

# 電気双極子モーメント計算の簡略化

藤間 崇 (金沢大学)

北陸信越地区素粒子論グループ合宿  
@ オンライン



JHEP 10 (2021) 237 [arXiv:2106.03384 [hep-ph]]

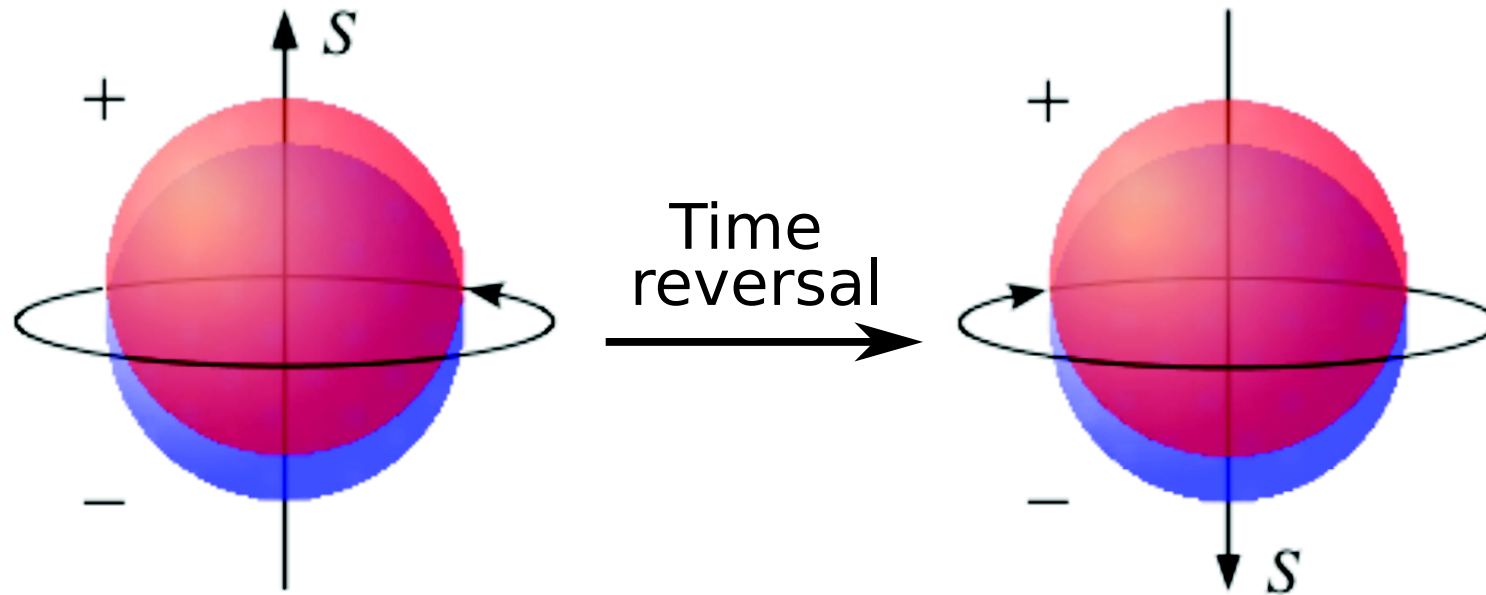
共同研究者: 藤原素子 (名古屋大学 → 東京大学), 久野純治 (名古屋大学)

# イントロ

- 電気双極子モーメント (EDM) の有効ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{d_f}{2} \bar{f} i \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 f F_{\mu\nu} \Rightarrow H_{\text{eff}} = -d_f \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} / S$$

非相対論的



- $T$ 変換の下で  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S} \rightarrow -\mathbf{S}$  なので時間反転を破る  
CPT不変  $\Rightarrow$  EDMはCPを破る

# イントロ

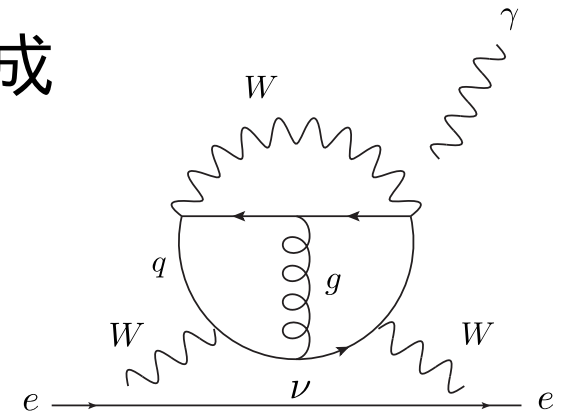
- 標準模型の中ではCKM行列がCPの破れのソース

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

「CPの破れ」の大きさ  $J_{CP} = |\text{Im}(V_{us}V_{cs}^*V_{cb}V_{ub}^*)| \approx 3.06 \times 10^{-5}$

- 荷電レプトンのEDMは4-ループレベルで生成

$$|d_e|/e \sim \frac{\alpha_W^3 \alpha_s m_e}{246(4\pi)^4 m_W^2} J_{CP} \sim 10^{-38} \text{ cm}$$



- 現在の荷電レプトンEDMの上限

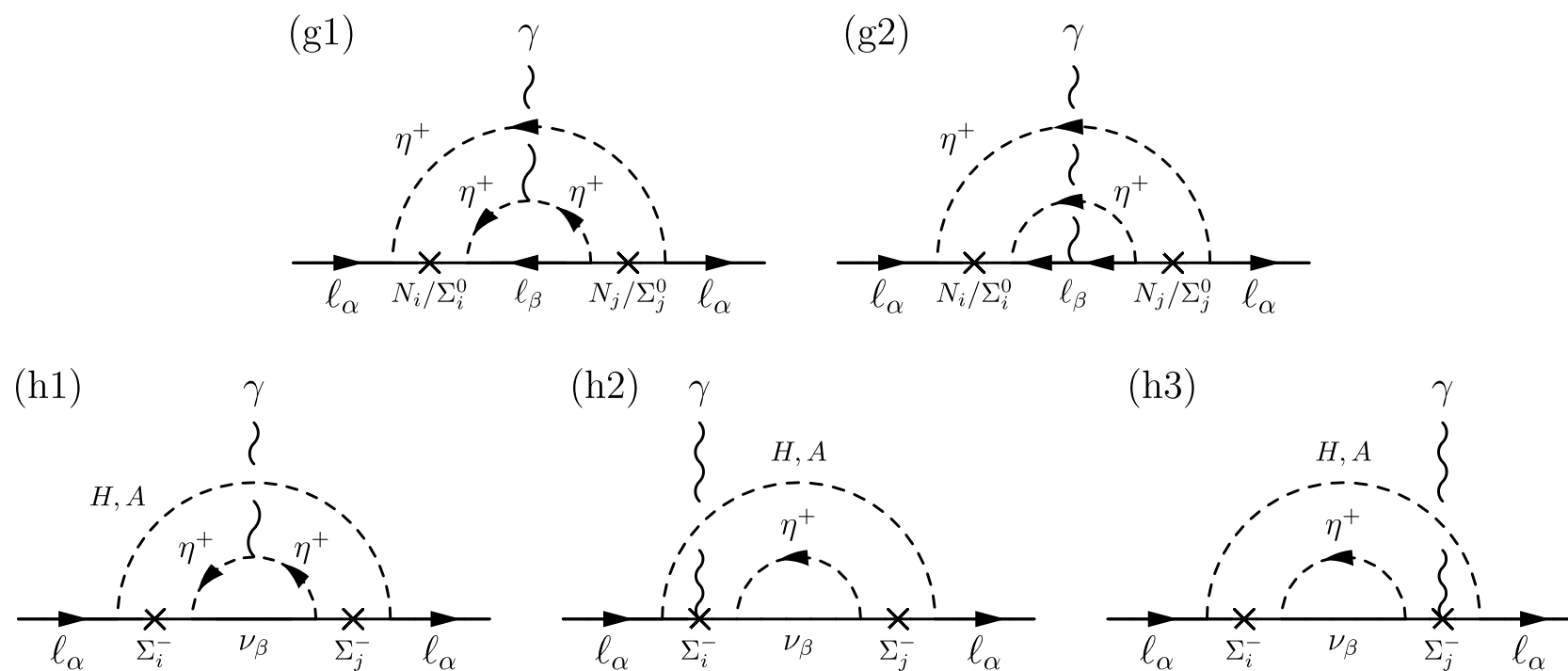
$$|d_e|/e < 1.1 \times 10^{-29} \text{ cm} \quad (\text{ACME})$$

$$|d_\mu|/e < 1.9 \times 10^{-19} \text{ cm} \quad (\text{Muon } g - 2)$$

$$|d_\tau|/e < 4.5 \times 10^{-17} \text{ cm} \quad (\text{Belle})$$

# イントロ

- 以前の研究の中で、ある特定のモデルの中でEDMの計算を行ったが、一部のEDMの寄与が厳密にゼロだった

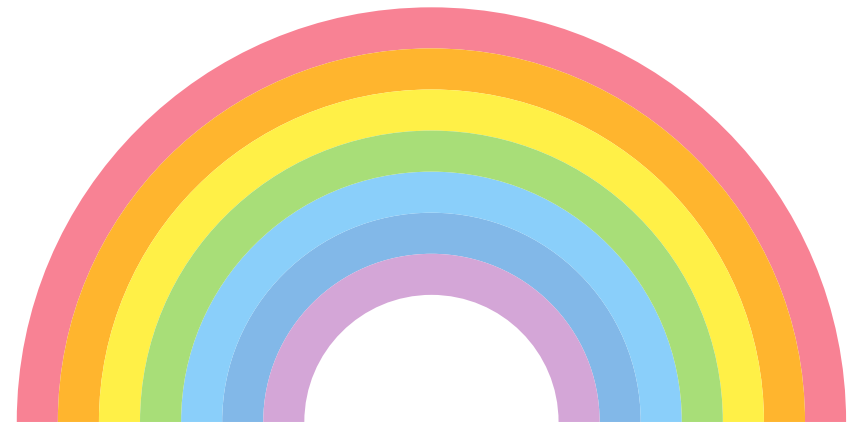
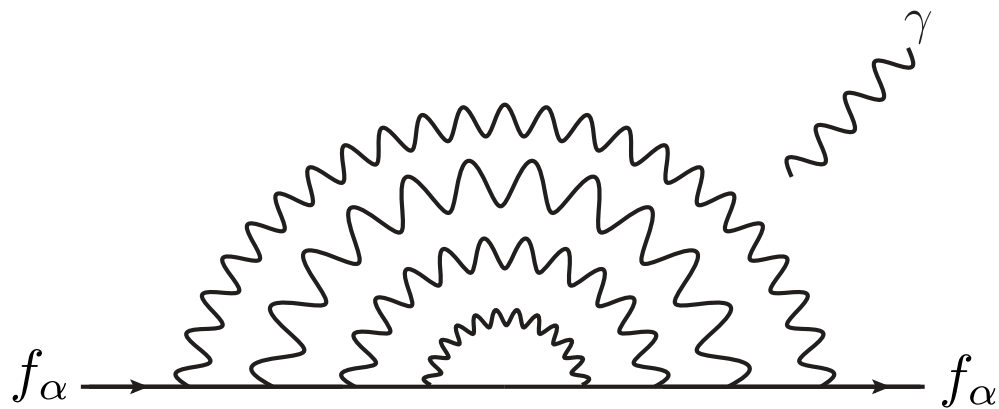


個々の図の寄与は有限値であるが、足すと厳密にゼロ

- 何か理由があるのでは？  
⇒ もう少し整理したい

# もくじ

- 1 動機
- 2 レインボーダイアグラムの評価

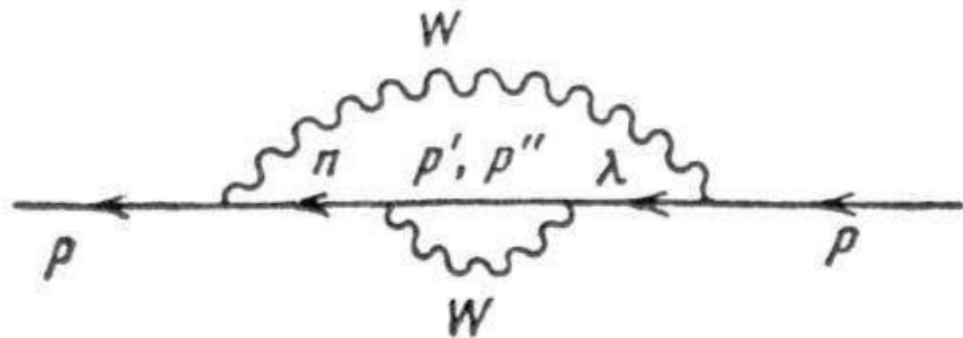


- 3 具体的な模型への適用
- 4 まとめ

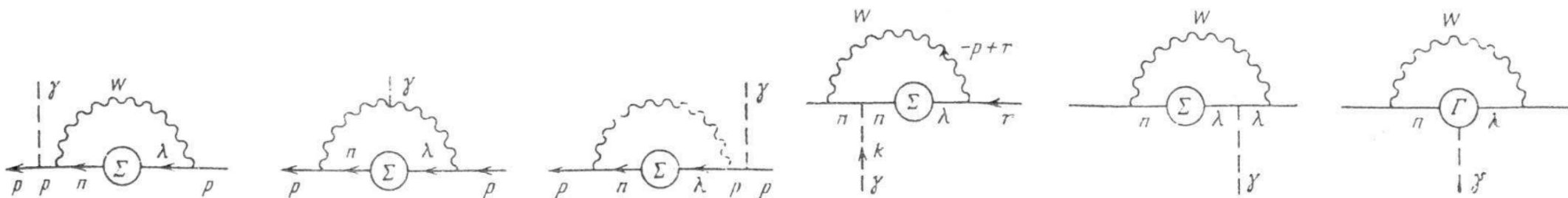
# 標準模型では

- 中性子EDMへの同じ寄与がある

Sov. J. Nucl. Phys. 28, E. P. Shabalin (1978)



- 自己エネルギー  $\Sigma$  と頂点関数  $\Gamma^\mu$  を具体的に計算して、相殺することを確かめた



- このやり方を一般化  
 $\Rightarrow$  任意の模型においてレインボー型の寄与が相殺する条件を導く

# セットアップ

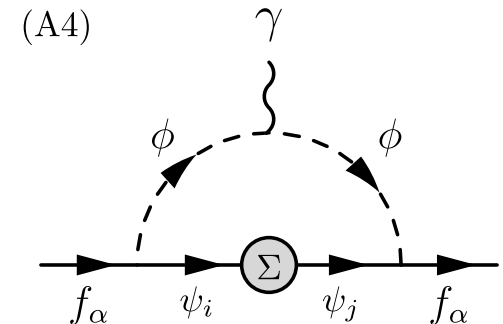
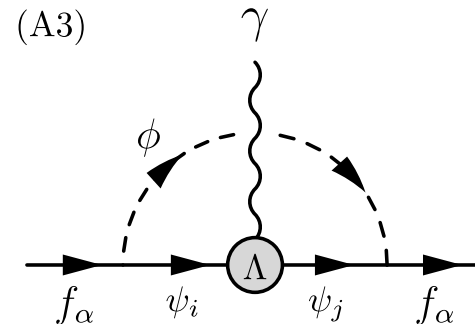
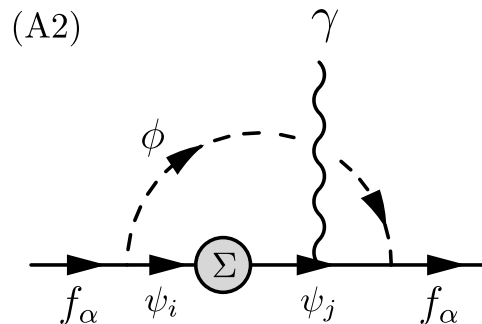
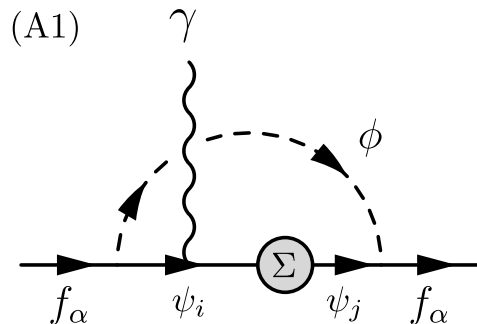
	$f_\alpha$	$\psi_i$	$\phi$
スピン	1/2	1/2	0
電荷	$Q_f$	$Q_\psi$	$Q_\phi$

- ループの中を飛ぶフェルミオン： $\psi_i$
- ループの中を飛ぶスカラー： $\phi$
- $f_\alpha$  の EDM を計算する

## ■ ラグランジアン

$$\mathcal{L} = - (y_{i\alpha} \phi^* \bar{\psi}_i P_L f_\alpha + \text{H.c.}) - e Q_\psi A_\mu \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i + ie Q_\phi A_\mu (\phi \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi^*) - \bar{\psi}_i \Sigma_{ij} \psi_j - e A_\mu \bar{\psi}_i \Lambda_{ij}^\mu \psi_j$$

ここで  $\Lambda_{ij}^\mu = \sum_p Q_p (\Lambda_p)_{ij}^\mu$ 、フル頂点関数： $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$



# 振幅 (A1)+(A2)

$$i\mathcal{M}_{A1} = eQ_\psi y_{j\alpha}^* y_{i\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) P_R (\not{k}_2 + m_j) \Sigma_{ji} (\not{k}_2) (\not{k}_2 + m_i) \not{\epsilon} (\not{k}_1 + m_i) P_L u(p_1)$$

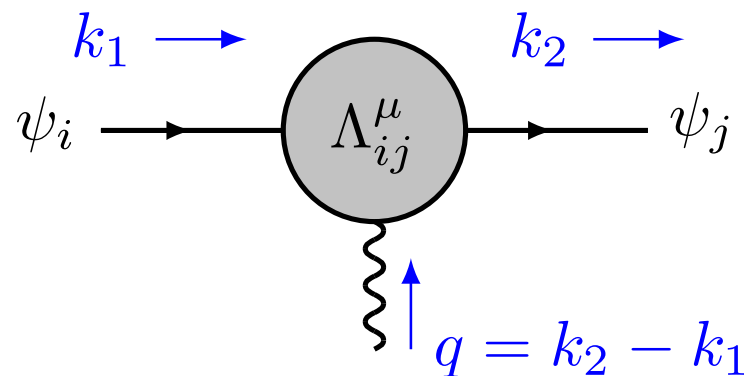
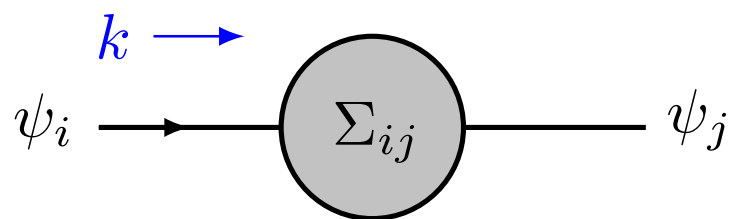
$$\times \frac{1}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{k_1^2 - m_i^2} \frac{1}{k_2^2 - m_i^2} \frac{1}{k_2^2 - m_j^2}$$

$$i\mathcal{M}_{A2} = eQ_\psi y_{j\alpha}^* y_{i\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) P_R (\not{k}_2 + m_j) \not{\epsilon} (\not{k}_1 + m_j) \Sigma_{ji} (\not{k}_1) (\not{k}_1 + m_i) P_L u(p_1)$$

$$\times \frac{1}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{k_1^2 - m_i^2} \frac{1}{k_1^2 - m_i^2} \frac{1}{k_2^2 - m_j^2}$$

ここで  $k_1 = k - q/2$ 、 $k_2 = k + q/2$ 、 $p = (p_1 + p_2)/2$

## ■ 運動量ノーターション





# 振幅 (A1)+(A2) 2

- (i) EDM  $\Rightarrow \mathcal{O}(q)$  まで展開すれば十分

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = d_\alpha \epsilon_\mu \bar{u}(p_2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 u(p_1)$$

- (ii) CPを破る項のみを残す

- 自己エネルギーの一般的な形

$$\Sigma_{ji}(k) = A_{ji}^L(k^2) \not{k} P_L + A_{ji}^R(k^2) \not{k} P_R + B_{ji}^L(k^2) P_L + B_{ji}^R(k^2) P_R$$

形状因子：  $A_{ji}^L, A_{ji}^R, B_{ji}^L, B_{ji}^R$

- 自己エネルギーのエルミート性から

$$A_{ji}^L = A_{ij}^{L*}, A_{ji}^R = A_{ij}^{R*}, B_{ji}^L = B_{ij}^{L*}, B_{ji}^R = B_{ij}^{R*} \quad B_{ji} \equiv B_{ji}^L$$

- $A_{ji}^L, A_{ji}^R, B_{ji}$  で振幅を書く

# 振幅 (A1)+(A2) 3

## ■ 結果

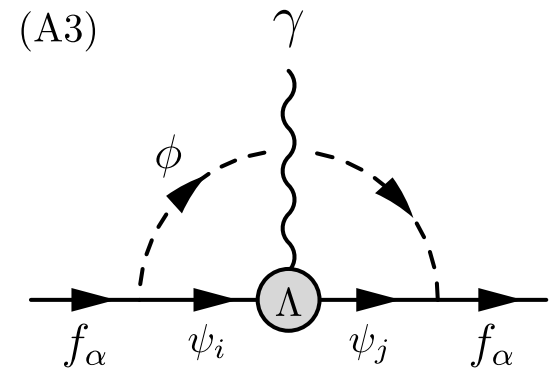
$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{A1+A2}^{\text{CP}} &\approx 2ieQ_\psi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon} P_L u(p_1) \frac{(k \cdot q) m_i}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)^2} \frac{1}{(k^2 - m_j^2)^2} \\
 &\times \text{Im} \left[ k^4 m_i \frac{d\tilde{A}_{ji}^R}{dk^2} - m_j^3 \left( \tilde{A}_{ji}^L + k^2 \frac{d\tilde{A}_{ji}^L}{dk^2} \right) + (k^4 - 2k^2 m_j^2 + m_i^2 m_j^2) \frac{d\tilde{B}_{ji}}{dk^2} \right] \\
 &- 2ieQ_\psi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \not{k} \not{\epsilon} P_L u(p_1) \frac{(k \cdot q) m_j^2}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)^2} \frac{1}{(k^2 - m_j^2)^2} \\
 &\times \text{Im} \left[ \tilde{A}_{ji}^R + k^2 \frac{d\tilde{A}_{ji}^R}{dk^2} + m_i m_j \frac{d\tilde{A}_{ji}^L}{dk^2} + 2m_i \frac{d\tilde{B}_{ji}}{dk^2} \right]
 \end{aligned}$$

ここで  $\tilde{A}_{ji}^{L/R} \equiv y_{j\alpha}^* A_{ji}^{L/R} y_{i\alpha}$ ,  $\tilde{B}_{ji} \equiv y_{j\alpha}^* B_{ji} y_{i\alpha}$

## ■ $A^L, A^R, B$ 全ての寄与が残る

# 振幅 (A3)

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{A3} = & e y_{j\alpha}^* y_{i\alpha} \epsilon_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) P_R (\not{k}_2 + m_j) \Lambda_{ji}^\mu(k_1, k_2) (\not{k}_1 + m_i) P_L u(p_1) \\
 & \times \frac{1}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{k_1^2 - m_i^2} \frac{1}{k_2^2 - m_j^2}
 \end{aligned}
 \tag{A3}$$



- 頂点補正  $\Lambda^\mu(k_1, k_2)$
- ワード・高橋恒等式： $q_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2) = \Sigma(k_1) - \Sigma(k_2)$
- $\Lambda^\mu(k_1, k_2)$  は12個の独立なベクトルで展開できる  
( $P_L, P_R$ を考慮すると24)
- この中の4つはワード高橋恒等式により自己エネルギー $\Sigma$ と関係  
 $\Rightarrow$  関係する部分を  $\Lambda_L$  とする  $\Rightarrow A^L, A^R, B$  で表すことが可能  
 $q_\mu \Lambda_L^\mu(k_1, k_2) = \Sigma(k_1) - \Sigma(k_2)$

# 振幅 (A3) 2

- 他に自明にゼロになる部分がある  $\Rightarrow \Lambda_T^\mu$   
 $q_\mu \Lambda_T^\mu(k_1, k_2) = 0$

- $\Lambda^\mu(k_1, k_2) = \Lambda_L^\mu(k_1, k_2) + \Lambda_T^\mu(k_1, k_2)$

- $\Lambda_T^\mu$  は8つの独立なベクトルで表現可能

$$\Lambda_T^\mu(k_1, k_2) = \sum_{a=1}^8 \left[ C_a^L(k_1, k_2) V_a^\mu P_L + C_a^R(k_1, k_2) V_a^\mu P_R \right]$$

$$V_1^\mu = (k \cdot q) q^\mu - q^2 k^\mu,$$

$$V_2^\mu = \not{k} [(k \cdot q) q^\mu - q^2 k^\mu],$$

$$V_3^\mu = \not{k} \not{q} [(k \cdot q) q^\mu - q^2 k^\mu],$$

$$V_4^\mu = \not{q} q^\mu - q^2 \gamma^\mu,$$

$$V_5^\mu = (k \cdot q) \gamma^\mu - \not{q} k^\mu,$$

$$V_6^\mu = \not{k} [(k \cdot q) \gamma^\mu - \not{q} k^\mu],$$

$$V_7^\mu = i \sigma^{\mu\nu} q_\nu,$$

$$V_8^\mu = i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu k_\rho q_\sigma$$

- $\Lambda_L^\mu$  の一部が (A1)+(A2) と相殺

# 振幅 (A3) 3

- ワード・高橋恒等式： $\Lambda^\mu(k_1, k_2) \approx -\frac{d\Sigma}{dk_\mu} + q_\nu \frac{\partial \Lambda_T^\mu}{\partial q_\nu} \Big|_{q=0}$
- $\Lambda_T^\mu$  はガンマ行列が偶数個含む項のみ EDM に寄与  
 $V_6^\mu = \not{k} [(k \cdot q) \gamma^\mu - \not{q} k^\mu], \quad V_7^\mu = i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$

(A4) は実数  $\Rightarrow$  EDM に寄与しない

# 最終的な結果

(A1)+(A2)+(A3)+(A4)

$$i\mathcal{M}^{\text{CP}} = 2iem_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \left[ (k \cdot q) \not{\epsilon} - (\epsilon \cdot k) \not{q} \right] P_L u(p_1) \frac{1}{(k-p)^2 - m_\phi^2} \\ \times \frac{1}{k^2 - m_i^2} \frac{1}{k^2 - m_j^2} \text{Im} \left[ Q_\psi \frac{d\tilde{B}_{ji}}{dk^2} + k^2 \tilde{C}_{ji}(k^2) + \tilde{D}_{ji}(k^2) \right]$$

ここで  $\tilde{C}_{ji}(k^2) = \sum_p Q_p \left[ y_{j\alpha}^* (C_{p6}^L(k^2))_{ji} y_{i\alpha} \right]$ ,  $\tilde{D}_{ji}(k^2) = \sum_p Q_p \left[ y_{j\alpha}^* (C_{p7}^L(k^2))_{ji} y_{i\alpha} \right]$

■ 特に  $m_\alpha \ll m_\phi$  のときには

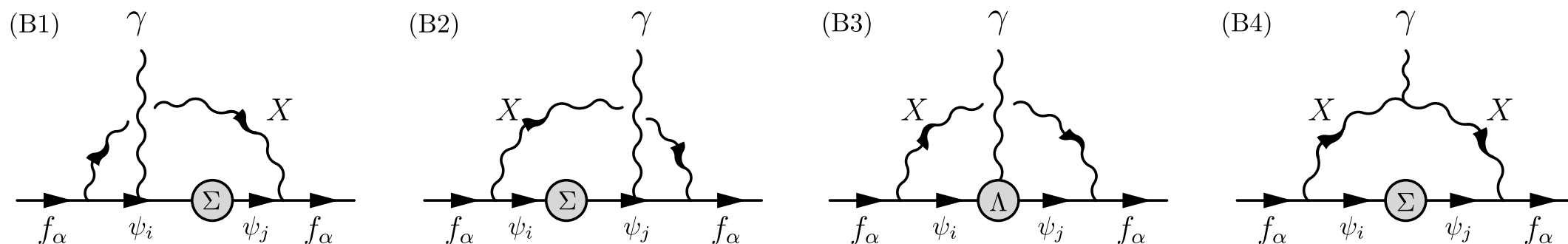
$$\frac{d_\alpha}{e} \approx - \frac{im_i m_\alpha}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_\phi^2)^2} \frac{1}{k^2 - m_i^2} \frac{1}{k^2 - m_j^2} \\ \times \text{Im} \left[ Q_\psi \frac{d\tilde{B}_{ji}}{dk^2} + k^2 \tilde{C}_{ji}(k^2) + \tilde{D}_{ji}(k^2) \right]$$

■  $B$ 、 $C$ 、 $D$ のみがEDMに寄与する

# スカラー $\Rightarrow$ ベクトル粒子

	$f_\alpha$	$\psi_i$	$X_\mu$
スピン	1/2	1/2	1
電荷	$Q_f$	$Q_\psi$	$Q_X$

## ■ 同様に計算できる



## ■ 特に $m_\alpha \ll m_X$ のとき

$$\frac{d_\alpha}{e} \approx \frac{3im_i m_\alpha}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{m_X^2} \frac{k^2}{(k^2 - m_X^2)^2} \frac{1}{k^2 - m_i^2} \frac{1}{k^2 - m_j^2}$$

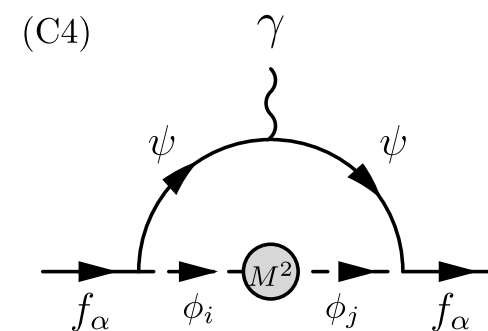
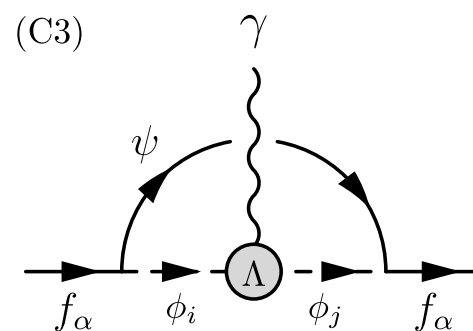
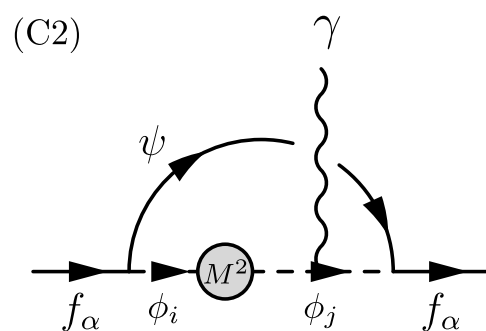
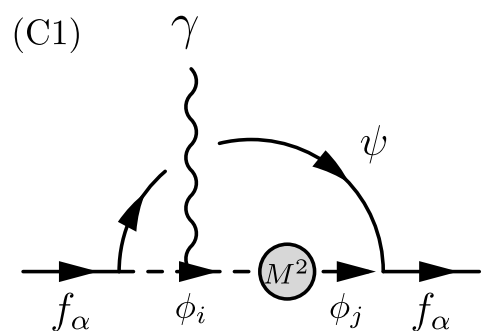
$$\times \text{Im} \left[ Q_\psi \frac{d\tilde{B}_{ji}}{dk^2} + k^2 \tilde{C}_{ji}(k^2) + \tilde{D}_{ji}(k^2) \right]$$

# スカラー複数個の場合

	$f_\alpha$	$\psi$	$\phi_i$
スピン	1/2	1/2	0
電荷	$Q_f$	$Q_\psi$	$Q_\phi$

- フェルミオン 1 個とスカラーが複数個ある場合

- EDM への寄与は完全に (C1)+(C2) と (C3) の間で完全に相殺





# 具体例

- 標準模型でのWボソンループの寄与  
 $B, C, D$ を含まないのでEDMゼロ
- Scotogenic 模型

	$\eta$	$N_i$
$SU(2)_L$	<b>2</b>	<b>1</b>
$U(1)_Y$	1/2	0
$\mathbb{Z}_2$	-1	-1
スピン	0	1/2

$$\mathcal{L} = - (y_{i\alpha}\eta^+\bar{N}_i P_L f_\alpha + \text{H.c.}) + ieA_\mu(\eta^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu\eta^+) - \bar{N}_i \Sigma_{ij} N_j - eA_\mu \bar{N}_i \Lambda_{ij}^\mu N_j$$

・ 自己エネルギー

$$\Rightarrow \Sigma_{ji}(k) = A_{ji}^L(k^2) \not{k} P_L + A_{ji}^R(k^2) \not{k} P_R$$

$\Rightarrow$  EDM ゼロ

・ 頂点補正

$$\Rightarrow C, D \text{なし}$$

# 具体例2

## ■ 拡張 Scotogenic 模型

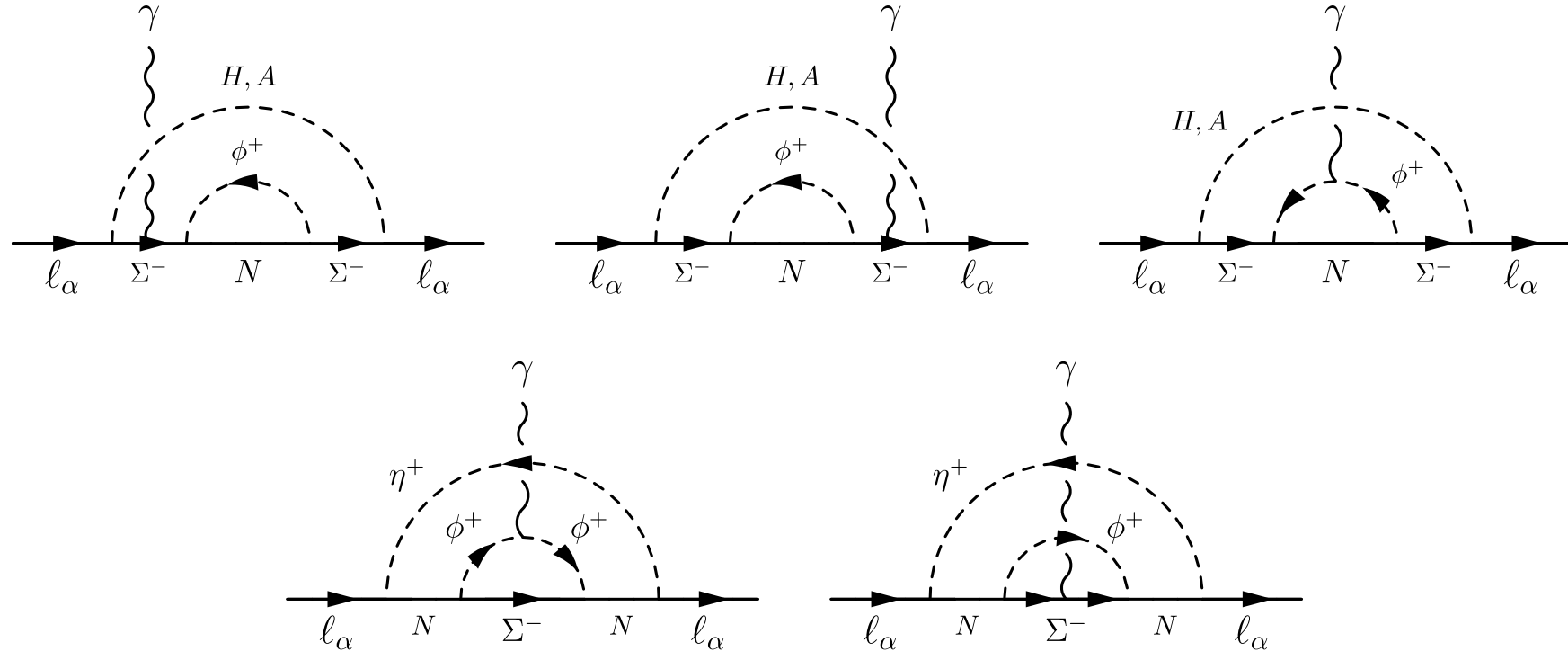
	$\eta$	$\Phi$	$N$	$\Sigma$
$SU(2)_L$	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>
$U(1)_Y$	1/2	0	0	0
$\mathbb{Z}_2$	-1	+1	-1	-1
スピン	0	0	1/2	1/2

## ■ ラグランジアン

$$\mathcal{L} \supset -y_{i\alpha}\eta\bar{\Psi}_i P_L f_\alpha - \frac{\lambda_{ij}}{2}\Phi\bar{\Psi}_i^c P_R \Psi_j$$

$$\Psi_1 = N, \Psi_2 = \Sigma$$

## ■ $B$ と $D$ が残る



# 具体例2-2

## ■ それぞれ

$$B_{22}(k^2) = -\frac{\lambda^{*2}m_1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi}{\Delta_1(k^2)}\right)^{\epsilon/2}$$

$$D_{11}(k^2) = \frac{\lambda^{*2}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{xm_2}{\Delta_2(k^2)}$$

ここで  $\Delta_i(k^2) = xm_i^2 + (1-x)m_{\phi^+}^2 - x(1-x)k^2$

## ■ EDM

$$\frac{d_\alpha}{e} \approx -\frac{(\text{Im}\lambda^2) |y_{1e}|^2 m_e m_1^2}{(4\pi)^4 m_{\eta^+}^4} \times \begin{cases} 0.25 \log\left(\frac{m_{\eta^+}^2}{m_1^2}\right) & \text{for } m_1 \sim m_2 \ll m_{\eta^+} \\ 0.30 \frac{m_{\eta^+}^4}{m_1^4} & \text{for } m_1 \sim m_2 \gg m_{\eta^+} \end{cases}$$

# 異常磁気モーメントへの適用

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 10, NUMBER 12

15 DECEMBER 1974

## Sixth-order magnetic moment of the electron\*

Predrag Cvitanović

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14853  
and Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California 94305

T. Kinoshita†

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14853

(Received 20 May 1974)

We have evaluated the contribution of 50 Feynman diagrams of three-photon-exchange type to the electron magnetic moment by two independent methods. The results are mutually consistent and are several times more accurate than previously reported calculations. If we combine the analytic result of Levine and Roskies for 10 diagrams and our numerical result for the remaining 40 diagrams, we obtain the best estimate available at present:  $(0.922 \pm 0.024) \times (\alpha/\pi)^3$ . Including the contribution from the remaining 22 diagrams calculated previously, the complete theoretical prediction for the electron anomaly up to the order  $\alpha^3$  is  $\frac{1}{2}\alpha/\pi - 0.32848(\alpha/\pi)^2 + (1.195 \pm 0.026)(\alpha/\pi)^3$ , in fair agreement with the latest experimental result.

Cvitanovic and Kinoshita, PRD 10, 4007 (1974)

- 実は異常磁気モーメントの計算にも適用されている
- 評価すべきダイアグラムの数が28→8へ減少

# まとめ

- 1 レインボーダイアグラムのEDMへの寄与を評価
- 2 ワード高橋恒等式により計算の簡略化が可能
- 3 特定のモデルでは完全に相殺する場合もある
- 4 計算チェックに使える