

ウイルスは数式に支配されている

齋藤 武

関西学院大学理学部、物理・宇宙学科

(tsaito@k7.dion.ne.jp)

概要

疫学における SIR 方程式を用いて、COVID-19 を解析した。本稿で特に力を入れた問題は、目次の 3, 4, 6, 9, そして 10 節である。 コロナは「感染力が強ければ強いほど死亡者数は少なくなる」とか、「感染が収束するのは何故か」という問題は、誰も答えることができなかった問題である。9 ではワクチンの効果や自粛率を SIR 方程式に取り入れる mathematical model を提唱した。最後に 10 節では生物絶滅の問題を考え、その理論を Logistic 理論に取り入れた。

目次

1. SIR 方程式
2. SIR 方程式の近似解
3. 第 5, 6, 7 波の基本再生産数
4. 感染力が強いほど死亡者は少ない
5. 第 6 波オミクロン株による死亡者が多いのは何故か
6. 感染は何故収束するか
7. 感染カーブの面積則
8. 感染カーブの左右対称性
9. ワクチンの効果、自粛率を取り入れる
10. Logistic Formula と生物絶滅の理論

1. SIR 方程式

人口の大きさを 1 に規格化し、 $S(t)$ =未感染者数、 $I(t)$ =感染者数、 $R(t)$ =除去数=死亡者数+回復者数の和に分ける：

$$(1) \quad S(t)+I(t)+R(t)=1$$

何れも時刻 t における数値である。人口の大きさは刻々変るが、変動は小さいとして無視する。日本全人口ではない。免疫を持っている人、ワクチンを打った人、および自粛中の人は感染しないので、これらの人たちを全人口から除いた「感染可能な人口」(N とする)を意味する。この人口 N は、5 節で説明されるように、基本再生産数 α がわかれば、除去数 R のデータから計算で求めることができる。

初期 $t=0$ では、 $S(0)=1, I(0)=R(0)=0$ である。時間発展は、次の三つの連立微分方程式に従うとする：

$$(2) \quad dS(t)/dt = -\alpha S(t)I(t)$$

$$(3) \quad dR(t)/dt = cI(t)$$

$$(4) \quad dI(t)/dt = c[\alpha S(t) - 1]I(t)$$

これを SIR 方程式という[1], [2-16]。ここで α は基本再生産数で、未感染者の集団に一人の感染者が侵入したとき、その感染者が回復するか死亡するまでに何人感染させるかの平均値を表す。また、 c =除去率といわれる。

(3)は、単位時間あたりの除去数 $R(t)$ の変化率は $cI(t)$ で与えられるという式である。 $1/c$ は回復あるいは死亡までの時間を与える。例えば、 $c=0.04$ では、回復時間 $1/c=25$ 日である。 $ct=t'$ を用いれば、 c は時間を調節するパラメータとなり、SIR 方程式から消えてしまう。見かけ上 $c=1$ と置いた式になる。

(2)は、 $c=1$ とおくと、単位時間あたりの未感染者数 $S(t)$ の変化率は $\alpha S(t)I(t)$ の割合で減少するという式である。(2)と(3)を受け入れると、残りの(4)の形は自動的に決まってしまう。

(1)により、三つの微分を加えたものは 0 にならなければならないからである。

$\alpha S(t)$ は実効再生産数と言われる。(4)から、 $\alpha S(t)>1$ なら感染者数 $I(t)$ は増え、 $\alpha S(t)<1$ なら感染者数は減ることが分かる。 $\alpha S(T)=1$ の場合は、(4)によって $dI(t)/dt|_{t=T} = 0$ なので、 $t=T$ は感染のピーク時となる

(2)と(3)の比をとると、 $dS/dR=-\alpha S$ となるので、これを R で積分して

$$(5) \quad S(t) = \exp[-\alpha R(t)]$$

が得られる。ここで初期条件、 $S(0)=1, R(0)=0$ を使った。したがって(1)より、

$$(6) \quad I(t) = 1 - R(t) - \exp[-\alpha R(t)]$$

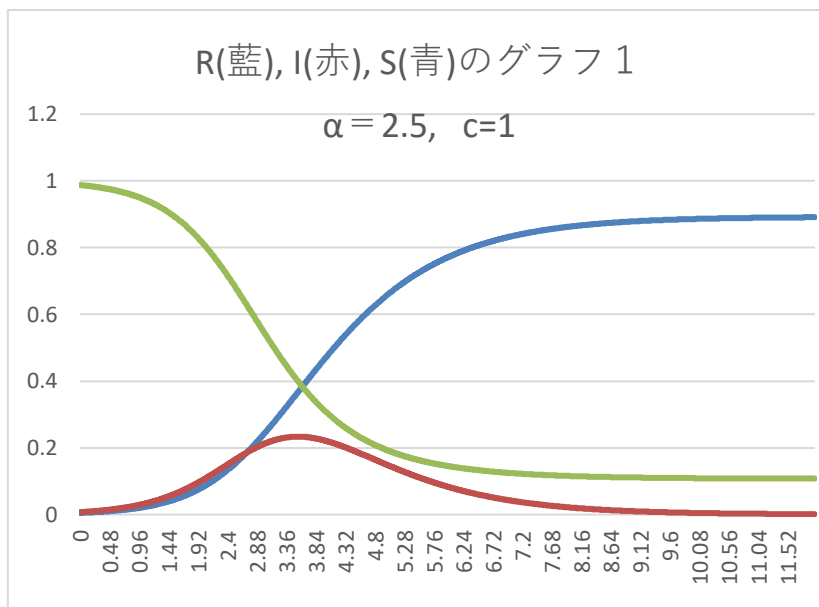
が出る。感染ピーク $t=T$ においては、 $S(T) = 1/\alpha$ なので、(5)より、 $R(T) = \ln\alpha/\alpha$ が得られる。これらをまとめると、感染ピーク $t=T$ において次の三つの式が成り立つ：

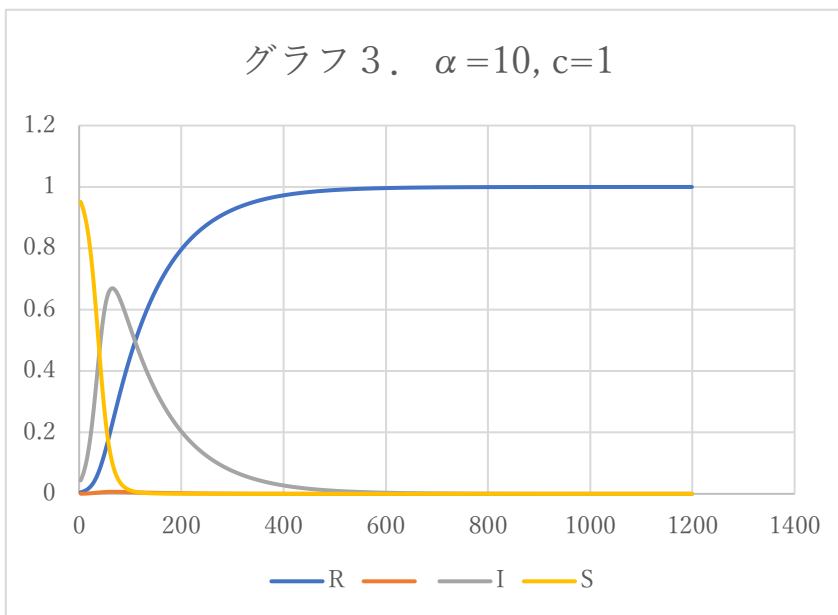
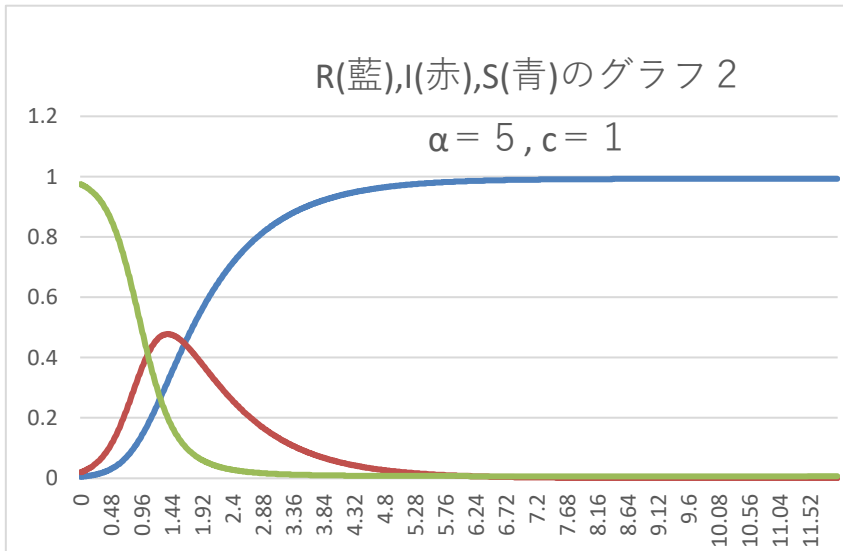
$$(7) \quad S(T) = 1/\alpha$$

$$(8) \quad R(T) = \ln\alpha/\alpha$$

$$(9) \quad I(T) = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\ln\alpha}{\alpha}$$

SIR 方程 1 式(2~4)は、 α と c が与えられれば Excel や Mathematica で解けてしまう。グラフ 1, 2, 3 は、それぞれ $\alpha=2.5, \alpha=5, \alpha=10$, いずれも $c=1$ の場合の Excel によるものである。グラフ 1 は日本における第 5 波デルタ株、グラフ 2 は第 6 波オミクロン BA1.2 株、グラフ 3 は第 7 波オミクロン BA5 株を表す。それぞれの α は 3 節で決定されたものである。





第7波は2022年9月末には収束に向かっていましたが、10月に入ってから第8波が始まった模様である。そのウイルスはオミクロンの変位株 BQ.1 と報告されている。これまでのワクチンや免疫も効かないようだ。

2. SIR 方程式の近似解

SIR 方程式の近似解を求める。それは生体個数を与える Logistic 理論によく似ていることが分かる [9], [10]。Sec. 1(6)式において、 αR が 1 より小さい場合、

$$(1) \quad \exp(-\alpha R) = 1 - \alpha R + \frac{1}{2!}(\alpha R)^2$$

のようにテーラー展開の2次で止める。その結果 Sec. 1(6) 式は次のようにまとまる：

$$(2) \quad I(t) = 1 - R - \left[1 - \alpha R + \frac{(\alpha R)^2}{2}\right] = (\alpha - 1)(1 - R/K)R, \quad K = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$

したがって、SIR 方程式の(3)式は

$$(3) \quad dR/dt = cI(t) = \gamma(1 - R/K)R, \quad \gamma = c(\alpha - 1)$$

となる。この式は $R(t)$ を生体個体数と見なせば、logistic curve を与える方程式と同じものである。(3) の解は

$$(4) \quad R(t) = \frac{K}{1 + \exp(-\gamma t)}$$

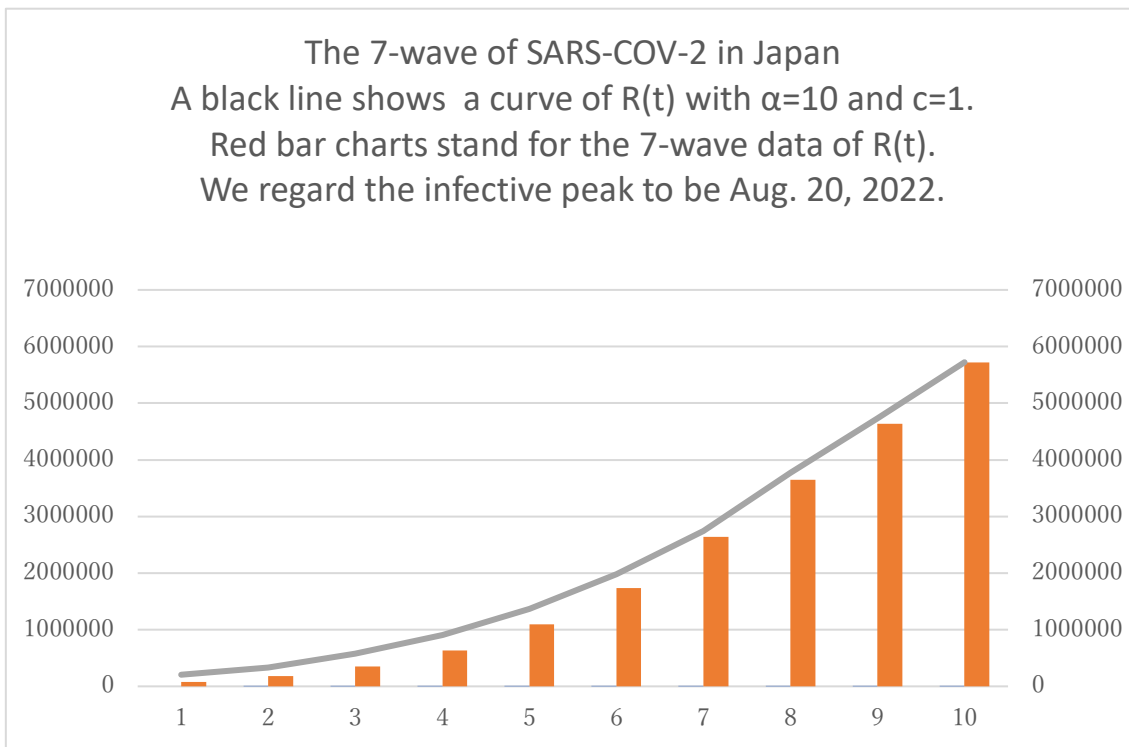
$$(5) \quad I(t) = \frac{\gamma K / (2c)}{1 + \cosh(\gamma t)}$$

ここで境界条件として、 $I(t)$ のピークは $t = 0$ に選んだ。したがって $t = 0$ は $R(t)$ の変曲点になっている。(4), (5) が SIR 方程式の Logistic 近似解である [10]。

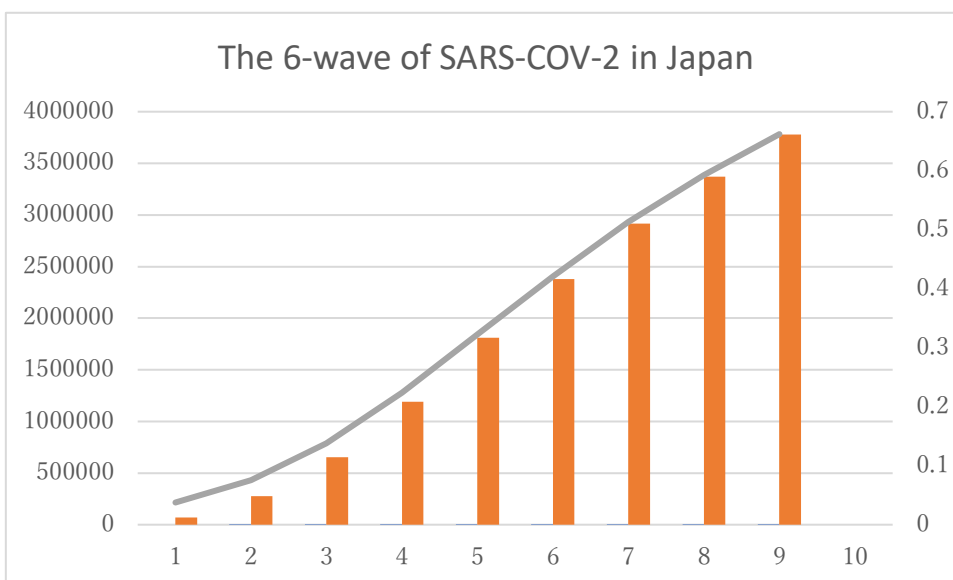
3. 第 5, 6, 7 波の基本再生産数

日本の第 5, 6, 7 波の基本再生産数について調べよう。感染者数のデータは信用できないので、除去数 $R(t)$ = 回復者数 + 死亡者数のデータを用いることにする。それも死亡者数は回復者数に比べて少ないので無視する。結論は第 5 波の基本再生産数 $\alpha = 2.5$ 、第 6 波のそれは $\alpha = 5$ 、第 7 波は $\alpha = 10$ となった。いずれも予想値より小さい値であった。

2022 年 1/15 を第 6 波の始まりとし $R(t) = 0$ とおく。1/22, 1/29, ... のように 1 週間ごとの R のデータを選ぶ [17]。2/19 が感染ピーク ($t = T$) に当たり、累積数 $R(T) = 181 \times 10^4$ 人、3/19 のそれが $R = 378.2 \times 10^4$ 人であった。これらを Excel で棒グラフ (bar chart) を描かせる。この棒グラフにうまくのせるためには、SIR モデルにおいて基本再生産数を $\alpha = 5$ にとればよく fit することがわかった。第 5 波、第 7 波についても同様にやり、それぞれ $\alpha = 2.5$ 、 $\alpha = 10$ となった。



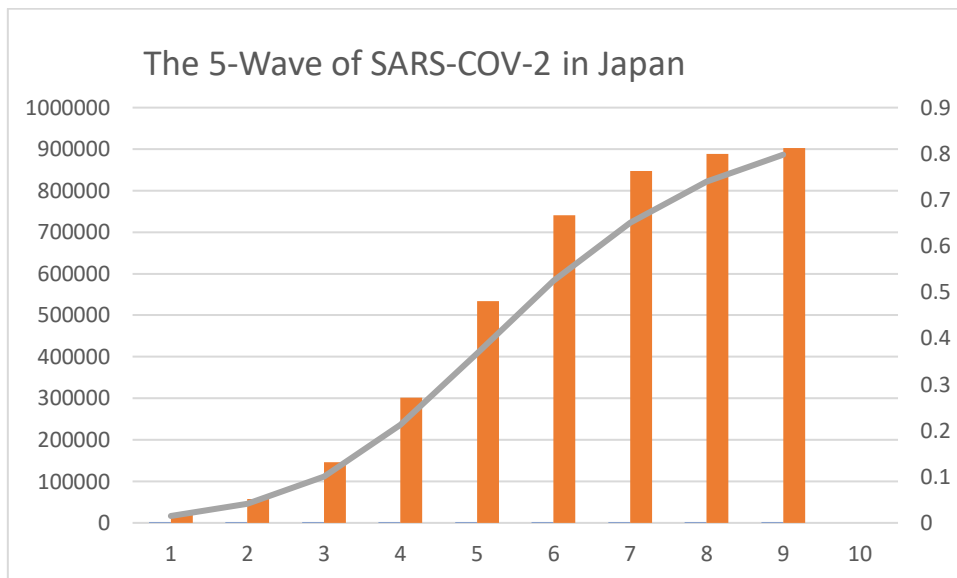
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Jul. 1	Jul. 6	Jul. 11	Jul. 16	Jul. 21	Jul. 26	Jul. 31	Aug. 5	Aug. 10	Aug. 15



Black line: $R(t)$ with $\alpha = 5$ 、removed ratio $c = 1$ for the right vertical line

Red bar chart: $R(t)$ data for the left vertical line. The infective peak is on Feb. 19.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Jan. 15	Jan.22	Jan. 29	Feb.5	Feb. 12	Feb.19	Feb. 26	Mar. 5	Mar. 12	Mar. 19



Black line: $R(t)$ with $\alpha = 2.5$, removed ratio $c=1$ for the Right vertical line;

Red bar chart: The 5-Wave Data of $R(t)$ for the Left vertical line. The infective peak is on Sep. 3.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Jul.10	Jul.21	Aug. 1	Aug.12	Aug.23	Sep. 3	Sep. 14	Sep. 25	Oct. 6	Oct. 17

4. 感染力が強いほど死亡者は少ない

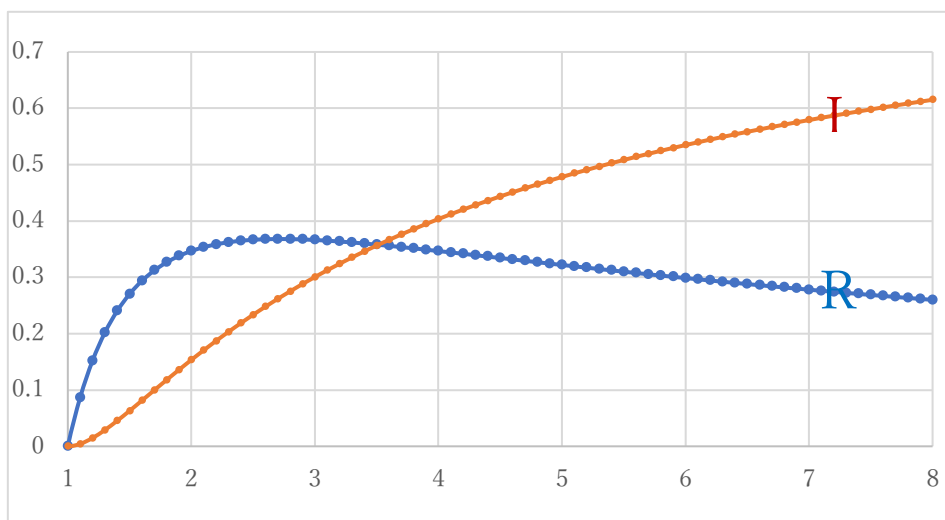


図1. 青線は(1の8)式、ピーク T における $R(T)=(\log \alpha)/\alpha$ の α に対するカーブ、赤線は同じく T における(1の9)式 $I(T)=1-(1/\alpha)-(\log \alpha)/\alpha$ の α に対するカーブ。横軸 α の領域は $1 \leq \alpha$ 。赤線、青線の交点は $\alpha = 3.5$ で与えられる

ウイルスにとって感染ピークまでが勝負である。ピーク後は感染が収束に転じる。餌である未感染者の数 S が減るからだ。そこで、ピークまでの死亡者数累計 $D(T)$ がどうなるかについて調べるのが重要である。

図1は、感染ピーク $t=T$ において成り立つ式、(1.8)式、 $R(T)=(\log \alpha)/\alpha$ 、および(1.9)式、 $I(T)=1-(1/\alpha)-(\log \alpha)/\alpha$ の α に対するカーブを描いたものである。このカーブが一つの定理を語ってくれる。二つのカーブの交点は $\alpha = 3.5$ で与えられる。基本再生産数 α が 3.5 より大きければ大きいほど、青線のピークにおける感染者数 $I(T)$ の増加が急になる。しかし同じくピークにおける赤線の除去数 $R(T)=(\log \alpha)/\alpha$ と未感染者数 $S(T)=1/\alpha$ は、 α とともに減少する一方である。 $R(T)$ が減少すると、死亡者数の累計 $D(T)$ も下に説明してある公式 $D(T)=\lambda R(T)$ によって減少する (λ は致死率)。この定理をまとめると [13]、

定理1. 「ウイルスは α が大きくなり感染力が強くなるほど、除去数 $R(T)$ を小さくし、したがって死亡者数累計 $D(T)$ も小さくする」

この定理はピーク T までの R と D の数が抑えられるというものだが、ピーク後は累積されて増える。7節によれば、 $t \rightarrow \infty$ においては、 $\alpha \geq 5$ の場合、常に $R(\infty)=1$ となるので、 $D(\infty)=\lambda R(\infty)=\lambda$ が得られる。つまり全死亡者数は「感染可能な人口」 N の λ 倍となる。 N の推定は5節で計算されている。

定理2. 「 $\alpha \geq 5$ の場合、全死亡者数は常に λN で与えられる」

感染力が強くて感染者が増えれば、それ相応に死亡者も増える」というのが常識だが、全く逆でピークまでは減少するのである。第6波の α は大きいのに死亡者数が多いではないか、という批判に対しては、5節の議論を参照せよ。ピーク以降では、死亡者数累計 $D(t)=\lambda R(t)$ は $R(t)$ と共に増加する。しかし日毎の変化率は、 $dD/dt=c\lambda I$ で与えられるので、日毎の死亡者数は I とともに非常に小さくなる。

致死率 λ についての注意： 致死率は疫学では通常 $\lambda = D(t)/R(t)$ で定義され、第6波オミクロン株では $\lambda = 0.0015$ 、第5波では $\lambda = 0.0026$ で略一定である[Sec.5 参照]。したがって、

$$D(t) = \lambda R(t)$$

なる関係式により $D(t)$ と $R(t)$ は同じ振る舞いをする事が分かる。SIR方程式の(1.3)式より、感染ピーク時 $t=T$ において、 $\frac{d^2R}{dt^2} = c \frac{dI}{dt} = 0$ が成り立つので、 $R(t)$ の曲線は $t=T$ で変曲点を持つ事が分かる。したがって $D(t)$ も同様である。

5. 第6波オミクロン株による死亡者が多いのは何故か

コロナ第6波の死亡者が多い理由を考える。

コロナ第5波(7/6~8/28 ピーク)、第6波(1/5~2/13 ピーク)の除去数 R のデータはピークまでで次のとおりである([17]東洋経済)。感染者数のデータは信頼できないのでここでは用いない。

$$N(5)R(5) = \text{死者数} + \text{回復者数} = 1010 + 394014 = 395024 \text{ 人}$$

$$N(6)R(6) = \text{死者数} + \text{回復者数} = 1901 + 1294021 = 1295922 \text{ 人}$$

$N(5)$, $N(6)$ はそれぞれの場合の「感染可能な人口」 N を表す。基本再生産数 α はそれぞれ2.5及び5である(Sec.3 参照)。

公式 $R(T, \alpha) = \ln \alpha / \alpha$ より、 $R(T, 2.5) = 0.3665 = R(5)$ 、 $R(T, 5) = 0.322 = R(6)$ なので、

$$N(5)R(5) = 395024, N(6)R(6) = 1295922 \text{ に代入して、}$$

$$N(5) = 1077828 \sim 108(\text{万人}), N(6) = 4024602 \sim 402(\text{万人})$$

を得る。

結論：

第6波の「感染可能な人口」 $N(6)$ が402万人もいて第5波の108万人の4倍近くもあるということは、第6波オミクロンに対する第5波の免疫効果が1/4に減っていると解釈される。 $R(6)$ が小さくなっているのに、死亡者数が多いのは、 $N(6)$ が $N(5)$ の4倍も多いからであることで説明できる。

致死率 λ を計算しておこう。疫学では、 $\lambda = \text{死亡者数} / \text{除去数} = \text{死亡者数} / (\text{死亡者数} + \text{回復者数})$ で定義される。分母は感染者総数になっている。年齢によっても異なるが、ここでは全ての平均である：

$$\lambda(5) = 1010 / 395024 = 0.0026 = 0.26\%$$

$$\lambda(6) = 1901 / 1295922 = 0.0015 = 0.15\%$$

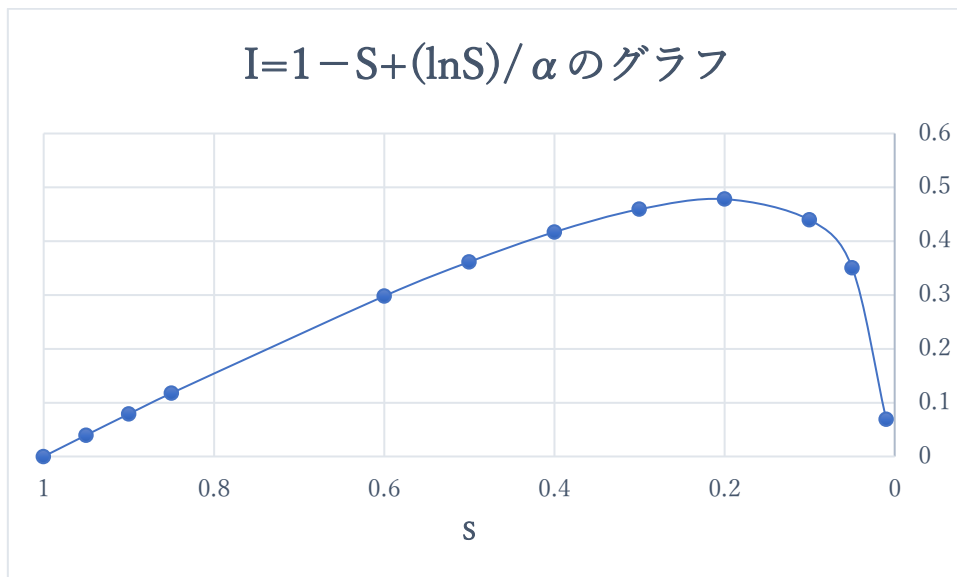
第6波の死亡者数は第5波より多いが、致死率は第6波の方が半分近く小さいのである。

6. 感染は何故収束するか

下の図は時日 t における感染者数 $I(t)$ と未感染者数 $S(t)$ の関係を与える式

$$(1) \quad I(t) = 1 - S(t) + [\ln S(t)] / \alpha$$

を、 $\alpha = 5$ の場合について $S(t)$ の関数として描いたものである。この図をもとに感染は何故収束するか理由を考えよう。



横軸が S 、縦軸が I である。 $S(t)$ は $t = 0$ で $S(0) = 1$ から立ち上がる。ウイルスは餌である S を食べて感染者 I を 0 から増やしていく。餌の量が $S = 1 / \alpha = 1 / 5 = 0.2$ になったところ

で感染はピークとなる。ピークでは傾きが0なので、

$$(2) \quad dI/dS = -1 + 1/(\alpha S) = 0$$

より $S=1/\alpha$ が得られるからである。このことは SIR 方程式(1.4)、 $dI/dt=c\alpha(S-1/\alpha)I$ 、
がピークで0になることから分かる。餌の量 S が $1/\alpha=0.2$ より更に減ってくると、 $(S-1/\alpha)$ が負になるので、 dI/dt も負になり感染は収束に向かう。 αS は実効再生産数を表すので、これが1より小さくなったので収束に向かったといってもよい。要するにウイルスの餌が減ったから感染が減ってきたのだ。

ピーク時 $t=T$ においても規格化の式(1節.1)、 $S(T) + I(T) + R(T) = 1$ が成り立っている。これを書き直すと

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{\alpha} = I(T) + R(T) = T \text{ までの感染者総数}$$

となる。この左辺の量 $1 - 1/\alpha$ を**集団免疫閾値**という。 $\alpha = 5$ の場合、 $0.8=80\%$ となる。感染が収束に向かったのは集団免疫が達成されたからでもある。80%といっても、「感染可能な人口」 N に対する80%である。5節で計算されたように、 $\alpha = 5$ のオミクロン第6波の場合の N は400万人程度である。

7. 感染カーブの面積則

面積則[14]とは、 α が5より大きい場合、 $cS=c'S=1$ が成り立つことを言う。 c は除去率、 S は感染カーブ $I(t)$ の $t=0$ から ∞ までの面積を表す。

証明は次のとおり：

SIR 方程式の除去数に $R(t)$ に対する式

$$(1) \quad dR(t)/dt = cI(t),$$

を用いる。 $I(t)$ は t における現在感染者数(新規感染者数ではない)、 c は除去率である。この式の両辺を t について0から ∞ まで積分すると次式を得る：

$$(2) \quad R(\infty) = c \int_0^{\infty} I(t) dt = cS.$$

ここで S は感染カーブの時間軸との間の面積を表す。 $R(\infty)$ には次の公式がある：

$$(3) \quad \alpha = -\frac{\ln[1-R(\infty)]}{R(\infty)},$$

ここで α は基本再生産数である。この式は (1 節.6) 式、 $I(t) = 1 - R(t) - \exp[-\alpha R(t)]$ において、 $t \rightarrow \infty$ で $I(\infty)=0$ となることから得られる。

$$(4) \quad R(\infty) = 1 - \varepsilon, \quad (\alpha \varepsilon \ll 1)$$

とおき、(3)に代入すると

$$(5) \quad \varepsilon = e^{-\alpha} e^{\alpha \varepsilon} = e^{-\alpha} + 0(\alpha \varepsilon)$$

となる。Fig.1 は、 α に対する ε のグラフを EXCEL で描いたものである。図によると、 $\alpha > 5$ で $\varepsilon = 0$ なので、 $R(\infty)=1$ であることが分かる。したがって(2)より

$$(6) \quad cS=1 \text{ for } \alpha > 5$$

が得られる。これを面積定理という。

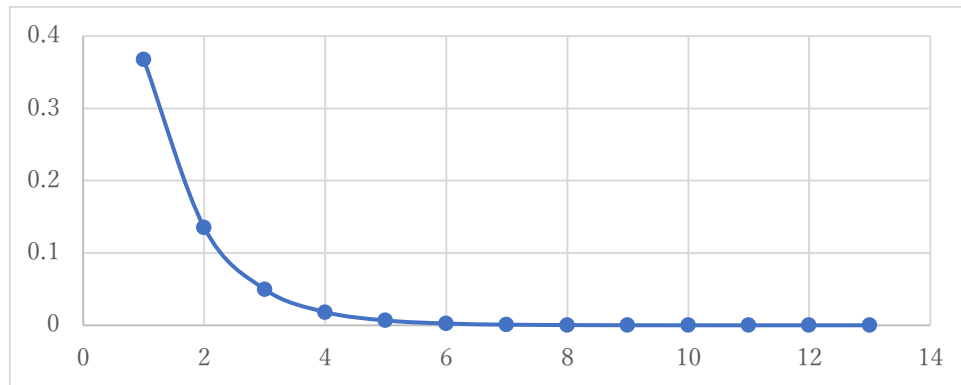


Fig. 1. Numerical values of ε against α .

8. 感染カーブの左右対称性

感染カーブの山の左右対称性を S I R の数式だけから調べることを考える。そのために、 T =感染ピーク時の回りで現在感染者数 $I(t)$ をテーラー展開する：

$$(1) \quad I(T + \varepsilon) = I(T) + \varepsilon A + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 B + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 C + \dots$$

$$(2) \quad dI/dt = (\alpha S - 1)I$$

$$(3) \quad d^2I/dt^2 = \alpha dS/dt I + (\alpha S - 1)dI/dt$$

除去率は $c=1$ とする。(3)式をもう一度微分すると、

$$(4) \quad d^3I/dt^3 = \alpha d^2S/dt^2 I + 2\alpha dS/dt dI/dt + (\alpha S - 1)(d^2I/dt^2) \\ = \alpha d^2S/dt^2 I = C \text{ at } t=T$$

また、 $dS/dt = -\alpha SI$ を微分すると、 $t=T$ で次がでる：

$$(5) \quad d^2S/dt^2 = -\alpha dS/dt I = -\alpha(-\alpha SI^2) = \alpha I^2$$

したがって、 $C = \alpha^2 I^3$ と決まる。

次に(3)式で $t=T$ と置くと、 $B = \alpha dS/dt I = \alpha(-\alpha SI^2) = -I^2$ となる。 A は 0 なので、(1) は結局次のようにまとまる：

$$(6) \quad I(T + \varepsilon) = I(T) - (1/2)\varepsilon^2 \alpha I^2(T) + (1/6)\varepsilon^3 \alpha^2 I^3(T) \\ = I(T) - (1/2)\varepsilon^2 \alpha I^2(T) [1 - (1/3)\varepsilon \alpha I(T)]$$

結論：

最後の(6)式で、 ε も $I(T)$ も 1 より小さい。したがって α が 3 より小さいときは、最後の $(1/3)\varepsilon \alpha I(T)$ の項は 1 に比べて無視できるので、左右対称的になる。 α が 3 より大きいときは、最後の項は無視できないので、左右非対称となり、右側が膨らむ。第 6 波の山は、 $\alpha = 5$ なので、左側は急速に立ち上がるが、右側はゆっくり下がっていく。一方第 5 波は $\alpha = 2.5$ なので左右対称的である。Excel による exact なカーブもこのようになっている。

9. ワクチンの効果、自粛率を取り入れる

時刻 t におけるワクチン接種者 $p(t)$ 割、自粛者 $h(t)$ 割とする。自粛者 $h(t)$ には免疫をもともと持っていた者を含めてもよい。全人口を 1 とし、 $1 = p(t) + h(t) + n(t)$ のように分ける。更に、 $n(t) = s(t) + r(t) + i(t)$ のように三つの和で表す。これらはそれぞれ background 人口 $n(t)$ における未感染者数、除去者数、感染者数を示している。両辺を $n(t)$ で割ると、

$$(1) \quad 1 = S(t) + R(t) + I(t)$$

ここで、 $S = s/n$, $R = r/n$, $I = i/n$ である。SIR モデルは S, R, I に対して適用される。初期条件

は、 $S(0)=s(0)/n(0)=1$, $R(0)=r(0)/n(0)=0$, $I(0)=i(0)/n(0)=0$ である。基本再生産数 α を決めると SIR モデルは解けてしまい、 $S(t)$, $R(t)$, $I(t)$ の t に対するカーブが描ける。 $\alpha=2.5$ とすると、 $S(T)=1/\alpha=0.4$, $R(T)=\log \alpha / \alpha=0.37$, $I(T)=1-1/\alpha-\ln \alpha / \alpha=0.23$ も定まる。これから、background $n(t)$ に対する $s(t)$, $r(t)$, $i(t)$ の振る舞いがわかる。

$s(t)=n(t)S(t)$, $r(t)=n(t)R(t)$, $i(t)=n(t)I(t)$ は定義である。簡単のため $n(t)=1-p(t)-h(t)=A-Bt$ と仮定する。 A, B は 1 より小さい定数である。この仮定は、ワクチン接種率 $p(t)$ が時間 t と共に linear に増加していることによる。これから、 $i(t)$ のピーク時を求めるには

$$(2) \quad \frac{di}{dt} = \frac{dn}{dt} I + n \frac{dI}{dt} = -BI + (A - Bt)(\alpha S - 1)I = I[-B + (A - Bt)(\alpha S - 1)] = 0$$

を解けばよい。 $t=T+\varepsilon$ とおいて、 ε の 1 次の近似で $\varepsilon = -\frac{B}{(A-BT)I(T)}$ と定まる。 $i(t)$ のピーク時は

$t = T - \frac{B}{(A-BT)I(T)}$ で与えられる。 T より微小量 ε だけずれるのである。

また、ピーク時において次のような等式が成り立つ：

$$(3) \quad s(T+\varepsilon) = n(T+\varepsilon)S(T+\varepsilon) = (A - BT)S(T) - \varepsilon[BS(T) + (A - BT)I(T)]$$

$$(4) \quad r(T+\varepsilon) = n(T+\varepsilon)R(T+\varepsilon) = (A - BT)R(T) - \varepsilon[BR(T) - (A - BT)I(T)]$$

$$(5) \quad i(T+\varepsilon) = n(T+\varepsilon)I(T+\varepsilon) = (A - BT)I(T) - \varepsilon BI(T)$$

結論：ワクチン接種率 $p(t)$ が時間 t と共に linear に増えている事実を SIR 方程式に取り入れた。しかし、感染ピーク T は $p(t)$, $h(t)$ が無い場合に比べて微小量 ε ずれるだけである。 $s(t)$ も $i(t)$ も、 $S(t)$ や $I(t)$ に比べて低くなり、ピークの後では、 $s(t)$, $i(t)$ は 0 に向かって $S(t)$ や $I(t)$ よりも早く収束することが解る。連休の後では、 $h(t)$ が減るので A が増加する。このため感染が増えることがわかる。実際第 6 波ではそうだった。

10. Logistic Formula と生物絶滅の理論

1954 年から 72 年にかけて、アメリカの動物行動学者のジョン・B・カルホーン(John B. Calhoun, 1917-1995)が行ったマウス絶滅の実験がある[18]。

マウスの絶滅

二組のつがいのマウスに十分な広さと無限に与えられる食餌、運動できる場所や適切な気温と湿度が保たれた部屋を用意した。このマウスたちにとって天敵のいない最高の環境で

あった。この部屋には 3840 匹のマウスを収容できることが可能であった。マウスの個体数は 560 日目で 2200 匹ほど増えたという。そして、そこから減少が始まった。出生数より死亡数が多くなった。お互いの攻撃がひどくなり、メスは繁殖行動に無関心になった。そして 1780 日目に最後のオスが死に、滅亡が決まった。この実験は規模を変え 25 回繰り返され、その全てが同じ結果であった。

世界の人口減

さて人類の人口はどうなっているであろうか。WHO の「世界人口動向」に、1950-2100 年死亡率と出生率の統計がある。それによると、2015 年総人口 74 億人、2100 年総人口 109 億人、但し low 推計では 73 億人となっている。世界人口は今や減少に転じているのだ。日本の人口減少は問題視されて久しい。

Logistic formula and the extinction of species (種の絶滅)

人口問題を扱う logistic 方程式[9]を考えよう。それは人口を $R(t)$ で表せば次式で与えられるものである：

$$(1) \quad dR(t)/dt = I(t), \quad I(t) = \gamma [1 - R(t)/K]R(t)$$

ここで γ 、 K はパラメーターである。SIR モデルの $R(t)$ 、 $I(t)$ とは関係ない。これは容易に積分できて

$$(2) \quad R(t) = K / (1 + \exp(-\gamma t))$$

が解である。但し境界条件は $R(0) = K/2$ at $t=0$ とした。このポイントは $R(t)$ のカーブの変曲点になっている。解(2)を $I(t)$ の定義式に代入すると、次式が得られる：

$$(3) \quad I(t) = (\gamma K/2) / [1 + \cosh(\gamma t)].$$

この $I(t)$ のカーブのピークは $I(0) = \gamma K/4$ at $t=0$ で与えられる。図 1 に $R(t)$ と $I(t)$ のカーブを描いてある。但し $K=1$ 、 $\gamma = 3$ とした。

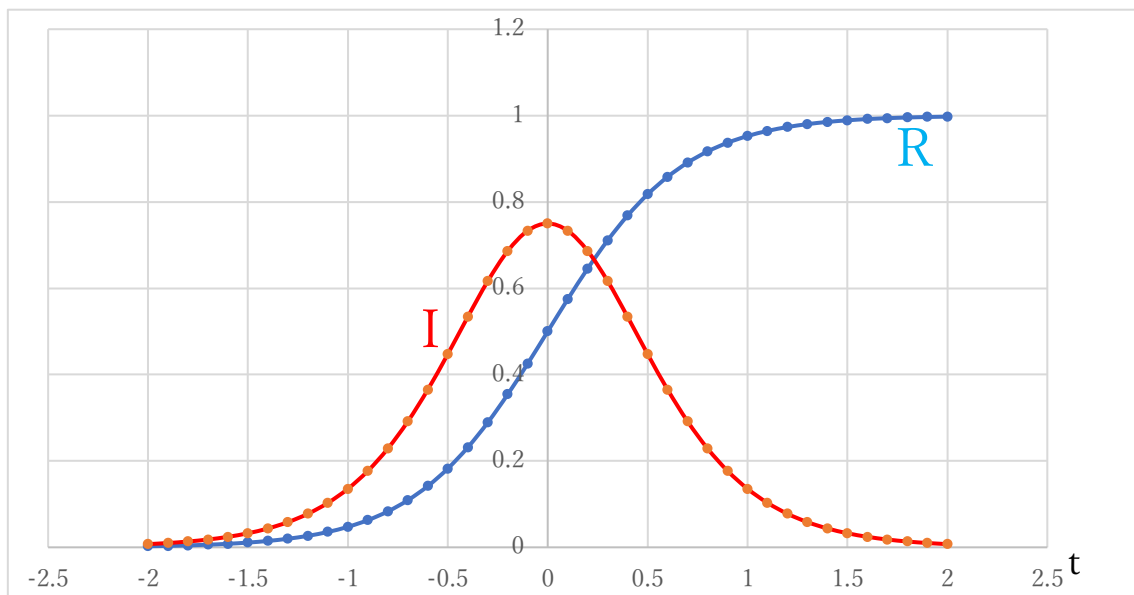


Fig. 1. Curves of $R(t)$ and $I(t)$ with $K=1$ and $\gamma=3$.

この図で特徴的なことは、人口 $R(t)$ が最初 t の負の領域で指数関数的に立ち上がったのが、やがて t の正の領域で一定値 K に近づくことである。これが logistic 曲線の特徴に外ならない。人口の増加が止まり一定値に近づくのである。一方関数 $I(t)$ のカーブは山を描き、そのピークは $t=0$ で与えられる。これらの振る舞いは、疫学の SIR モデルにおける除去数 $R(t)$ と感染者数 $I(t)$ の振る舞いによく似ている。

そこで、われわれは生物種の絶滅についての新しい logistic 方程式を提案しよう。すなわち、われわれは $R(t)$ ではなく、 $I(t)$ の方を t における人口を表すと考える。そうすると、この人口は最初指数関数的に増加するが、やがてピークに達し、その後減少に転じ絶滅に至る。ここで $R(t)$ は、方程式(1)を時間 t で初期値から t まで積分すれば分かるように、初期から時刻 t までの累積人口を表すと解釈される。

人口 $I(t)$ に対する新しい logistic 微分方程式は次のように与えられる。 $I(t)$ の定義式、 $I(t)=\gamma(1-R/K)R$ 、の両辺を t で微分すると次を得る：

$$(4) \quad dI(t)/dt = \lambda(t)I(t)$$

ここで $\lambda(t) = \gamma[1 - 2R(t)/K]$ で定義される。 $R(t)$ は(2)式で与えられているので、 $\lambda(t)$ は t の定まった関数である。

$R(t)$ が 1 に比べて小さい初期では $\lambda(t) \sim \gamma$ なので、 $I(t)$ は指数関数的に立ち上がる。しかしこの立ち上がりは $R=K/2$ のところで λ が 0 になるので止まる。 R が $K/2$ より大きくなると λ が負とな

り、 $I(t)$ は減少に向かい、最後には0となり種の絶滅に至る。種の絶滅の原因は、パラメーター γ と K に集約されている。図1は、赤カーブ $I(t)$ が時間 t における人口曲線を表し、青カーブ $R(t)$ は初期から時間 t までの累積人口を示している。

謝辞

関学理の岡村隆、神戸国際大の小門陽、両氏との有益な議論に感謝いたします。

References

- [1] W. O. Kermack and A.G. McKendrick, A. G. (1927), "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics", Proceedings of the Royal Society A115 (1927), 700-721(1927).
- [2] W. D. Murray, "Epidemic models and the dynamics of infectious diseases", Mathematical Biology 42, 610-650 (1993).
- [3] H. Hethcote, "The Mathematics of Infectious Diseases", SIAM Review 42, 599-653 (2000).
- [4] M.J. Keeling and L. Danon, "Mathematical modelling of infectious diseases ", British Medical Bulletin 92, 33-42 (2009).
- [5] S. Pathak, A. Maiti and G.P. Samanta, "Rich dynamics of an SIR epidemic model", Nonlinear Analysis: Modelling and Control 15, 71-81 (2010).
- [6] T. Harko, F.S.N. Lobo, M.K. Mak, "Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates", Applied Mathematics and Computation 236, 184194 (2014).
- [7] J.C. Miller, "Mathematical models of SIR disease spread with combined non-sexual and sexual transmission routes", Infectious Disease Modelling 2, 3555 (2017).
- [8] R. Sameni, "Mathematical Modeling of Epidemic Diseases; A Case Study of the COVID19 Coronavirus", [arXiv:2003.11371 [q-bio.PE]](2017).
- [9] P-F. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement", Correspondance Mathmatique et Physique 10, 113-121 (1838).
- [10] T. Saito and K. Shigemoto, "A Logistic Curve in the SIR Model and Its Application to Deaths by COVID-19 in Japan", medRxiv 10.1101/2020.06.25.20139865. European Journal of Applied Sciences 10(5),157-160(2022).
- [11] T. Saito, "An Application of Logistic Formula to Deaths by COVID-19 in Japan", medRxiv 10.1101/2020. 09.15.20195081.
- [12] A. Kokado and T. Saito, "A Logistic Formula and Its Application to Deaths by the Third

- Wave of COVID-19 in Japan”, medRxiv 10.1101/2021.01.30.21250827,
- [13] T. Saito, “Variants of SARS-COV-2 and the Death Toll”, *Integ Mol Bio Biotechnol* 1:001-003(2021).
- [14] T. Saito, “Area Theorem of Infection Curves for Large Basic Reproduction Number”, *European Journal of Applied Sciences* 10(1), 482-486(2022)
- [15] T. Saito, “Analyses of COVID-19 in Japan by the Mathematical Model of SIR”, *EJAS*, 10(3), 784-796(2022).
- [16] T. Saito and K. Shigemoto, “A Logistic Curve in the SEIR Model and the Basic Reproduction Number of COVID-19 in Japan”, medRxiv 10.1101/2022.09.18.22279896. *EJAS*, 10(5), 481-486(2022).
- [17] Data published from the Ministry of Health, Labor and Welfare of Japan. See for example, “Summary of the New Coronavirus Infection ”(in Japanese), <https://hazard.yahoo.co.jp/article/20200207>; “Status of the Domestic New Coronavirus Infection”(in Japanese), <https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>.
- [18] J. B. Calhoun, “Death Squared: The Explosive Growth and Demise of a Mouse Population”, *Proc. R. Soc. Med.* 66(1 Pt2): 80-88.