くりこみ群で非線形微分方程式を解く（レビュートーク）

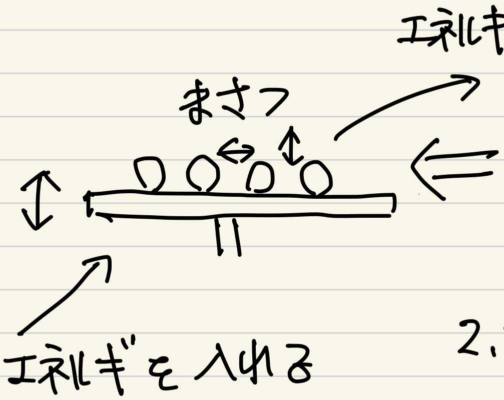
— 振動板上のコインの運動の分岐に関連して —

高野
上越教育大学

2022年 7月8日 北陸合宿

1. 背景

振動板上の 物体，物体の集まり の 運動



ある状況では
ランダムな動きではなく
パターン形成
2,3の運動モードの出現

例　鷹取氏 et al (2018)

Dorbolo et al (2008)

久保氏 et al (2015)

高野，鷹取，一野 (2020)

机の上で10円玉（おぼん）を回す → 止まる

机を振動させると

適切な振動数と適切なすべり（まさつ）がある時

回転が持続する.

Continuous Rolling Motion (CRM)

⇒ 秩序 ⇒

エネルギーの流れによって
秩序が生まれる（エントロピー減少）

非平衡・散逸・開放系での
自己組織化・運動の分岐

物理学会　領域 11, 12.　　　生命現象にもつながる

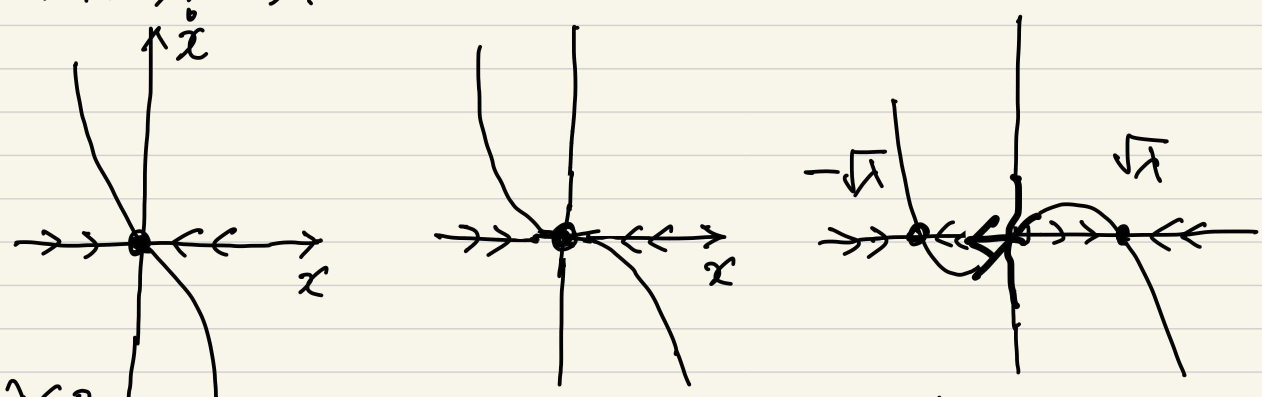
CRMは運動の分岐ととらえる事ができる
bifurcation

分岐とは

1次元力学系として

$$\dot{x} = \lambda x - x^3$$

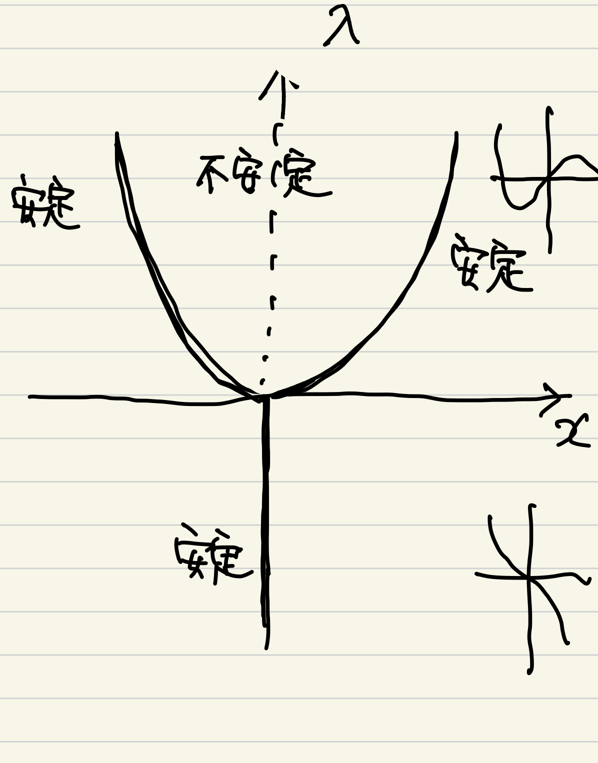
λ：パラメータ.



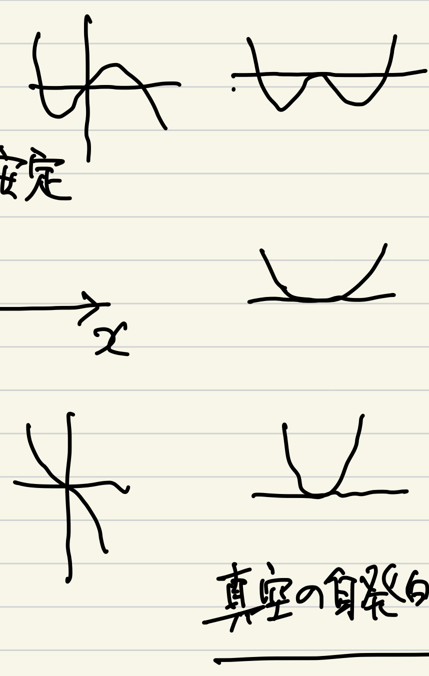
$\lambda<0$ $\quad$ $\lambda=0$ $\quad$ $\lambda>0$

$x=0$が安定 $\quad$ $x=0$安定 $\quad$ $x=\pm\sqrt{\lambda}$ 安定

$x=0$ 不安定



ポテンシャル $\propto \phi^4 + \beta\phi^2$



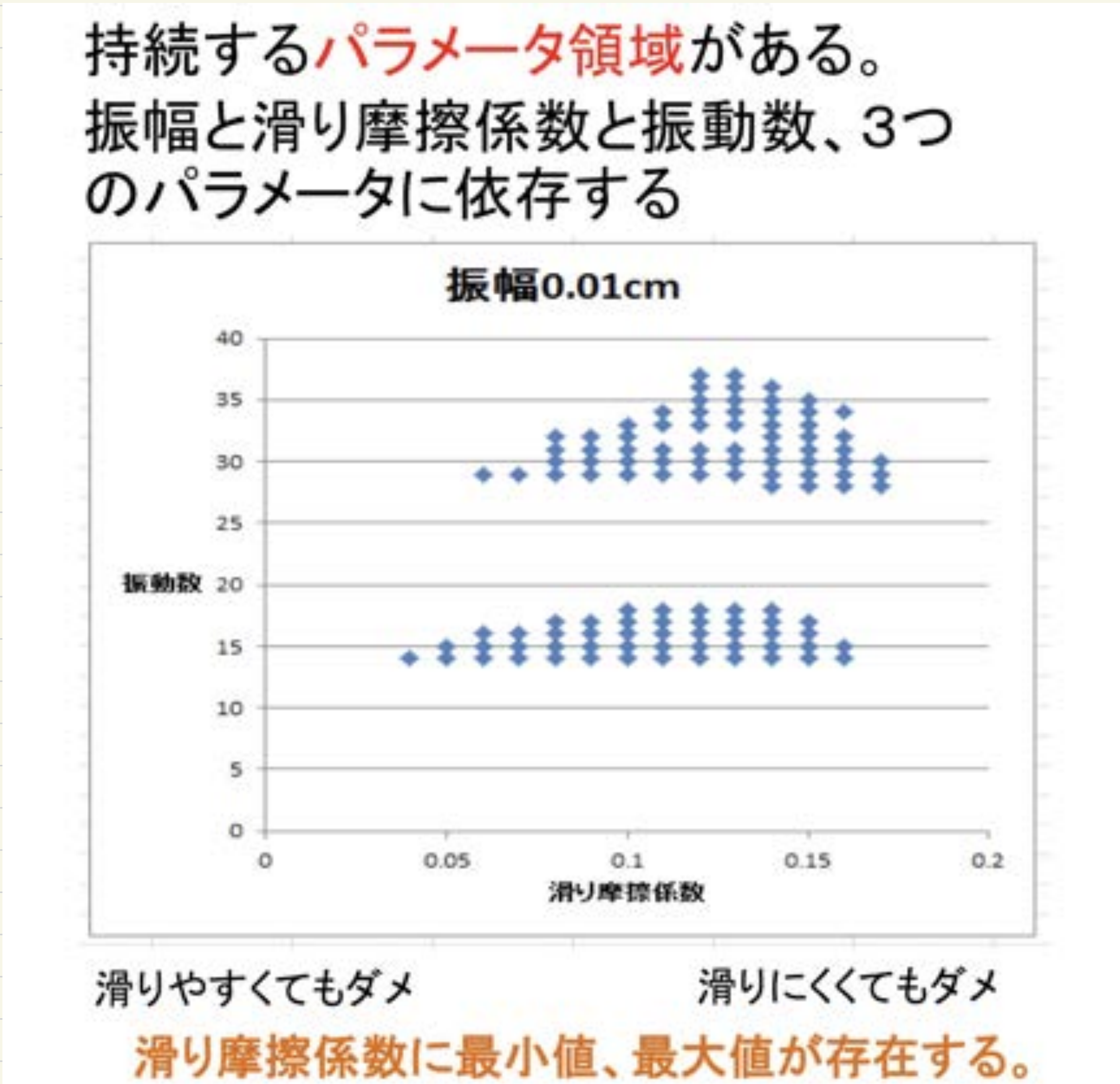
$\boxed{\text{ピッチフォーク分岐}}$

<u>真空の自発的破れ</u>

滑りまさつ係数 がパラメータ

ある値で　停止 ⟶ CRM

↑ 安定　　↑ 安定

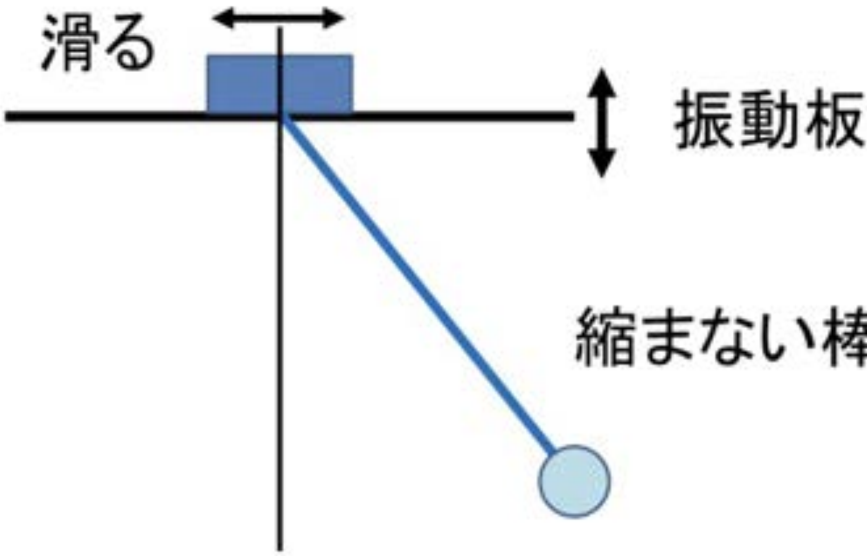


シミュレーションで予言して実験でたしかめた

なぜ？ 運動方程式を解かないといえない

運動方程式がむつかしい ⟶ 簡単なモデル

振動板上で滑る台につけられたふりこ



運動の分岐が見られる

だいたいふれはばが小さくなって止まる

↓ ある条件下

ふれはばが一定で持続.

$\Downarrow$

有効運動方程式が

振動板から

ふり子

すべる

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos t)\sin x + \mu_1 \frac{\dot{x}}{2} = 0$$

もっと、近似 $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6}$

$$\boxed{\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos t)x - \epsilon\alpha x^3 + \epsilon\beta\dot{x} = 0}$$

Nonlinear dumping Mathieu（マシュー）equation

パラメータの値に対して

どういう運動モードがあるか？

微分方程式を解く

→ 摂動法

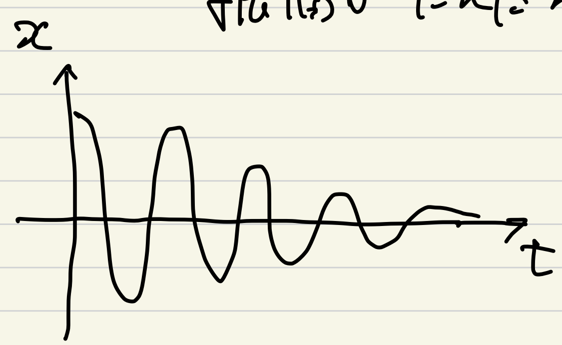
正則摂動法　で　うまくいかない場合
regular
(ふつうの)

① $\underbrace{\ddot{x} + x}_{\text{振動}} + \epsilon \dot{x} = 0$　という方程式を考える.

速度に比例したまさつ

⇓

振幅がだんだん小さくなっていく



実際　exact に解けて.

$x = Ae^{\lambda t}$ として

$\dot{x} = A\lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x} = A(\lambda^2 + \epsilon\lambda + 1)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \epsilon\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2} \qquad \epsilon < 1$$

$$= \frac{-\epsilon \pm \sqrt{4-\epsilon^2}\, i}{2}$$

$$\boxed{x = A \underbrace{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}}_{\text{dumping factor}} \underbrace{e^{i\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\, t}}_{\text{振動項}} + \bar{A} e^{-\frac{\epsilon}{2}t} e^{-i\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\, t}}$$

regular

ふつうの摂動法で解く

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$$ とし

$\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x}$ に代入

$$= \ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$$
$$+ \epsilon(\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2) = 0$$

$O(1)$ $\quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad$ ①

$O(\epsilon)$ $\quad \ddot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_0 \quad$ ②

$O(\epsilon^2)$ $\quad \ddot{x}_2 + x_2 = -\dot{x}_1 \quad$ ③

①より $x_0 = a_0 e^{it} + \bar{a}_0 e^{-it}$

②に代入すると

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -(i a_0 e^{it} - i \bar{a}_0 e^{-it})$$

特解

$x_{1s} = p t e^{it} + \bar{p} t e^{-it}$ とし

$$\dot{x}_{1s} = p e^{it} + i p t e^{it} + \bar{p} e^{-it} - i \bar{p} t e^{-it}$$
$$\ddot{x}_{1s} = i p e^{it} + i p e^{it} - p t e^{it} - i \bar{p} e^{-it} - i \bar{p} e^{-it} - \bar{p} t e^{-it}$$
$$= 2 i p e^{it} - p t e^{it} - 2 i \bar{p} e^{-it} - \bar{p} t e^{-it}$$

$$\ddot{x}_{1s} + x_{1s} = 2 i p e^{it} - 2 i \bar{p} e^{-it}$$

$a_0 = -2p \quad \therefore p = -\frac{a_0}{2}$ で OK.

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0 \rightarrow x_1^g = a_1 e^{it} + \bar{a}_1 e^{-it}$$

$$x_1 = x_1^g + x_1^s$$

$$= a_1 e^{it} + \bar{a}_1 e^{-it} \underbrace{- \frac{a_0}{2} t e^{it} - \frac{\bar{a}_0}{2} t e^{-it}}$$

tに比例する項

永年項 (secular term)

t→大で 近似がわるくなる.

$O(\epsilon)$で

$$x = x_0 + \epsilon x_1$$

$$= a_0 e^{it} + \epsilon \left(a_1 e^{it} - \frac{a_0}{2} t e^{it} \right) + h.c.$$

$$\dot{x} = i a_0 e^{it} + i \epsilon a_1 e^{it} - \frac{a_0}{2} \epsilon e^{it} - \frac{i a_0}{2} t e^{it} + h.c$$

$x(0) = 1$

$\dot{x}(0) = 0$

} 初期値.

$$x(0) = a_0 + \epsilon a_1 + \bar{a}_0 + \epsilon \bar{a}_1 = 1$$

$$\dot{x}(0) = i a_0 + i \epsilon a_1 - \frac{a_0}{2} \epsilon - i \bar{a}_0 - i \epsilon \bar{a}_1 - \frac{\bar{a}_0}{2} = 0$$

$$= \left(i - \frac{\epsilon}{2} \right) a_0 + i \epsilon a_1 + \left(-i - \frac{\epsilon}{2} \right) \bar{a}_0 - i \epsilon \bar{a}_1 = 0$$

$a_1 = \bar{a}_1 = 0$ として

$$a_0 + \bar{a}_0 = 1$$

$$\left(i - \frac{\epsilon}{2} \right) a_0 + \left(-i - \frac{\epsilon}{2} \right) \bar{a}_0 = 0$$

$\Rightarrow a_0\ \bar{a}_0$ を決める

$$x = a_0 e^{it} - \frac{\epsilon}{2} a_0 t\, e^{it} + c.c.$$

$$= a_0\left(1 - \epsilon\frac{t}{2}\right) e^{it} + c.c.$$

exact $x = A \underbrace{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}}_{\underline{1 - \frac{\epsilon}{2}t} + \frac{\epsilon^2}{8}t^2 + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(-\frac{\epsilon}{2}t\right)^3}_{= -\frac{\epsilon^3}{48}t^3} + \cdots} e^{i\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\,t} + c.c$

$$\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} = (1+x)^{1/2} = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2$$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{1}{8}\left(-\frac{\epsilon^2}{4}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^4}{32}$$

exact

$$x = A\left(1 - \frac{\epsilon}{2}t + \frac{\epsilon^2}{8}t^2 - \frac{\epsilon^3}{48}t^3\right) e^{i\left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^4}{32} \cdots\right)t} + c.c.$$

$$= A e^{-\frac{\epsilon}{2}t} e^{i\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\,t} + c.c.$$

いろいろな摂動法が考えられてきた.

総称して

特異摂動法

singular perturbation methods

multi-scaling method (複スケール法)

averaging method (平均化法)

boundary layer method (境界層法)

WKB method

⋮

renormalization group method (くりこみ群法)

(RG method)

は従来の方法を統一する方法という事がわかって来た

"万能"

アルゴリズムがはっきりしている (千葉氏)

2. くりこみ群法

イリノイ大学 (1996)

L.-Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono

PHYSICAL REVIEW E VOLUME 54, NUMBER 1 JULY 1996

Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory

Lin-Yuan Chen,[1,2] Nigel Goldenfeld,[1] and Y. Oono[1]

具体例がたくさんある。 RGで解いてこれまでの方法と比較

section II multiple-scale theory and RG

A. Rayleigh equation ~ van der Paul equation

$$\ddot{y} + y = \epsilon \left(\dot{y} - \frac{1}{3} \dot{y}^3 \right)$$

B. Matheiu equation

$$\ddot{x} + x + \epsilon \cos t = 0$$

RGの方が精度がいい

C. Oscillator with time-dependent spring constant

$$\ddot{y} + y - \epsilon t y = 0$$

III. Boundary-Layer theory. WKB and RG

A. Simple linear example

Consider the following simple example, which describes the motion of an overdamped linear oscillator

$$\epsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \epsilon \ll 1 \tag{3.1}$$

B. Example with log ϵ

The second example we consider is [5]

$$\epsilon y'' + xy' - xy = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = e.$$

C. Nonlinear boundary-layer problem

Boundary-layer analysis applies to nonlinear as well as to linear differential equations. In this section and in the following section, we will demonstrate that the RG method can be used to solve nonlinear boundary-layer problems.

Let us consider the following illustrative nonlinear problem [36]

$$\epsilon y'' + 2y' + e^y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{3.26}$$

D. Nonlinear problem of carrier

In this section, we consider a first-order nonlinear model problem of Carrier [37].

$$(x + \epsilon f)f' + f = 1, \quad f(1) = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.34}$$

E. F. G. などいろいろ示されている。

なにをやっているのかいまいちはっきりしない

数学的にも

高次まで求めるアルゴリズムがはっきりしない

RG法に対して さまざまな研究がなされた.

アルゴリズムをもっとすっきりさせる, RGが他の方法を含む. などを示す

⟶ 千葉氏の一連の論文

① **C^1 Approximation of Vector Fields based on the Renormalization Group Method**

SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 7(3)(2008) 895–932.

② Approximation of center manifolds on the renormalization group methods

J. Math. Phys. 49(10) (2008) 102703

③ J. Differential Equations 246 (2009) 1991–2019

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Differential Equations

ELSEVIER

www.elsevier.com/locate/jde

Simplified renormalization group method for ordinary differential equations

Hayato Chiba

4

Extension and Unification of Singular Perturbation Methods for ODEs Based on the Renormalization Group Method

SIAM. J. Appl. Dyn. syst. 8(3) (2009)

5

Approximation of Vector Fields on the RG Method and its Application to the Synchronization

数理解析研究講究録. (2008) 日本語. pp.160—184

「繰りこみ群の数理科学での応用」

6

数理解析研究所講究録
第 1616 巻 2008 年 59-77

Renormalization Group Method and its Application to Coupled Oscillators

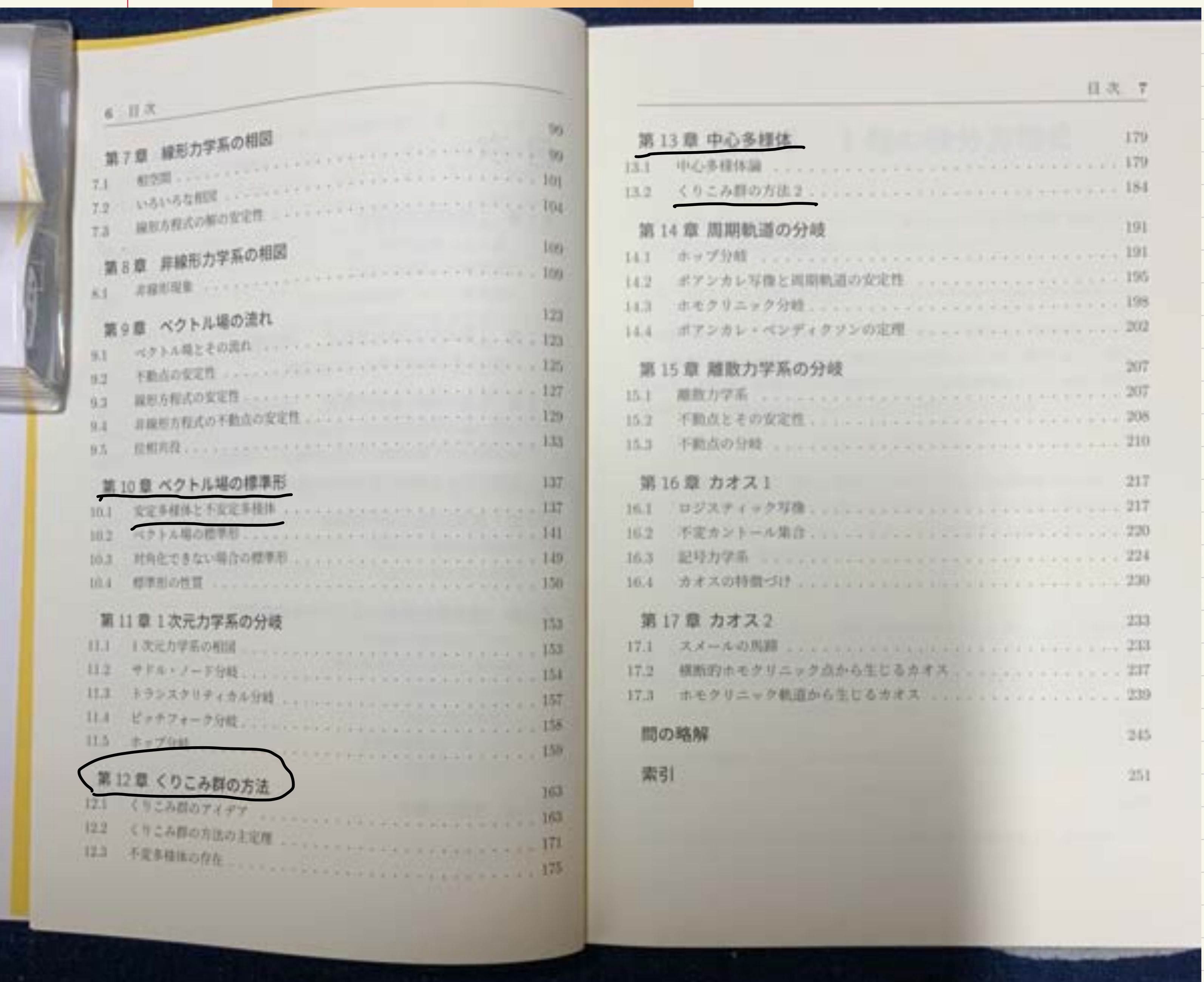
「生命現象と関連した非線型問題の数理」

2021 12月

「理系への数学」

2007 5月

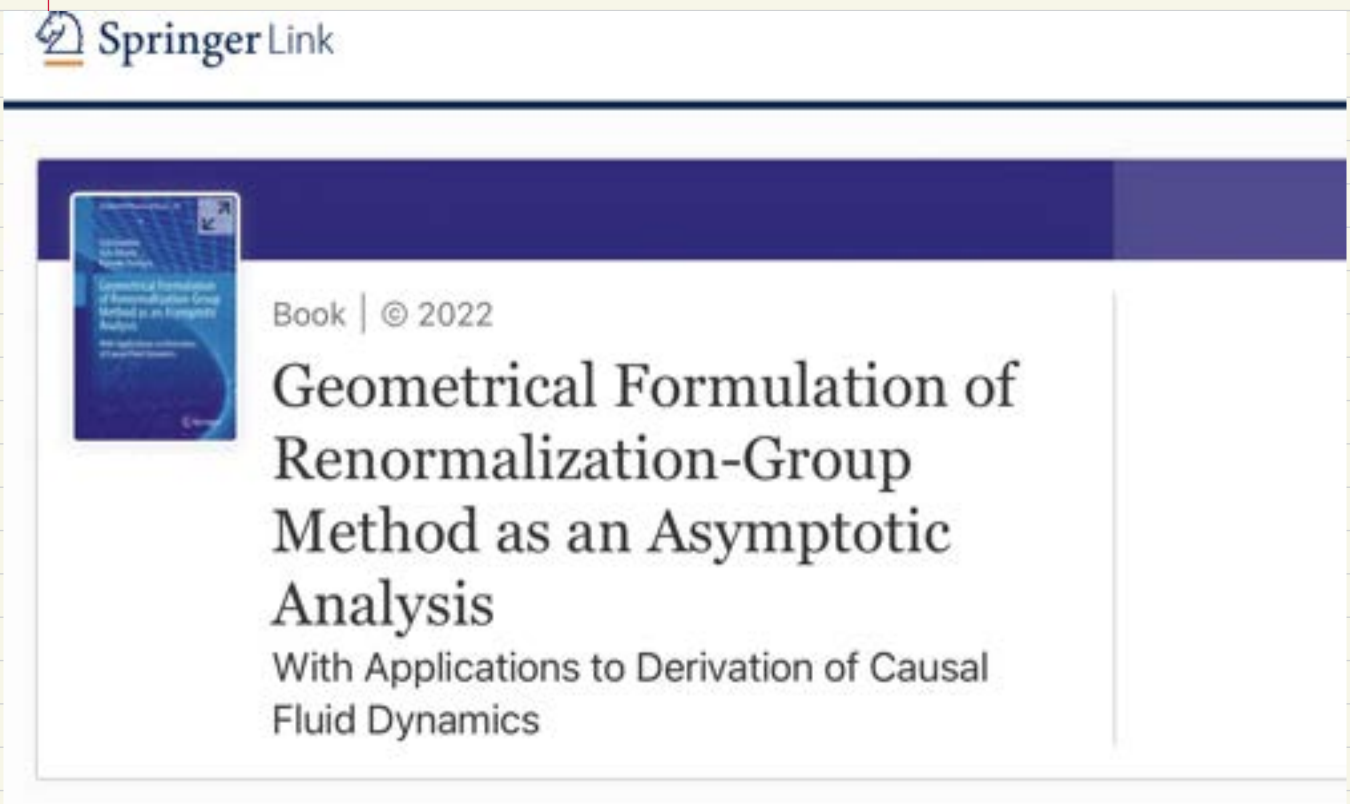
〜2008 9月



なぜ うまくいくのか すっきりしない

⟶ 国広氏の包絡線のアイディア.

https://biran2008.hatenablog.com/entry/2021/05/20/210149



千葉流で解いてみる.

① n 変数 1階の常微分方程式の形にする

$$\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x} = 0$$

$y = \dot{x}$ とすると

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - \epsilon y$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

② 対角化する

$$T\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix}i&\\&-i\end{pmatrix}$$

ここで $T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}T^{-1}\,T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \epsilon\, T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\dot{z}\\\dot{\bar{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&\\&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix} - \frac{i}{2}\epsilon\begin{pmatrix}z-\bar{z}\\-z+\bar{z}\end{pmatrix}}$$

ここで $\begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-iy\\x+iy\end{pmatrix}$

$$T := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\1&+i\end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{pmatrix}i&i\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&1\\-i&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-iy\\x+iy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\\bar{z}\end{pmatrix}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$$

$$z - \bar{z} = -\sqrt{2}\, i y$$

$$y = \frac{-1}{i\sqrt{2}}(z - \bar{z}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(z - \bar{z})$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z})$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$-\epsilon\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = -\frac{\epsilon}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\bar{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i & \\ & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\epsilon\begin{pmatrix}z - \bar{z}\\ -z + \bar{z}\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}i & \\ & -i\end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel\\ F}}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\epsilon\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}$$

③ $z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots$ を代入して
両辺をϵのべきで比較する

$O(1)$ $\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{\bar{z}}_0 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$

$O(\epsilon)$ $\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\bar{z}}_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}$

$O(\epsilon^2)$ $\begin{pmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_2 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$O(1)$ より

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix} = e^{Ft} \begin{pmatrix} a \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} a \\ e^{-it} \bar{a} \end{pmatrix}$$

$O(\epsilon)$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\bar{z}}_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$= F \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} + G_1(z_0, \bar{z}_0)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \overline{z_1} \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} b \\ \overline{b} \end{pmatrix} + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\, G_1(z_0(s), \overline{z_0}(s))\, ds$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

b は $t=0$ での z_1 の初期値.

$b=0$ としてよい.

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-is} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} z_0(s) - \overline{z}_0(s) \\ -z_0(s) + z_0(s) \end{pmatrix} ds$$

と与えられる.

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$$

の一般解は t_0 を初期時刻、c を任意定数として

$$x(t) = c e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s)\, ds$$

で与えられる. ただし $A(t) := \int_{t_0}^t a(t)\, ds$

$t_0 = 0$

$$a(t) = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$$

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix} = X(t) \text{ のこと}$$

上の成分のみ考える

$$z_1 = -\frac{1}{2} e^{it} \int_0^t e^{-is}\left(z_0(s) - \bar{z}_0(s)\right) ds \qquad z_0 = e^{is} a$$

$$= -\frac{1}{2} e^{it} \int_0^t \left(a - e^{-2is}\bar{a}\right) ds$$

← zeromode から secular term が出てくる

$$= -\frac{1}{2} e^{it}\left(at + \frac{1}{2i}\left(e^{-2it} - 1\right)\bar{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{it} a t + \frac{1}{2i}\left(e^{-it} - e^{it}\right)\bar{a}\right)$$

$O(\epsilon)$ までで

$$z = z_0 + \epsilon z_1$$

$$= e^{it} a - \frac{\epsilon}{2} e^{it}\left(at + \frac{1}{2i}\left(e^{-2it} - 1\right)\bar{a}\right)$$

人為的に新しいパラメータ τ を導入 (secular term のみ)

$$z = e^{it} a - \frac{\epsilon}{2} e^{it}\left(a(t-\tau) + \frac{1}{2i}\left(e^{-2it} - 1\right)\bar{a}\right)$$

と修正． $t \to$ 大で $\tau \to$ 大とすることで発散をおさえる (気持ち)

しかし z は τ によってはいけない

→ a を τ に依存する関数とみなし，

$$\left.\frac{d}{d\tau} z(t, \tau, a(\tau))\right|_{t=\tau} = 0 \qquad \text{(くりこみ方程式)}$$

という条件を課す

$$z = e^{it}a - \frac{\epsilon}{2}e^{it}\left(a(t-\tau) + \frac{1}{2i}(e^{-2it}-1)\bar{a}\right)$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}z(t,a(\tau))\right|_{\tau=t} = \left. e^{it}\left(\dot{a} - \frac{\epsilon}{2}\left(\dot{a}(t-\tau) - a + \frac{1}{2i}\left(e^{-2it}-1\right)\dot{\bar{a}}\right)\right)\right|_{t=\tau}$$

$$= e^{it}\left(\dot{a} + \frac{\epsilon}{2}a - \frac{\epsilon}{4i}(e^{-2it}-1)\dot{\bar{a}}\right)$$

$$= e^{it}\Big(\underbrace{\dot{a} + \frac{\epsilon}{2}a + \frac{\epsilon}{4i}\dot{\bar{a}}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}\Big) + e^{-it}\underbrace{\frac{\epsilon}{4i}\dot{\bar{a}}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0$$

これが成立するためには

が必要.

$$\dot{a} \sim O(\epsilon) \qquad \frac{\epsilon}{4i}\dot{\bar{a}} \sim O(\epsilon^2)$$

$$\dot{a} + \frac{\epsilon}{2}a + O(\epsilon^2) = 0$$

$$\dot{a} + \frac{\epsilon}{2}a \simeq 0$$

$$a = a_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$$

$$z = a_0 \underset{\sim\sim}{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}} e^{it} - \frac{\epsilon}{4i}(e^{-it} - e^{it})\bar{a}_0 \underset{\sim\sim}{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}}$$

dumping factor.

$$x = z + \bar{z}$$

$$= a_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}e^{it} - \frac{\epsilon}{4i}(e^{-it} - e^{it})\bar{a}_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$$

$$+ \bar{a}_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}e^{-it} + \frac{\epsilon}{4i}(e^{it} - e^{-it})a_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$$

$O(\varepsilon^2)$の計算

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} z_2 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1 - \bar{z}_1 \\ -z_1 + \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}\left(e^{it} a t + \frac{1}{2i}\left(e^{-it} - e^{it}\right) \bar{a} \right)$$ を上式に代入

特解だけ考慮

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} z_1 - \bar{z}_1 \\ -z_1 + \bar{z}_1 \end{pmatrix} ds$$

上成分のみ

$$z_2 = -\frac{1}{2} e^{it}\int_0^t e^{-is}\left(z_1 - \bar{z}_1\right)$$

$$= \frac{1}{4} e^{it}\int_0^t e^{-is}\begin{pmatrix} e^{is} a s + \frac{1}{2i}\left(e^{-is} - e^{is}\right)\bar{a} \\ -e^{-is}\bar{a} s + \frac{1}{2i}\left(e^{is} - e^{-is}\right) a \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{4} e^{it}\int_0^t \left\{ \begin{array}{l} a s + \frac{1}{2i}\left(e^{-2is} - 1\right)\bar{a} \\ -e^{-2is}\bar{a} s + \frac{1}{2i}\left(1 - e^{-2is}\right) a \end{array} \right\} ds$$

$$= \frac{1}{4} e^{it}\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2}t^2 + \frac{1}{4}\left(e^{-2it} - 1\right)\bar{a} - \frac{\bar{a}}{2i}t \\ \underbrace{+\frac{1}{2i}e^{-2is} s\,\bar{a}\Big|_0^t}_{\frac{1}{2i}e^{-2it}t\bar{a}} - \underbrace{\frac{1}{2i}\int_0^t e^{-2is}ds\,\bar{a}}_{-\frac{1}{4}\left(e^{-2it}-1\right)\bar{a}} \\ +\frac{1}{2i}a t - \frac{1}{4}\left(e^{-2it} - 1\right) a \end{array} \right\}$$

$$z_2 = \frac{1}{4} e^{it} \left(\frac{a t^2}{2} - \frac{\bar{a}}{2i} t + \frac{1}{2i} e^{-2it} \bar{a} t + \frac{1}{2i} a t - \frac{1}{4} (e^{-2it} - 1) a \right)$$

$$= \frac{1}{8} e^{it} \left(t^2 + i \bar{a} t - i a t + \frac{a}{2} \right)$$

$$+ \frac{1}{8} e^{-it} \left(-i \bar{a} t - \frac{a}{2} \right)$$

$$z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2$$

$$= e^{it} a - \frac{\epsilon}{2} \left(e^{it} a t + \frac{1}{2i} (e^{-it} - e^{it}) \bar{a} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{8} e^{it} \left(\underline{a t^2} + i \bar{a} t - i a t + \frac{a}{2} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{8} e^{-it} \left(-i \bar{a} t - \frac{a}{2} \right)$$

$t \to t - \tau$ $\quad \left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{t=\tau} = 0$ とすると.

$$e^{it} \left(\dot{a} + \frac{\epsilon}{2} a + \frac{\epsilon}{4i} \dot{\bar{a}} - \frac{\epsilon^2}{8} i \bar{a} + \frac{\epsilon^2}{8} i a + \underbrace{\epsilon^2 \frac{\dot{a}}{16}}_{O(\epsilon^3)} \right)$$

$$+ e^{-it} \left(-\frac{\epsilon \dot{\bar{a}}}{4i} + \frac{i \epsilon^2}{8} \bar{a} - \underbrace{\frac{\epsilon^2}{16} \dot{a}}_{\epsilon^3} \right) = 0$$

t^2 の係数は関係ない。 t の1次の項が重要.

($(t-\tau)^2$ を微分して $t=\tau$ とおくと消えるから)

e^{it}の係数$=0$より

$$\dot{a} + \frac{\epsilon}{2}a + \frac{\epsilon}{4i}\dot{\bar{a}} - \frac{\epsilon^2}{8}i\bar{a} + \frac{\epsilon^2}{8}ia = 0$$

$$\underbrace{\dot{a} + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{i}{8}\epsilon^2\right)a} + \frac{\epsilon}{4i}\left(\dot{\bar{a}} + \frac{\epsilon}{2}\bar{a}\right) = 0$$

また e^{-it}の係数$=0$より

$$-\frac{\epsilon\dot{\bar{a}}}{4i} + \frac{i\epsilon^2}{8}\bar{a} = 0$$

$$-\frac{\epsilon}{4i}\left(\underbrace{\dot{\bar{a}} + \frac{\epsilon}{2}\bar{a}}_{\shortparallel\ O(\epsilon^2)}\right) = 0$$

$$\dot{a} + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{i}{8}\epsilon^2\right)a = 0$$

$$a = a_0 e^{-\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{i}{8}\epsilon^2\right)t}$$

$$z = a_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t} e^{i\underline{\left(1 - \frac{1}{8}\epsilon^2\right)}t} - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{-it} - e^{it}\right)\bar{a}\right)$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{8}e^{it}\frac{a}{2} + \frac{\epsilon^2}{8}e^{-it}\left(-\frac{\bar{a}}{2}\right)$$

exactを展開した時の
$O(\epsilon^2)$の項が出ている!

exact

$$x = A e^{-\frac{\epsilon}{2}t} e^{i\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}\,t} + c.c.$$

$$= A e^{-\frac{\epsilon}{2}t} e^{i\left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^4}{32} \cdots\right)t} + c.c$$

千葉氏によるアルゴリズム.

In a similar manner, we solve the equations of $x_2, x_3, \dots$ step by step. The solutions are expressed as

$$x_i := x_i(t, \tau, A) = h_t^{(i)}(A) + \left(X(t)R_i(A) + \sum_{k=1}^{i-1} \left(Dh_t^{(k)}\right)_A R_{i-k}(A) \right)(t - \tau) + O\left((t-\tau)^2\right), \tag{3.16}$$

where $R_i(A)$ and $h_t^{(i)}(A)$ with $i = 2, 3, \dots$ are defined by

$$R_i(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int^t \Bigg(X(s)^{-1} G_i\left(s, X(s)A, h_s^{(1)}(A), \dots, h_s^{(i-1)}(A)\right) - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} \left(Dh_s^{(k)}\right)_A R_{i-k}(A) \Bigg) ds, \tag{3.17}$$

$$h_t^{(i)}(A) := X(t) \int^t \Bigg(X(s)^{-1} G_i\left(s, X(s)A, h_s^{(1)}(A), \dots, h_s^{(i-1)}(A)\right) - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} \left(Dh_s^{(k)}\right)_A R_{i-k}(A) - R_i(A) \Bigg) ds, \tag{3.18}$$

respectively, and where $(Dh_t^{(k)})_A$ is the derivative of $h_t^{(k)}(A)$ with respect to $A \in \mathbf{R}^n$. Integral constants

R_i を計算し (そのためには $h^{(i-1)}$ 等が必要)

くりこみ方程式は

$$\dot{A} = \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \cdots$$

これを解く.

$R_i(A)$?

$$R_1(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int^t X^{-1}(s)\, G_1(s, X(s)A)$$

$$\begin{aligned}
R_1(a) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int^t e^{-is}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(z_0(s) - \bar{z}_0(s)\right) ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int^t e^{-is}\left(e^{is}a - e^{-is}\bar{a}\right) ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int^t \left(a - e^{-2is}\bar{a}\right) ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\underline{at} + \frac{1}{2i}\left(e^{-2it} - 1\right)\bar{a}\right) ds \\
&= -\frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

zero mode を抜き出す

secular term の前の係数.

$$h_t^{(1)} = X(t)\int^t X^{-1}(s)G_1 - R_1\, ds$$

$$= e^{it}\int^t \left(e^{-is}\left(-\frac{1}{2}\right)(z_0 - \bar{z}_0) + \frac{a}{2} \right) ds$$

$$= e^{it}\int^t e^{-is}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{is}a - e^{-is}\bar{a}\right) + \frac{a}{2}\, ds$$

$$= e^{it}\int^t \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-e^{-2is}\bar{a}\right) ds$$

$$= -\frac{1}{4i}e^{it}\left(e^{-2it}\,\bar{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{4i}e^{-it}\,\bar{a}$$

$$\therefore\ z_1 = h_t^{(1)} + e^{it}R_1(t-\tau)$$

$$= -\frac{1}{4i}e^{-it}\bar{a} - \frac{e^{it}}{2}a(t-\tau)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}\left(e^{it}at + \frac{1}{2i}\left(e^{-it} - e^{it}\right)\bar{a}\right)$$

$\dot{a} = \epsilon R_1$ $\qquad R_1 = -\frac{a}{2}$ [illegible]

$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{2}a \longrightarrow a = a_0 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$.

$$R_2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int^t e^{-is} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(h_s^{(1)} - \overline{h_s^{(1)}}\right) - e^{-is} Dh_s^{(1)} R_1$$

$$h_s^{(1)} = -\frac{\bar{a}}{4i} e^{-is}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-is}\left(h_s^{(1)} - \overline{h_s^{(1)}}\right) = e^{-is}\left(\frac{\bar{a}}{8i} e^{-is} + \frac{a}{8i} e^{is}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\bar{a}}{8i} e^{-2is}}} + \underset{\sim\sim}{\frac{a}{8i}} \quad \text{Ⓐ zeromode}$$

$$Dh_s^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_s^{(1)}}{\partial a}, & \dfrac{\partial h_s^{(1)}}{\partial \bar{a}} \\ \dfrac{\partial \overline{h_s^{(1)}}}{\partial a}, & \dfrac{\partial \overline{h_s^{(1)}}}{\partial \bar{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{e^{-is}}{4i} \\ \dfrac{e^{is}}{4i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{\bar{a}}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{-is} Dh_s^{(1)} R_1 = e^{-is} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_s^{(1)}}{\partial a}\left(-\dfrac{a}{2}\right) + \dfrac{\partial h_s^{(1)}}{\partial \bar{a}}\left(-\dfrac{\bar{a}}{2}\right) \\ \text{c.c.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dfrac{\bar{a}}{8i} e^{-2is}}} \\ \text{c.c.} \end{pmatrix}$$

zeromodeではないから
R_2にはきかない.

第1項に含まれるzeromode Ⓐ
だけきいて

$\longrightarrow$ $\boxed{R_2 = \dfrac{a}{8i}}$ となる

$$\dot{a} = \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2$$

$$= -\frac{\epsilon}{2}a + \epsilon^2 \frac{a}{8i} = \left(-\frac{\epsilon}{2} - \frac{i}{8}\epsilon^2\right)a$$

$$a = a_0 e^{\left(-\frac{\epsilon}{2} - \frac{i}{8}\epsilon^2\right)t}$$

前で求めた
同じものが出てくる.

$$h_s^{(1)} = -\frac{\bar{a}}{4i}e^{-is}$$

$$h_t^{(2)} = e^{it}\int^t \left(e^{-is}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(h_s^{(1)} - \bar{h}_s^{(1)}\right) - \underbrace{e^{-is} D h_s^{(1)} R_1}_{\frac{\bar{a}}{8i}e^{-2is}} - \underbrace{R_2}_{\frac{a}{8i}} \right)$$

$$= e^{it}\left\{ \int^t \left(e^{-is}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\bar{a}}{4i}e^{-is} - \frac{a}{4i}e^{is}\right) - \frac{a}{8i} \right) - \int_0^t \frac{\bar{a}}{8i}e^{-2is} \right\}$$

$$= e^{it}\int^t \left(e^{-2is}\frac{\bar{a}}{8i} - \frac{\bar{a}}{8i}e^{-2is} \right) ds$$

$$= 0$$

$$z = a e^{it} + \epsilon h_t^{(1)} + \epsilon^2 h_t^{(2)}$$

$$= a e^{it} - \epsilon \frac{\bar{a}}{4i} e^{-it}$$

CGO流で解いてみる.

$$z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2$$

$$= e^{i(t-t_0)} \left\{ a + \epsilon\left(\frac{1}{4i}\bar{a} - \frac{a}{2}(t-t_0)\right) + \epsilon^2\left(\frac{a}{16} + \frac{a}{8}(t-t_0)^2 - \frac{i}{8}(a-\bar{a})(t-t_0)\right) \right\}$$

$$+ e^{-i(t-t_0)} \left\{ -\frac{\epsilon}{4i}\bar{a} + \epsilon^2\left(-\frac{i}{8}(t-t_0)\bar{a} - \frac{a}{16}\right) \right\}$$

$$= e^{i(t-t_0)} \left\{ a + \epsilon\left(\frac{1}{4i}\bar{a} - \frac{a}{2}(t-\tau+\tau-t_0)\right) + \epsilon^2\left(\frac{a}{16} + \frac{a}{8}\underbrace{(t-\tau+\tau-t_0)^2}_{ここだし} - \frac{i}{8}(a-\bar{a})(t-\tau+\tau-t_0)\right) \right\}$$

$$+ e^{-i(t-t_0)} \left\{ -\frac{\epsilon}{4i}\bar{a} + \epsilon^2\left(-\frac{i}{8}(t-\tau+\tau-t_0)\bar{a} - \frac{a}{16}\right) \right\}$$

bare値　　　くりこまれた量.

$$a_B = R_B e^{i\theta_B} = R_R Z_1 e^{i(\theta_R + Z_2)}$$

$$Z_1 = (1 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 \cdots)$$

$$Z_2 = \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 \cdots$$

$$a_B = R_R e^{i\theta_R}(1 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2)(i\epsilon b_1 + i\epsilon^2 b_2)$$

$$= a_R e^{i\theta_R}\left(1 + \epsilon(a_1 + ib_1) + \epsilon^2(ia_1 b_1 + ib_2)\right)$$

$$a_B + \epsilon \frac{-a_B}{2}(\tau - t_0) + \epsilon^2 \left(- \frac{i}{8} a_B (\tau - t_0) \right)$$

$$= a_B \left(1 - \frac{\epsilon}{2}(\tau - t_0) - \frac{i\epsilon^2}{8}(\tau - t_0) \right)$$

$$= R_R e^{i\theta_R} (1 + \epsilon(a_1 + ib_1) + \epsilon^2(ia_1 b_1 + ib_2))$$
$$\times \left(1 - \frac{\epsilon}{2}(\tau - t_0) - \frac{i}{8}\epsilon^2(\tau - t_0) \right)$$

$$= R_R e^{i\theta_R} \Big(1 + \epsilon \left(a_1 + ib_1 - \frac{1}{2}(\tau - t_0)\right)$$
$$+ i\epsilon^2 \left(a_1 b_1 + b_2 - \frac{1}{8}(\tau - t_0) \right) \Big)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(\tau - t_0) \qquad b_1 = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(\tau - t_0)$$

でくりこめる.

$a_R = R_R e^{i\theta_R}$ は τ dep

後は同様に $\left.\frac{d}{d\tau} z\right|_{t=\tau} = 0$ として $a_R(\tau)$ を求める.

包絡線として理解

D, (preprint)

[8] S. Ei, K. Fujii, T. Kunihiro, Renormalization-group method for reduction of evolution equations; invariant manifolds and envelopes, Ann. Physics 280 (2000), no. 2, 236-298

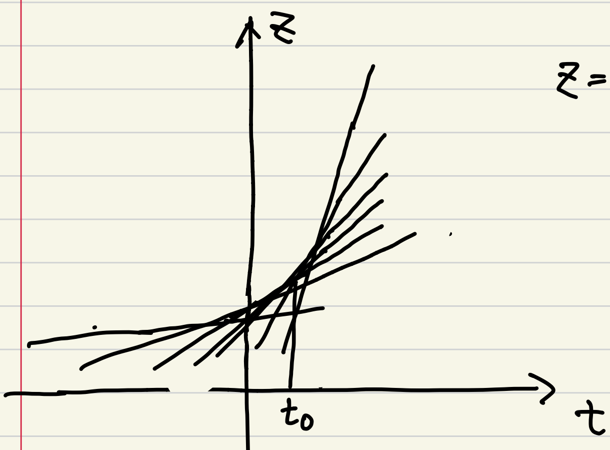
[9] T. Kunihiro, A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis, Progr. Theoret. Phys. 94 (1995), no. 4, 503-514

[10] T. Kunihiro, The renormalization-group method applied to asymptotic analysis of vector fields, Progr. Theoret. Phys. 97 (1997), no. 2, 179-200

包絡線とは何か

例

次の直線群を考える　　τ がパラメーター



$$z = e^{\tau}(t-\tau) + e^{\tau}$$

↑ secular term に対応.

これらの直線と接線を共有する曲線が包絡線 (envelope)

どうやって求めるか

$$F(z, t, \tau) = z - e^{\tau}(t-\tau) - e^{\tau} = 0 \quad ①$$

$$F_{\tau}(z, t, \tau) = 0 \quad ②$$ という条件を課して

τ を消去して求める

$$F_\tau(z,t,\tau) = -e^\tau(t-\tau) + e^\tau - e^\tau = 0$$

$t=\tau$ を①に代入

$$z - e^t = 0$$

$z = e^t$ envelope

$$F(z,t,\tau) = z - f(t,\tau) = 0$$

つまり $z = f(t,\tau)$ の場合

$F_\tau(z,t,\tau) = 0$ は $\dfrac{\partial f(t,\tau)}{\partial \tau} = 0$

τ. パラメーター

① $z(t,\tau) = e^\tau(t-\tau) - e^\tau$ の場合なので

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(t,\tau) = 0 \iff \left.\frac{dz}{d\tau}(t,\tau,a(\tau))\right|_{t=\tau} = 0$$

になる.

微分方程式を解く場合,

$$z(t,\tau) = \underset{\sim}{e^\tau}(t-\tau) - \underset{\sim}{e^\tau}$$

ここの部分がわからない $a(\tau)$ とする

$$z(t,\tau) = a(\tau)(t-\tau) - a(\tau)$$

$$F(t, \tau, a(\tau)) = z - a(\tau)(t-\tau) - a(\tau) = 0 \qquad ③$$

と求まったとする　$z = a(\tau)(t-\tau) + a(\tau)$

$$\left.\frac{dz}{d\tau}\right|_{t=\tau} = \dot{a}(t-\tau) - a + \dot{a} \Big|_{t=\tau}$$

$$= -a + \dot{a} = 0$$

$$\dot{a} = a$$

$$a = a_0 e^t$$ となって正解が求められる

③の式はどうやって得られる

$\dot{z} = \epsilon z$ をくりこみ群で解いてみよう

$z = z_0 + \epsilon z_1$ を代入

$$\dot{z}_0 + \epsilon \dot{z}_1 = \epsilon (z_0 + \epsilon z_1)$$

$O(1)$　$\dot{z}_0 = 0 \longrightarrow z_0 = a$

$O(\epsilon)$　$\dot{z}_1 = z_0 \longrightarrow \dot{z}_1 = a$

$z_1 = at$

$$\therefore \quad z = z_0 + \epsilon z_1 = a + \epsilon a t$$

secular Term

③の形がでてくる.