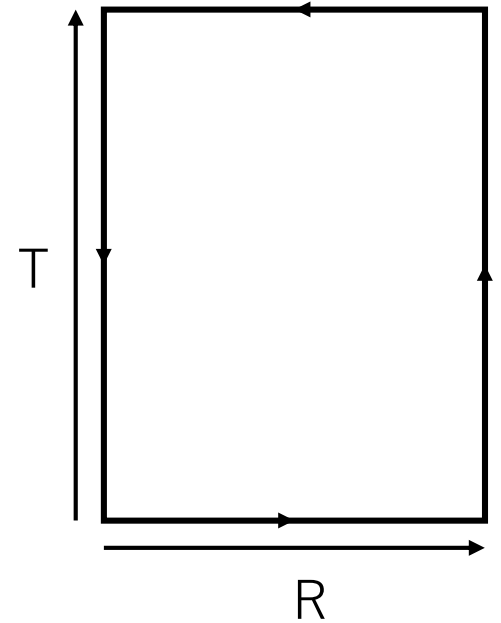
周辺則:非閉じ込め相

- 簡易的にストリングテンション σ を見積もる方法としてクロイツ比がある

$$\chi(i, j) = -\log \frac{w(i, j) \times w(i + 1, j + 1)}{w(i + 1, j) \times w(i, j + 1)} \sim \sigma$$

$\chi(i, j) \neq 0$: 閉じ込め相

$\chi(i, j) = 0$: 非閉じ込め相



U(1)格子ゲージ理論の閉じ込め相転移(有限温度)

- 統計力学における分配関数

$$Z = \sum_n \langle n | \exp(-\hat{H}/T) | n \rangle = \sum_n \exp(-E_n/T)$$

- 経路積分における遷移振幅

$$\langle \psi_F | \exp(-i\hat{H}t) | \psi_I \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int \mathcal{L} d^4x \right] = \int \mathcal{D}\psi \exp[iS]$$

- $t = -i/T$ とする (ユークリッド化) (松原形式)

$$\langle \psi_F | \exp(-\hat{H}/T) | \psi_I \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp[-S_E], \quad (S_E \text{はユークリッド化された作用})$$

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{T}, \quad \psi(\vec{x}, \tau) = \psi(\vec{x}, \tau + \frac{1}{T}) : \text{周期境界条件}$$

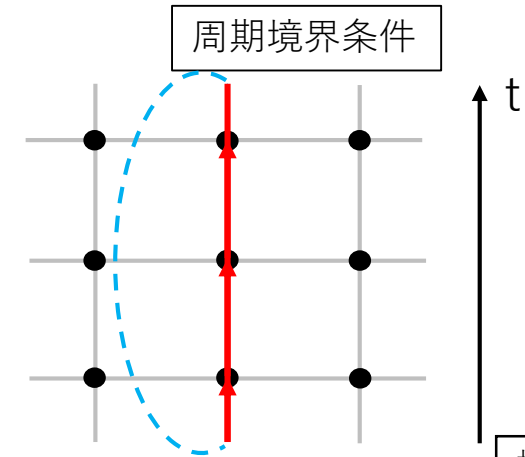
- ポリヤコフープ L の振る舞いで相を分類できる
 - 周期境界条件をとった時間方向のリンク変数の積で定義される

$$\langle L \rangle = \exp \left[-\frac{F[J] - F[0]}{T} \right] = \exp \left[-\frac{\Delta F}{T} \right]$$

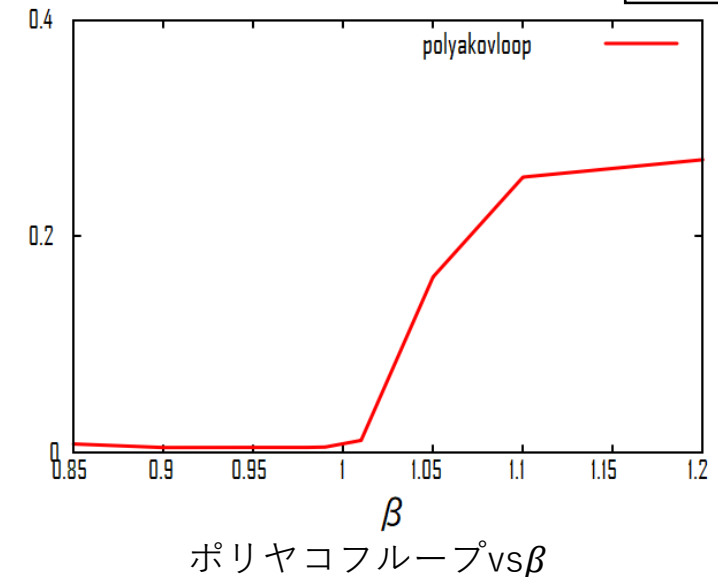
$F[J]$ はカレントがあるときの自由エネルギー

$$\langle L \rangle = 0 \Rightarrow \Delta F = \infty : \text{閉じ込め相}$$

$$\langle L \rangle \neq 0 \Rightarrow \Delta F \neq \infty : \text{非閉じ込め相}$$



格子サイズ: $32^3 \times 8$
 フロー時間: $t=2$
 統計数: 2000



U(1)格子ゲージ理論の閉じ込め相転移

- 閉じ込め相転移はセンター対称性の自発的対称性の破れ
- センター対称性

次のようなある時刻のリンクについての変換を考える

$$U_4(x) \rightarrow \omega U_4(x), \quad (\omega = e^{i\phi})$$

この変換に対して作用は不変である

$$S \rightarrow \text{Re}[U_i(x)\omega U_4(x + \hat{\mu})U_i^*(x + \hat{\nu})\omega^* U_4^*(x)] = S$$

不変測度は群の元をかけても不変

$$DU = D(UV), \quad V \in U$$

⇒ 配位の生成確率が不変

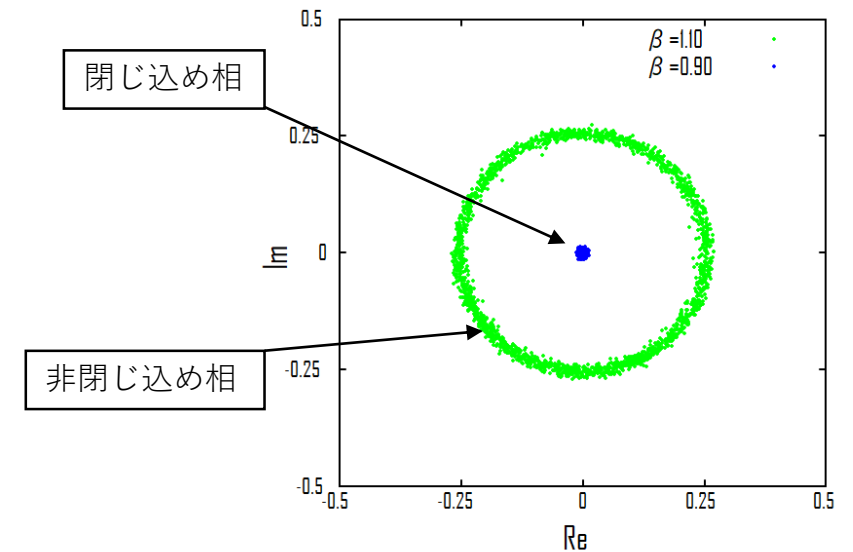
- ポリヤコフープは次のように変換する

$$L \rightarrow \omega L$$

$$\langle L \rangle \rightarrow \omega \langle L \rangle$$

- 対称性が自発的に破れない限り、 $\langle L \rangle$ は0でポリヤコフープはセンター対称性の破れのオーダーパラメータ
- 閉じこめ相(対称相)では取りうる最低エネルギー状態は1つで、非閉じ込め相(破れ相)では無限にあるのでU(1)の場合はこのような分布となる
- 体積が無限大になると複数ある最低エネルギー状態の内1つの状態が選ばれ、対称性が破れる

空間平均をとったポリヤコフープの分布



グラディエントフロー方程式

- 今回は以下のような式を考えた

- $U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}, \quad \theta_\mu = agA_\mu, \quad (-\pi < \theta_\mu \leq \pi)$

- $A_\mu(x) \Rightarrow \theta_\mu(x), \quad S \Rightarrow = -\beta \sum_x \sum_{\mu>\nu} \cos(\theta_{\mu\nu}(x))$

$$\frac{\partial \theta_\mu(x)}{\partial (t/a^2)} = -\frac{\partial S}{\partial \theta_\mu(x)} = \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \sum_x \sum_{\mu>\nu} \cos(\theta_{\mu\nu}(x))$$

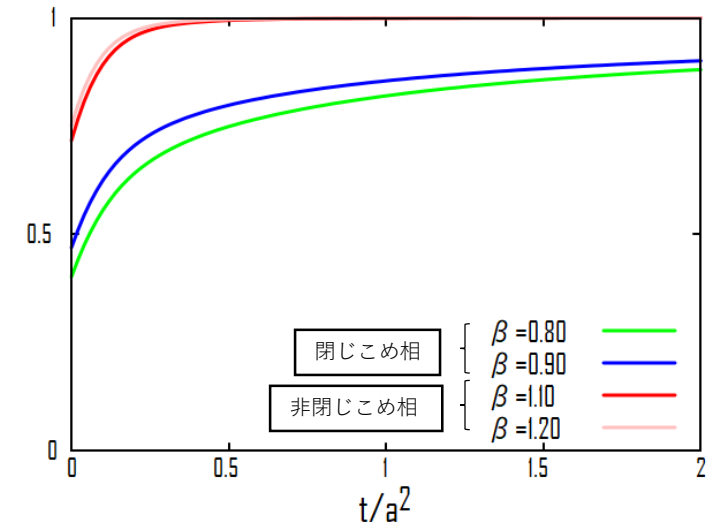
$$= \sum_{\mu \neq \nu} [\sin \theta_{\mu\nu}(x) - \sin \theta_{\mu\nu}(x - \hat{\nu})]$$

- フローに対するプラケットの振る舞い
- プラケットが一番小さな正方形に沿った積

$$\sim 1 - (F_{\mu\nu})^2$$

- プラケットはフローさせると $F_{\mu\nu}$ が小さくなるので1に近づく

格子サイズ:16⁴
フロー時間: t=2
配位数:10000



プラケットvsフロー時間

作用の周期性

- リンク変数の積を次のように書き換える

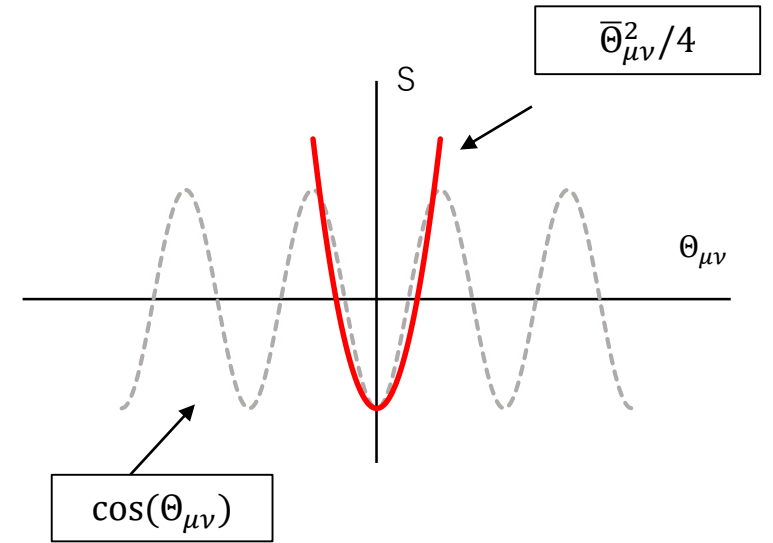
$$\begin{aligned}U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^*(x + \hat{\nu})U_\nu^*(x) &= e^{i\Theta_{\mu\nu}(x)} \\ &= e^{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}(x)} \\ &= e^{iga^2F_{\mu\nu}}\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{\Theta}_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + 2\pi n_{\mu\nu}$, $(-\pi < \bar{\Theta} \leq \pi)$

- U(1)格子ゲージ理論の作用は連続極限で以下のようなになる

$$S = -\beta \sum_x \sum_{\mu > \nu} \cos(\Theta_{\mu\nu}(x)) \rightarrow \frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu})^2 + \text{const.}$$

- 二次関数に近似する際に $F_{\mu\nu}^2 \sim \bar{\Theta}_{\mu\nu}^2$ のほうが適切
- グラディエントフローでは $F_{\mu\nu}$ を小さくするが、 $n_{\mu\nu}$ には寄与しない
- この $n_{\mu\nu}$ が重要な役割をする



磁気単極子

T. Banks, R. Myerson and J. Kogut, Nucl. Phys. B 129, 493 (1997).
 T.A. DeGrand and D. Toussaint, Phys. Rev. D 22, 2478 (1980).

- $\Theta_{\mu\nu}$ はビアンキ恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Theta_{\rho\sigma}(x) = 0$ を満たす
- $\bar{\Theta}_{\mu\nu}(x)$ はビアンキ恒等式を 2π の整数倍分満たさない

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\bar{\Theta}_{\rho\sigma}(x) = -2\pi\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu n_{\rho\sigma}$$

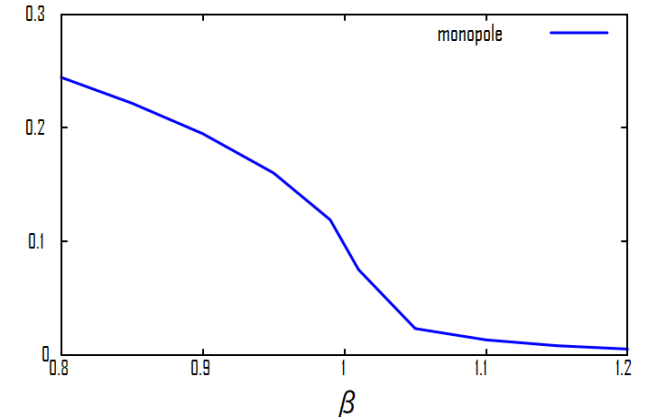
- このビアンキ恒等式の破れを磁気単極子とみなす

$$m_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\bar{\Theta}_{\rho\sigma}(x)$$

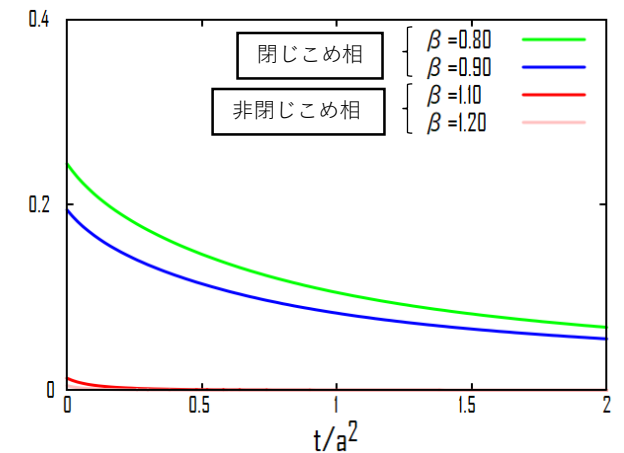
- $n_{\mu\nu}$ のデュアル $\tilde{n}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n_{\rho\sigma}(x)$ はディラックストリング
- 磁気単極子は作用の周期性からでてきた
- 閉じ込め相で多く、非閉じ込め相ではなくなる
- 磁気単極子は閉じ込めに重要な役割を果たす
- フローに対する磁気単極子の安定性
 - 閉じこめ相ではフローさせても消えずに残っている

格子サイズ:16⁴
 フロー時間:t=2
 配位数:10000

磁気単極子vs β



磁気単極子vsフロー時間



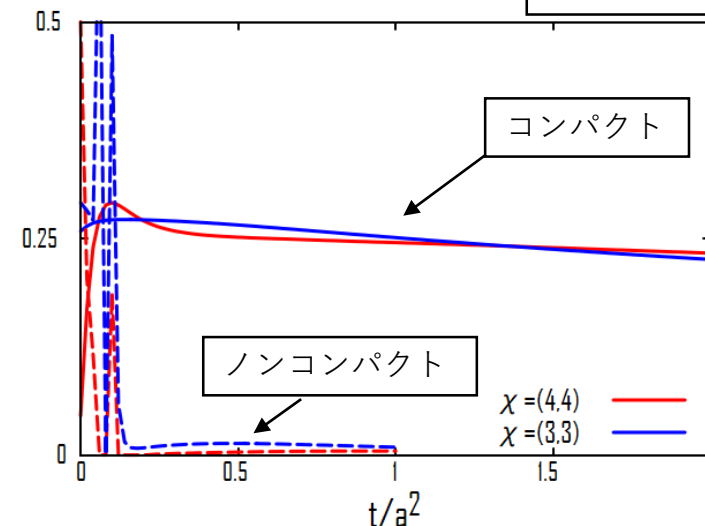
グラディエントフロー方程式 (反例)

格子サイズ:16⁴
 フロー時間: t=2
 配位数:10000

- 以下のような式も考えることができる
 - 作用の周期性を考えず(以下ノンコンパクトという)、素朴に場の強さの差分をとった形

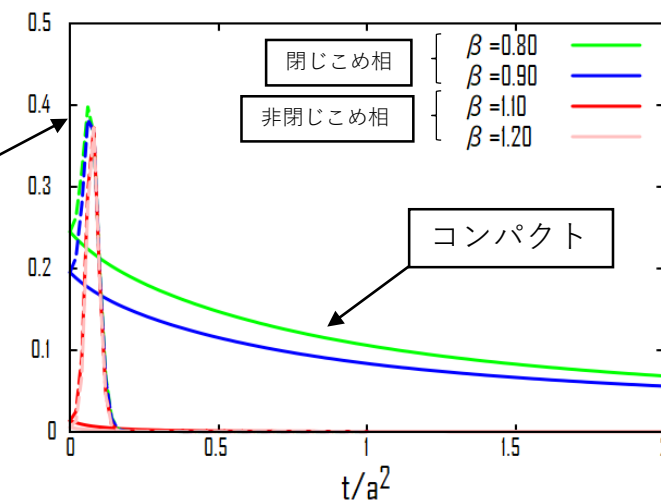
$$\frac{\partial \theta_\mu(x)}{\partial(t/a^2)} = \sum_{\mu \neq \nu} [\theta_{\mu\nu}(x) - \theta_{\mu\nu}(x - \hat{\nu})] \sim \partial_\mu F_{\mu\nu}$$

- 作用の周期性を考慮していたものをコンパクトということにする
- ストリングテンション(クロイツ比)と磁気単極子の振る舞い
- 実線がコンパクトの場合で、破線がノンコンパクトの場合
- コンパクトの場合は フローに対して閉じ込めの性質を維持するが、ノンコンパクトの場合はすぐに閉じ込めの性質を壊してしまう
- 磁気単極子はノンコンパクトの場合、すぐに消えてしまう
 ⇒この振る舞いはストリングテンションと同じ
- 今後はこのようなノンコンパクトの場合は考えない



ストリングテンションvsフロー時間

ノンコンパクト



磁気単極子vsフロー時間

コンパクト性を考慮することが重要
 今までのグラディエントフローを用いた格子QCDの研究ではこの群のコンパクト性は考慮されている

ウィルソンループの分解

- グラディエントフローで変化する $F_{\mu\nu}$ と変化しない磁気単極子が、それぞれどのように寄与するか明確にするために2つの部分の積に分けることを考える
- J_μ をウィルソンループに沿って ± 1 をとるように外から入れたカレントとし、 $J_\mu = \partial_\nu M_{\mu\nu}$ を満たす反対称テンソル $M_{\mu\nu}$ を導入する。ウィルソンループ

$$W = \exp\left(i \sum_x \theta_\mu(x) J_\mu(x)\right)$$

を次のように演算子の積に分離することができる

J.D. Stack and R.J. Wensley, Nucl. Phys. B371, 597 (1992).

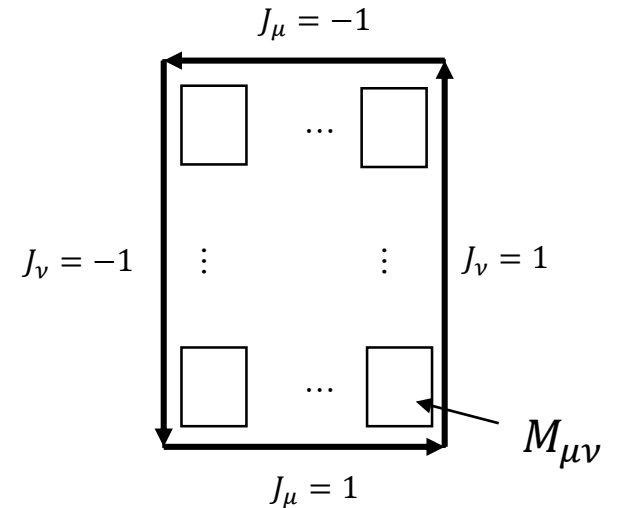
$$W = W_{ph} \cdot W_{mon}$$

$$W_{ph} = \exp\left(-i \sum_{x,y} \partial_\mu \bar{\theta}_{\mu\nu}(x) v(x-y) J_\nu(y)\right)$$

$$W_{mon} = \exp\left(2\pi i \sum_{x,y} m_\mu(x) v(x-y) \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu M_{\alpha\beta}(y)\right)$$

グラディエントフロー
であまり変化しない

$F_{\mu\nu}$ に対応しグラ
ディエントフローで
小さくなる



ここで、 $v(x-y)$ は $\partial_\mu \partial_\mu v(x-y) = -\delta_{x,y}$ を満たす格子上的クーロンプロパゲータ、 m_μ は $m_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu n_{\mu\nu}$ で定義されるモノポールカレントである。

ポリヤコフループの分解

T. Suzuki et al., Phys. Lett. B347 (1995) 375.

- ポリヤコフループは次のように2つの部分の積で書ける

$$L(\vec{x}) = \exp \left\{ i \sum_{i=0}^{N_t-1} \theta_4(\vec{x} + i\hat{4}) \right\} = L_p(\vec{x}) \cdot L_m(\vec{x})$$

$F_{\mu\nu}$ に対応しグラディエントフローで小さくなる

$$L_p(\vec{x}) = \exp \left\{ -i \sum_{i=0}^{N_t-1} \sum_{x'} D(\vec{x} + i\hat{4} - x') \partial'_\nu \bar{\Theta}_{\nu 4}(x') \right\}$$

グラディエントフローであまり変化しない

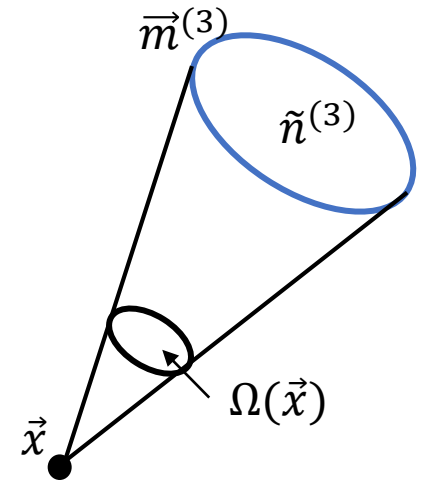
$$L_m(\vec{x}) = \exp \left\{ -2\pi i \sum_{i=0}^{N_t-1} \sum_{x'} D(\vec{x} + i\hat{4} - x') \partial'_\nu n_{\nu 4}(x') \right\}$$

ここで、 $D(x)$ は $\partial'_\mu \partial_\mu D(x) = -\delta_{x,0}$ を満たす格子上の4次元クーロンプロパゲータである

ポリヤコフループの磁気単極子からの寄与

- L_m をディラックストリング $\tilde{n}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_{\rho\sigma}(x)$ を用いて書き直す

$$L_m(\vec{x}) = \exp \left\{ -2\pi i \sum_{\vec{x}'} \partial'_i D_3(\vec{x} - \vec{x}') \frac{1}{2} \epsilon_{ijk4} \tilde{n}^{(3)}_{jk}(\vec{x}, x'_4) \right\}$$



ここで、 \vec{x}' はポリヤコフループを定義した 3次元空間内の点、 $D_3(\vec{x}) = \sum_{x_4=1}^{N_t} D(\vec{x}, x_4)$ は格子上の 3次元クーロンプロパゲータ、 $\tilde{n}^{(3)}(\vec{x}) = \sum_{x'_4=1}^{N_t} \tilde{n}_{jk}(\vec{x}, x'_4)$ は、3次元空間にディラックストリングを射影したものである。

- ポリヤコフループのある点から見た磁気単極子が囲む領域(ディラックシート)のなす立体角 Ω という量を導入する

$$L_m(\vec{x}) = \exp\{2\pi i \Omega(\vec{x})/4\pi\}$$

$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk4} \tilde{n}^{(3)}_{jk}(\vec{x}, x'_4)$ は磁気単極子が囲むディラックシートの面積にあたり、 $\partial'_i D_3(\vec{x} - \vec{x}')$ は連続理論で距離を r として \vec{e}_r/r^2 に比例する量にあたる。

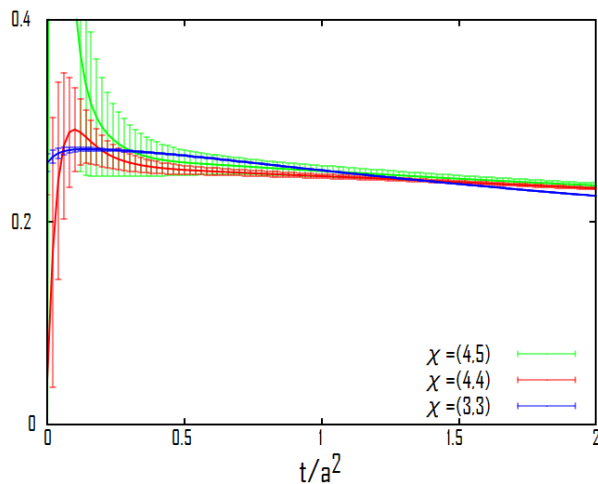
- 閉じ込め相では立体角がランダムな値をとるので各点各点でのポリヤコフループの値はランダムな値となり、空間平均をとったときに 0 となる
- 非閉じ込め相では立体角は 0 に近い値をとるのでポリヤコフループの値が 0 でない値になる
- 磁気単極子の配置のみで決まるため磁気単極子からの寄与と呼ぶ

グラディエントフローによるストリングテンションの振る舞い

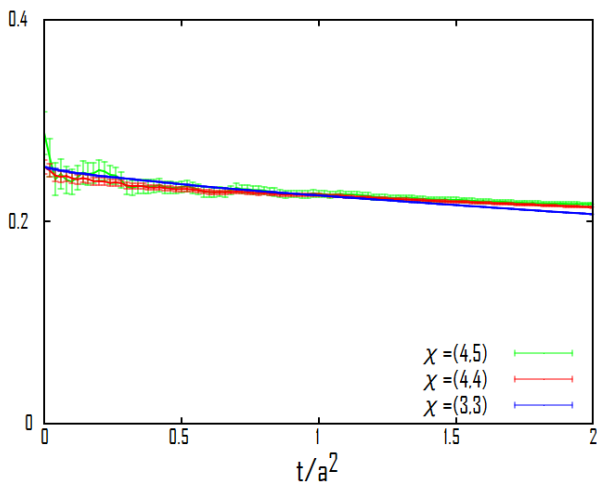
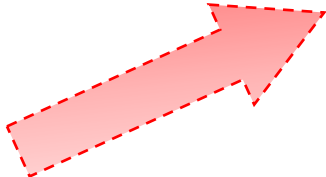
- ストリングテンション(クロイツ比)を計算した結果
- フローに対して通常の場合も磁気単極子からの寄与もほとんど変化しない
 - $\partial_\mu F_{\mu\nu}$ がほぼゼロになってもストリングテンションは減らない
 - 通常のストリングテンションと磁気単極子からの寄与はほとんど同じ振る舞いをしている
- $F_{\mu\nu}$ の寄与はストリングテンションの値にほとんど寄与していない

- W_{mon} がストリングテンションを作る
- W_{ph} はほとんど閉じ込めに寄与していない

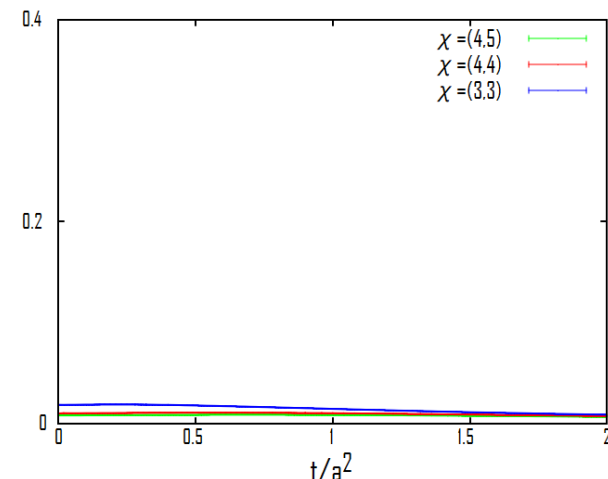
格子サイズ： 16^4
 $\beta = 0.99$
 フロー時間： $t=2$
 統計数：10000



ストリングテンションvsフロー時間



磁気単極子からの寄与vsフロー時間



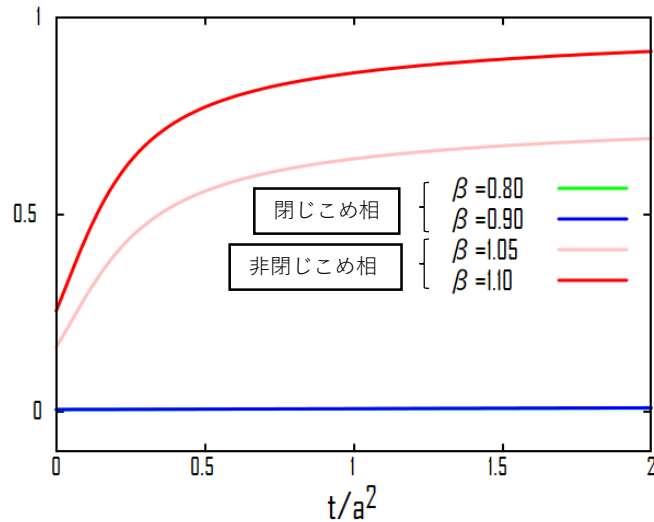
$F_{\mu\nu}$ からの寄与vsフロー時間

ほとんど同じ振る舞い

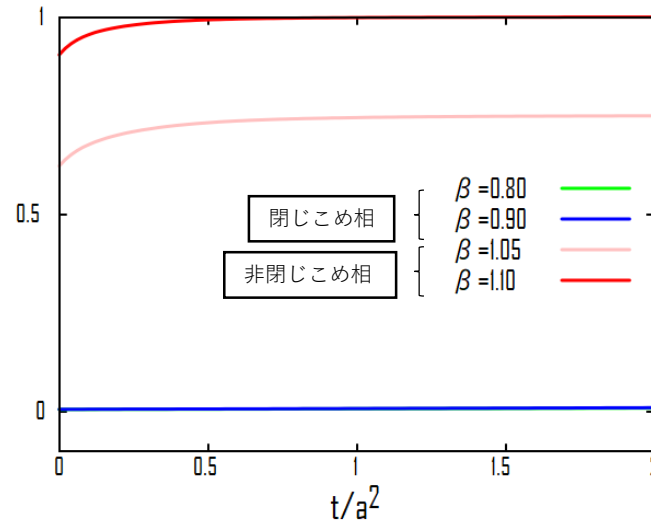
グラディエントフローによるポリヤコフループの絶対値の振る舞い

- 空間平均をとったポリヤコフループの絶対値をフローさせたときのグラフ
- 通常のポリヤコフループは非閉じ込め相からフローさせた場合、有限の値から1に近づき、閉じ込め相からフローさせた場合はゼロのままである
- 磁気単極子からの寄与も同様に、非閉じ込め相からフローさせた場合、有限の値から1に近づき、閉じ込め相からフローさせた場合はゼロのままである
- $F_{\mu\nu}$ からの寄与は閉じ込め相、非閉じ込め相ともに有限の値で閉じ込めに寄与しない

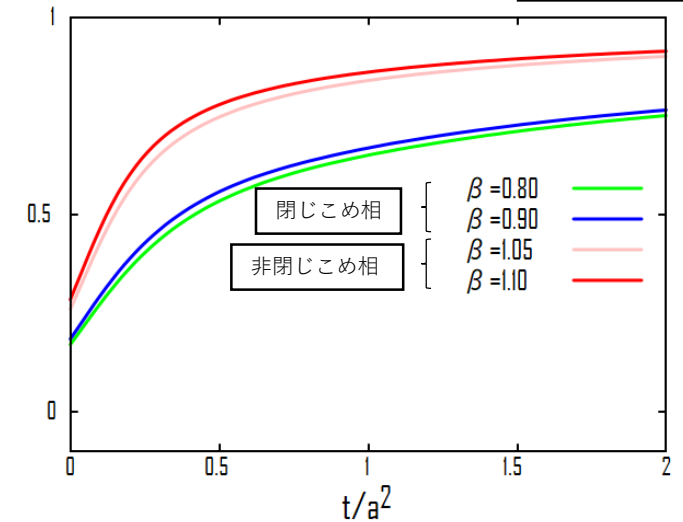
格子サイズ： $32^3 \times 8$
フロー時間： $t=2$
統計数：2000



ポリヤコフループvsフロー時間



磁気単極子からの寄与vsフロー時間



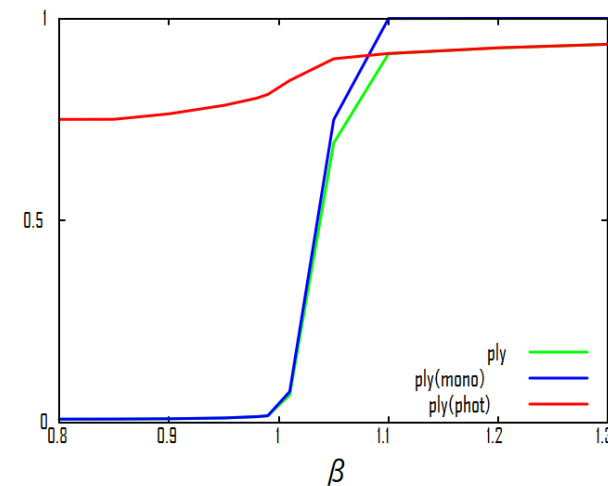
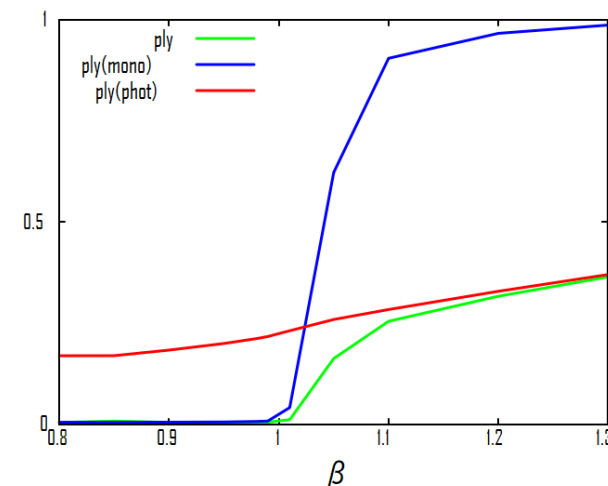
$F_{\mu\nu}$ からの寄与vsフロー時間

グラディエントフローによるポリヤコフループの絶対値の振る舞い

- ポリヤコフループの β 依存性を示したグラフである
- **緑色**が通常のポリヤコフループであり、**青色**は磁気単極子からの寄与、**赤色**は $F_{\mu\nu}$ からの寄与である
- 通常のポリヤコフループは $\beta = 1.0$ 付近で相転移を起こしゼロから有限な値となる
- 磁気単極子からの寄与も同様にゼロから有限の値となっている
- $F_{\mu\nu}$ からの寄与は閉じ込め相でも有限の値のまま、 β 依存性が小さい
- フローさせた後 $F_{\mu\nu}$ からの寄与は1に近づくが、オーダーパラメータの振る舞いとは関係ない

- ポリヤコフループのゼロ有限という性質は磁気単極子からきている
- $F_{\mu\nu}$ からの寄与は閉じ込めに寄与しない

ポリヤコフループvs β (フロー前, $t=0$)



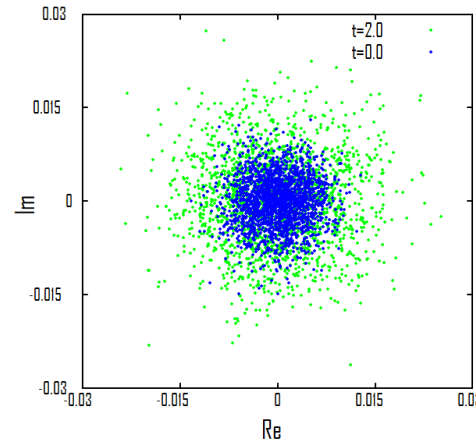
ポリヤコフループvs β (フロー後, $t=2$)

格子サイズ: $32^3 \times 8$
フロー時間: $t=2$
統計数: 2000

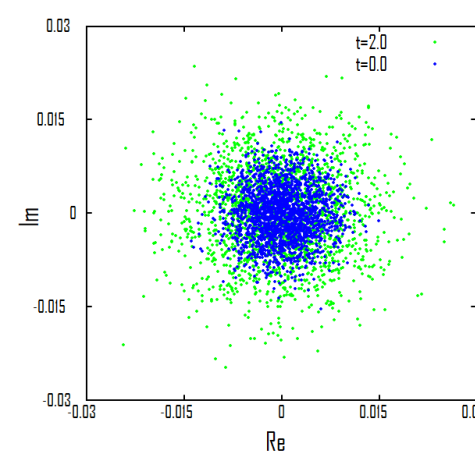
センター対称性

- 空間平均をとったポリヤコフループを複素平面上にプロットしたときの図である
- 青がフロー前で、緑がフロー後である
- 通常のポリヤコフループはU(1)対称な分布となっている
- 磁気単極子からの寄与もU(1)対称な分布になる
- $F_{\mu\nu}$ からの寄与は実軸上に分布していてU(1)センター対称性とは関係ないことが分かる
- 非閉じ込め相で磁気単極子が少なければ、磁気単極子からのポリヤコフループは実軸上の有限の値になりそうに思うが、実際にはU(1)対称な分布になる

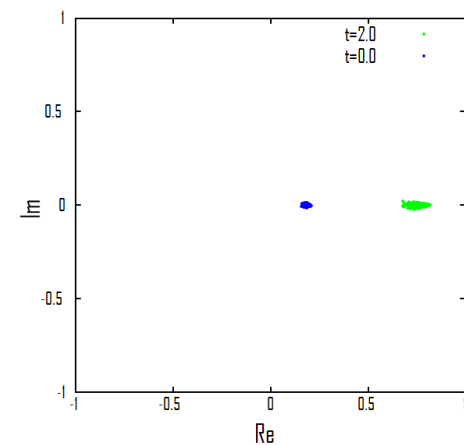
ポリヤコフループ($\beta = 0.90$)



磁気単極子からの寄与($\beta = 0.90$)

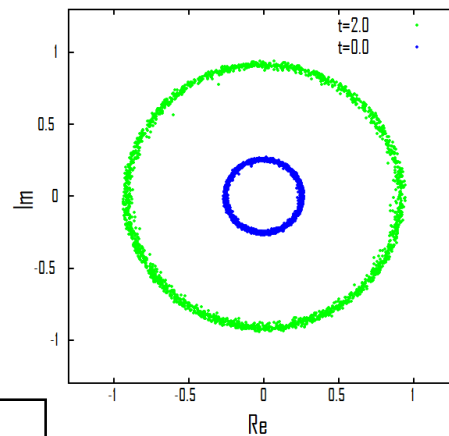


$F_{\mu\nu}$ からの寄与($\beta = 0.90$)

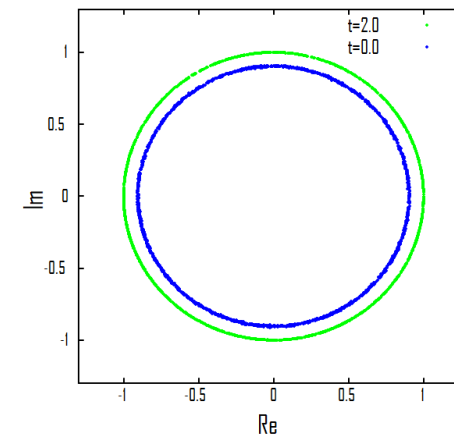


U(1)センター対称性は磁気単極子の寄与からきている
 $F_{\mu\nu}$ からの寄与はセンター対称性に寄与しない

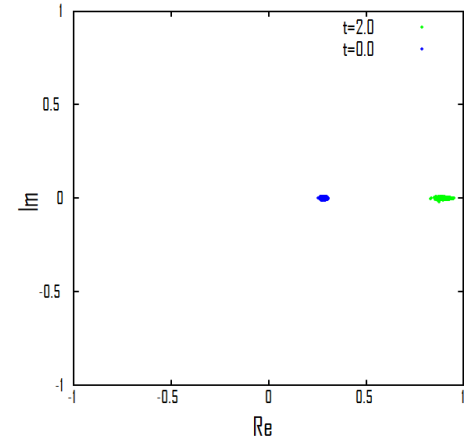
ポリヤコフループ($\beta = 1.10$)



磁気単極子からの寄与($\beta = 1.10$)



$F_{\mu\nu}$ からの寄与($\beta = 1.10$)



格子サイズ： $32^3 \times 8$
 フロー時間： $t=2$
 統計数：2000

大域的U(1)位相の起源

- 4次元クーロンプロパゲーターの定義

$$\partial'_\mu \partial_\mu D(x-y) = -\delta_{x,y}$$

- 実際のシミュレーションを行う有限体積(周期境界)では、 $\partial'_\mu \partial_\mu$ がゼロ固有値を持つため $D(x)$ は存在しない
 - 固有ベクトル： $v_x = c$ (全空間で定数) ($\because \partial'_\mu \partial_\mu v = 0$)
- ゼロ固有値を除いたベクトル空間への射影演算子

$$\mathbb{P}_{xy} = \delta_{x,y} - \frac{v_x v_y}{v^2} = \delta_{x,y} - \frac{1}{N_{\text{site}}}$$

- ゼロ固有ベクトルを除いた空間でだけで成り立つプロパゲーターの定義

$$\partial'_\mu \partial_\mu D(x-y) = -\mathbb{P}_{xy} = -\delta_{x,y} + \frac{1}{N_{\text{site}}}$$

- この場合、 $L_m(\vec{x})$ は、 $\frac{1}{N_{\text{site}}}$ の項のために、余計な大域的な位相が掛かる
 - ディラックシートはゲージ変換やセンター変換で変わりうる非物理的な量
 - 大きさ N_b のディラックシートの泡があると、位相 $\exp[2\pi i N_b/N_{\text{site}}]$ が掛かる
- 空間平均をとった L_m はU(1)対称な分布になる

まとめ

- グラディエントフローさせることで非閉じ込め相と閉じ込め相の配位が別の相の配位に変化することはない
- グラディエントフローは $F_{\mu\nu}$ を小さくする
- 磁気単極子は閉じ込め相で多く、非閉じ込め相ではほとんどない
- $F_{\mu\nu}$ が非常に小さくなくてもストリングテンションの値はあまり変化しない
- ポリヤコフループのゼロ有限は磁気単極子からきている
- 磁気単極子からの寄与はセンター対称性をもっている
- $F_{\mu\nu}$ からの寄与は閉じ込め相転移に寄与していない
- グラディエントフローはそのセンター対称性を壊さないような変換である
- 磁気単極子がフローに対して安定であるために、閉じ込めの性質が維持される