

2022年度修士学位論文

フラクトン系における場の理論と双対性
(Quantum field theories and dualities in fracton systems)

島村 洲太郎

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

概要

フラクトン系は移動が制限された励起を持つような理論であり、部分系対称性と呼ばれる新たなタイプの大域的対称性を持つ。本論文では、フラクトン系の格子模型・場の量子論についてレビューする。後半部分では、 $2 + 1$ 次元及び $3 + 1$ 次元において、フラクトン系の場の理論の2つの記述である foliated BF 理論と exotic BF 理論の双対性について論じる。これら2つの BF 理論は等価であると信じられていたものであるが、実際にゲージ不変演算子を同一視することによって、ゲージ場とゲージパラメーターの顕わな対応が得られることを示す。

目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	フラクトン系	7
2.1	フラクトン系と部分系対称性	7
2.2	\mathbb{Z}_2 X-cube 模型	8
2.2.1	Hamiltonian と励起	8
2.2.2	部分系対称性	10
2.2.3	基底状態の縮退度	11
2.2.4	リモートな検出	12
第 3 章	2+1 次元における ϕ 理論	13
3.1	場の理論における部分系対称性	13
3.2	XY-plaquette 模型と ϕ 理論	14
3.2.1	2+1 次元の XY-plaquette 模型	14
3.2.2	連続極限と場の配位	15
3.2.3	2+1 次元の ϕ 理論	16
3.2.4	自己双対性	18
3.2.5	Momentum mode と winding mode	19
3.2.6	普遍性	21
3.2.7	Robustness	22
第 4 章	2+1 次元のフラクトン系の BF 理論	23
4.1	格子模型	23

4.1.1	\mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型	24
4.1.2	\mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論	25
4.2	Foliated QFT	26
4.2.1	Foliation と foliated ゲージ場	26
4.2.2	2+1 次元の foliated BF Lagrangian	28
4.2.3	ゲージ不変演算子	31
4.2.4	電磁双対による記述	34
4.3	Exotic QFT	35
4.3.1	テンソルゲージ場	35
4.3.2	2+1 次元の exotic BF Lagrangian	36
4.3.3	ゲージ不変演算子	37
4.3.4	電磁双対による記述	38
4.4	2+1 次元における対応	39
4.4.1	BF 理論における対応	40
4.4.2	電磁双対の理論での対応	43
4.5	基底状態の縮退度とロバストネス	46
第 5 章	3+1 次元のフラクトン系の BF 理論	48
5.1	格子模型	48
5.1.1	\mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論	48
5.1.2	\mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論	50
5.1.3	\mathbb{Z}_N X-cube 模型	52
5.2	Foliated QFT	52
5.2.1	Foliated ゲージ場	52
5.2.2	3+1 次元の foliated BF Lagrangian	53
5.2.3	ゲージ不変演算子	55
5.3	Exotic QFT	58
5.3.1	テンソルゲージ場	59
5.3.2	3+1 次元の exotic BF Lagrangian	60

5.3.3	ゲージ不変演算子	62
5.4	3+1 次元における対応	65
5.5	基底状態の縮退度とロバストネス	71
第 6 章	結論と展望	74
付録 A	1+1 次元の BF 理論	76
A.1	ゲージ場とゲージ変換	76
A.2	BF 理論	78
A.3	ゲージ不変演算子	80
参考文献		83

第 1 章

序論

本論文では、ここ数年で物性物理学・素粒子物理学の分野で理論的に注目を集めているフラクトン系の格子模型・場の量子論 (QFT) について、具体的なモデルを例にとってその性質をレビューする。また, foliated QFT と exotic QFT という 2 つのフラクトン系の QFT の対応である foliated-exotic 双対性を, 筆者らの論文 [1] に基づいて解説する。

フラクトン相とは, 移動方向が部分多様体に制限された励起を持つような模型で記述される新たな物質の相である (レビューとして [2–4] がある)。そのような特徴的な励起は, 移動が可能な空間の次元で区別して, フラクトン, ライネオン, プラノンと呼ばれている。^{*1*}^{*2}フラクトン模型は, 初めは物性物理の分野において格子模型として発見された [5–9]。これらのフラクトン模型は, 新たなタイプの大域的対称性である部分系対称性を持ち, 基底状態の縮退度が系の大きさの指数関数となるなどの様々な画期的な性質を持つことが示されている。また, フラクトン模型はそれ自身理論的に興味深いだけでなく, 量子情報 [5, 10, 11] や重力模型 [12] などの他の分野への応用も期待されている。

フラクトン模型は, 初めは格子模型で発見されたものである。一方で, そのような格子模型の低エネルギー極限を考えることで連続的な理論が得られることが期待され, ここ 2~3 年で弦理論などの分野の場の理論の解析手法を用いて, フラクトン系の連続的な QFT を調べる研究が多くなされている (例えば, [13–30])。そのような QFT は, 格子フラクトン模型の特徴的な性質が QFT の形式で実現されており, 一般に Lorentz 不変性や連続的な回転対称性を持たず, 格子模型の回転対称性を反映した離散的な回転対称性を持つ。また, 通常の QFT では現れない発散や不連続性を持つ場の配位が許され, そのような配位が重要な役割を持つ。低エネルギーの理論ではエネルギーギャップのある励起は time-like なゲージ不変演算子 (defect) として現れるため, フラクトン系の QFT では励起の移動可能性を反映して演算子の定義される空間の形状が直線や平面に制限されることになる。加えて, 基底状態の縮退度を調べると,

^{*1} 単体では空間を移動できない励起はフラクトン, 直線上にしか移動できない励起はライネオン, 平面上にしか移動できない励起はプラノンと呼ばれる。

^{*2} 部分系対称性と呼ばれる大域的対称性を持ち, フラクトン, ライネオン, プラノンなどの励起を持つ系をフラクトン系, または具体的に模型を指してフラクトン模型と呼ぶ。

空間を格子で正規化することで系の大きさの指数関数となる。さらに、格子模型の部分系対称性と同じ形の大局的対称性を持ち、部分系対称性が QFT の形式で実現されている。部分系対称性とは、ある方向の平面などの部分多様体上の対称性であり、対称性演算子はその部分多様体ごとに異なる値を取る [15]。部分系多様性は一般化対称性の 1 つであり、対称性演算子の余次元が 1 より大きい点で高次対称性 [31] と類似しているが、作用する空間は一般に特定の方向には変形することができず、完全にはトポロジカルでない。このようにフラクトン系の QFT は様々な新奇な特徴を持つため、それらを調べることは QFT を一般化する新たな理論的構造の発見に繋がると考えられる。

いくつかのフラクトン格子模型は foliated フラクトン模型として記述されている [8, 32, 33]。Foliation とは、多様体を無限個の部分多様体に分割し、その部分多様体のまとまりとみなすことである。^{*3}例えば、 $3+1$ 次元におけるギャップのあるフラクトン格子模型である X-cube 模型 [7] は、 $2+1$ 次元の toric code [34] の foliation によって記述することができる [8]。QFT の場合も Slagle らによってフラクトン系の QFT の foliation による記述が発見され、foliated QFT と呼ばれる [23–25]。一方、フラクトン系の QFT は、基本的には空間の離散的な回転対称性を反映したテンソルゲージ理論として記述される [13, 16–19, 35]。ここでは [22] に従ってこれを exotic QFT と呼ぶことにする。X-cube 模型の連続的 QFT の場合には、平坦な foliation^{*4}による foliated BF 理論及びテンソルゲージ場を用いた exotic BF 理論 [14, 18] の双方の記述が知られている。^{*5}これら 2 つの記述方法は同じ理論を表すと信じられているが、その間の対応は不明瞭であった。そこで筆者らは、 $2+1$ 次元及び $3+1$ 次元において、フラクトン系の QFT である foliated BF 理論と exotic BF 理論の間のゲージ場とゲージパラメーターの対応を調べた [1]。本論文の後半ではその対応について述べる。このような場の対応は [25] で考察されているが、その対応はバルクのゲージ場^{*6}がない場合に限られており、定式化も厳密なものではなかった。本論文で解説する場とパラメーターの対応は、foliated 側にバルクのゲージ場を含み、場に許される発散や不連続性も完全に一致したものとなっている。このような場の対応のもとでは、Lagrangian のレベルで理論が一致することが示され、これを foliated-exotic 双対性と呼ぶ。Foliated-exotic 双対性は、片方の記述では顕わではない性質をもう片方の記述で見ることによって、foliated QFT 及び exotic QFT 双方のフラクトン系の QFT への理解を深めると同時に、Lorentz 不変ではない QFT の新たな双対性の研究の第一歩となっている。

^{*3} 例えば、 $3+1$ 次元の理論では 3 次元の空間を、ある特定の方向を法線ベクトルの方向とするような無限個の 2 次元平面に分割するものなどが考えられる。

^{*4} Foliation は foliation 場 e によって特徴づけられる。Foliation が平坦であるとは、 e が平坦、つまり $de = 0$ を満たすことである。詳しくは 4.2.1 節で見る。

^{*5} BF 理論 [36–39] とは、作用の形が $\frac{N}{2\pi} B \wedge F$ となるような理論である。フラクトン系の BF 理論である foliated BF 理論と exotic BF 理論は、通常の BF 理論と類似性を持つ。

^{*6} ここで考える foliated QFT では、foliation によって分割された 1 つ低い次元の多様体上のゲージ場である foliated ゲージ場と、もとの多様体上のバルクのゲージ場の両方を含む。

本論文の構成

本論文の構成を以下に述べる.

前半部分は先行研究のレビューで構成されている. 第 2 章では, フラクトン相の一般的な性質について説明し, 代表的な格子模型である \mathbb{Z}_2 X-cube 模型 [7] を例にとってその性質を具体的にみる. 第 3 章では, フラクトンの性質を持つ $2+1$ 次元のギャップのない模型である XY-plaquette 模型とその連続場の exotic な QFT である ϕ 理論 [16] をレビューする. この模型はフラクトンを持つわけではないが, 部分系対称性を持つ最も簡単な場の理論の 1 つである. この章では, 自己双対性や場の配位, 普遍性などについても詳しく述べる.

後半部分は筆者らの研究である [1] に基づく. 第 4 章では, $2+1$ 次元のフラクトン系の BF 理論を考える. まず格子模型である \mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型 (例えばレビューとして [40]) 及び \mathbb{Z}_N 格子テンソルゲージ理論 [16] を見る. 次にそれらの連続場の QFT である foliated BF 理論と exotic BF 理論 [16] を場の発散や不連続性に注意しながら解説する. その後, それらの中のゲージ不変演算子を同一視することによって, ゲージ場とゲージパラメーターを対応させる. その際, 帯演算子をリモートに検出 (remotely detectable [41, 42]) できないような演算子で修正する必要があることを考察する. 最後の節では, 基底状態の縮退度や robustness について [16] を簡単にレビューする. 第 5 章では, 前の章と同様の議論を $3+1$ 次元で行う. 最初に格子模型である \mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論, \mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論, \mathbb{Z}_N X-cube 模型をレビューする [18]. 次に, foliated BF 理論 [23–25], exotic BF 理論 [14, 18] をレビューし, それらの中のゲージ場とゲージパラメーターの対応を調べる. ここでも最後の節では基底状態の縮退度や robustness について [18] を簡単にレビューする.

付録では, 通常の $1+1$ 次元の相対論的な BF 理論についてレビューする. フラクトン系の BF 理論は, 通常の BF 理論の場合のアナロジーとして理解できる場合が多い.

本論文では, 格子模型については簡単なレビューに留め, フラクトン相についての詳細な解説は行わない. また, フラクトン系に現れる部分系対称性には混合アノマリーが存在する [21] が, アノマリーについては一切言及しない. 細かい部分としては, 格子模型の foliation による構成 [8] は扱わない. また, $2+1$ 次元のフラクトン系の BF 理論では電磁双対による記述も調べ, スカラー場の対応も明らかにするが, $3+1$ 次元では割愛する.

第 2 章

フラクトン系

この章では、 \mathbb{Z}_2 X-cube 模型 [7] を具体例として紹介し、フラクTONの格子模型の性質を見る。フラクTON相についての記述は、レビュー [2,3] を参考にした。

2.1 フラクTON系と部分系対称性

フラクTON相は、以下のような性質を持つフラクTON模型によって記述される物質の相である。フラクTON模型の最も特徴的な性質は、部分系対称性を持つことである。通常の $d+1$ 次元の理論の大域的対称性は、対称性演算子が d 次元空間全体の上で定義されている演算子である。一方で部分系対称性は、特定の方向の平面や直線などの低次元の部分多様体上で定義される大域的対称性である。余次元が 1 より大きい低次元の多様体上の大域的対称性に高次対称性 [31] があるが、通常の大域的対称性やこれらの高次対称性は、定義されている多様体を（他に演算子の挿入がなければ）自由に変形できるトポロジカルな対称性である。一方で、フラクTON模型における部分系対称性は、その模型の格子の形に依存し、自由に多様体の形を変形させた場合にはゲージ不変性が破れる非トポロジカルな演算子である。

そのような特徴的な対称性に対応して、フラクTON模型は部分系上のみを移動することができる特徴的な励起を持つことがある。そのような励起のうち、単体では移動できない励起をフラクTON (fracton)、1次元上のみ移動できる励起をライネオン (lineon)、2次元平面上のみを移動できる励起をプラノン (planon) と呼ぶ。また、それらの励起は部分系対称性に対して電荷を持ち、その双極子などは移動可能な方向が変化する。例えば、以下の X-cube 模型 [7] では、フラクTONの双極子はライネオン、またはプラノンのように振る舞い、ライネオンの双極子はプラノンのように振る舞う。

部分系対称性は部分多様体ごとに存在し、大きな基底状態の縮退度を生む。空間が周期境界条件を満たすトーラスの場合を考えると、非可縮な部分系対称性は基底状態に非自明に作用し、自発的に破れている。この場合、基底状態の縮退度は系の大きさ（ある方向の格子の数）の指数関数のスケールとなり、非常に大きな縮退度となる。

また、単体の励起をリモートに検出するような空間の演算子も存在する。そのような演算子は、励起と交点を持たないような多様体で励起を囲むと位相を出すような演算子である。このような演算子は後の QFT の記述で time-like 対称性 [43] と呼ばれるものになる。

フラクトン格子模型としては、フラクトンとライネオンの励起を持つ X-cube 模型が最も有名であり、以下では具体的にその性質を調べる。フラクトン模型としては、他にも Ising cage-net 模型 [9] などの模型が存在する。また、部分系対称性がフラクタル構造を持つような模型 [5, 44, 45] も存在する。^{*1}

2.2 \mathbb{Z}_2 X-cube 模型

X-cube 模型 [7] は、最も有名なフラクトンの励起を有する可解なスピン模型である。空間の座標を (x^1, x^2, x^3) とする 3 次元空間に格子定数 a の立方格子があるとす。 x^k 方向には L^k 個のリンクがあり、周期的境界条件をとる。リンクの総数は $3L^1L^2L^3$ 個であり、そのそれぞれに Hilbert 空間を割り当てることにする。ここで考える X-cube 模型は \mathbb{Z}_2 X-cube 模型であり、各リンク e の Hilbert 空間は 2 次元の $\mathcal{H}_e = \{|0\rangle_e, |1\rangle_e\}$ で Pauli 行列 $X_e = \sigma_e^1$, $Z_e = \sigma_e^3$ が $X_e|0\rangle_e = |1\rangle_e$, $X_e|1\rangle_e = |0\rangle_e$, $Z_e|0\rangle_e = |0\rangle_e$, $Z_e|1\rangle_e = -|1\rangle_e$ と作用している。Pauli 行列は $(X_e)^2 = 1$, $(Z_e)^2 = 1$, $X_eZ_e = -Z_eX_e$ を満たし、交換によって出る位相が $e^{2\pi i/2} = -1$ となっている。このとき対称性の群は \mathbb{Z}_2 となる。^{*2}全体の状態空間は各リンク上の Hilbert 空間のテンソル積 $\mathcal{H} = \bigotimes_e \mathcal{H}_e$ であり、 $2^{3L^1L^2L^3}$ 次元である。

2.2.1 Hamiltonian と励起

\mathbb{Z}_2 X-cube 模型は以下の Hamiltonian で記述される：

$$H = -\kappa^2 \sum_{v:\text{sites}} (A_v^1 + A_v^2 + A_v^3) - \gamma^2 \sum_{c:\text{cubes}} B_c \quad (2.2.1)$$

である。ここで、 v はサイトを表し、 A_v^k はサイト v から伸びる x^k 方向以外の 4 つのリンク上の Z_e のテンソル積である。また、 c は 12 個のリンクで囲まれた（最小の）立方体であるキューブを表し、 B_c はその 12 個のリンク上の X_e のテンソル積である（図 2.1）。同一のリンクの X_e と Z_e が交換するときには負号が出るが、それが偶数個の場合は交換するため、すべての A_v^k と B_c は交換する。したがって、 A_v^k と B_c の同時固有状態を取ることができ、各固有値が ± 1 であることからすべての A_v^k と B_c の固有値が 1 の状態が基底状態である。基底状態の縮退度は後で議論する。状態空間は基底状態に対して Pauli 行列をかけることで生成できる。

^{*1} フラクタル構造の対称性を持つ模型は、フラクタルな演算子の端にフラクトンが現れる。このような模型は Type-II と呼ばれ、それに対して X-cube 模型などの模型は Type-I と呼ばれる。

^{*2} これは容易に \mathbb{Z}_N に拡張することができ、後の章で実際に \mathbb{Z}_N の模型を見る。

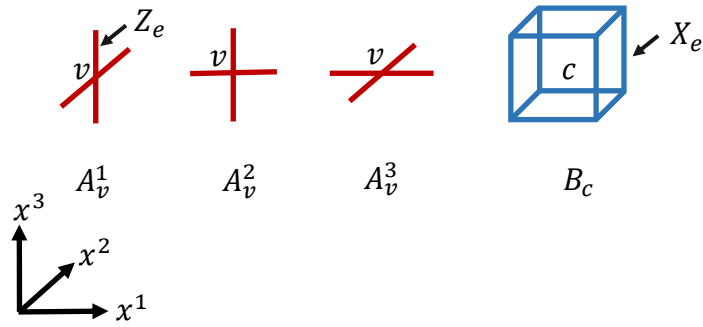


図 2.1 \mathbb{Z}_2 X-cube 模型の各項

基底状態を一つ取り、その状態に対して Z_e をかけると、そのリンクを囲むような 4 つのキューブ c に対し B_c が -1 となり、エネルギーが $4 \times 2\gamma^2$ だけ増加する。この B_c の固有値が -1 となるキューブ c は、どんな Pauli 行列をかけても単体で移動させることができない。このような B_c の固有値が -1 となっている c には、単体では動くことができないエネルギーギャップのある励起が局在しており、これがフラクトンである (図 2.2)。 Z_e はその周りに 4 つのフラク톤を励起する演算子である。また、 x^k 軸に沿ったフラク톤のペア (双極子^{*3}) は、いくつかの Z_e をかけることによって x^k 以外の方向に動くことができる。このような x^k 軸に沿ったフラク톤の双極子は、それ以外の方向の平面上のみを動くことができ、プラノンとして振る舞う。また、軸に沿わない平面上のペアの場合は、それ以外の方向に動くことができ、ライネオンとして振る舞う。単体のフラク톤はそのままでは動くことができないが、2 つのフラク톤のペアを生成しながら隣に動くことはできる。

一方で、基底状態に対して x^k 軸に沿ったリンク上の X_e をかけると、そのリンクの両端のサイト v 上の A_v^k のうち、 $i \neq k$ となる A_v^i の固有値が -1 となり、エネルギーが $2 \times 4\kappa^2$ だけ増える。 X_e を伸ばすように同じ方向の $X_{e'}$ をかけると、固有値が -1 となるサイトはその方向に移動する。この直線上に繋がった X_e の両端にある励起は、単体ではその直線の方法にしかなることができない (図 2.3)。これはライネオンであり、特に動くことができる方向を明示して x^k -ライネオンと呼ぶ。ライネオンは A_v^k の固有値によって特徴づけられる。例えば、折れ曲がって繋がった X_e と $X_{e'}$ の間にそれ以外の方向のライネオンが現れる。これは、ライネオンが直角に曲がる場合はもう 1 つライネオンを生成しなければならないことを意味する。特に x^1 -ライネオンと x^2 -ライネオンと x^3 -ライネオンが重なると消滅する。また、 x^k 方向に沿った x^i -ライネオン ($i \neq k$) の双極子は、 x^k 以外の方向に直角に曲がることができ、平面上のみを動かし、プラノンとして振る舞う。

^{*3} \mathbb{Z}_N X-cube 模型のフラク톤などの励起は \mathbb{Z}_N の電荷を持つが、 \mathbb{Z}_2 の場合は区別されない。

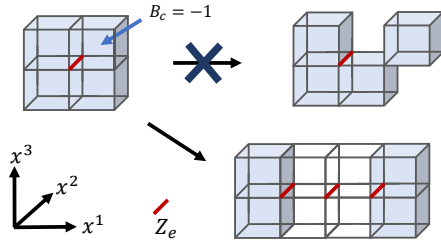


図 2.2 フラクトンの励起

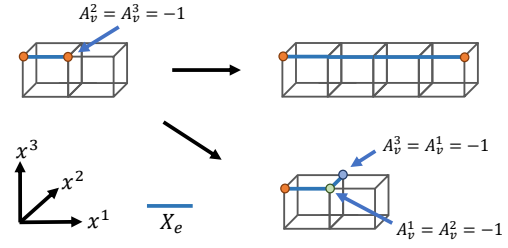


図 2.3 ライネオンの励起

2.2.2 部分系対称性

X-cube 模型には、Hamiltonian と交換する非局所的な演算子が存在する．この演算子は非可縮な多様体上で定義されている場合はロジカル演算子と呼ばれ、この演算子をかけることによって基底状態は別の基底状態に移る．また、この演算子は、部分系上の対称性電荷とも考えられ、部分系対称性の例となっている．

1つ目の保存電荷は、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し

$$W_k(C_1^{ij}) = \prod_{e \in C_1^{ij}} Z_e \quad (2.2.2)$$

である．ここで、 C_1^{ij} は (x^i, x^j) 平面の双対格子のリンク上の閉折れ線であり、積は C_1^{ij} と交わるリンク e について取る (図 2.4)．この対称性は \mathbb{Z}_2 dipole 対称性と呼ばれる．この演算子は、 C_1^{ij} の変形によって別の演算子に移り、トポロジカルな演算子ではない．

2つ目の保存電荷は、 $k = 1, 2, 3$ に対し

$$L_k(C_1^k) = \prod_{e \in C_1^k} X_e \quad (2.2.3)$$

である．ここで、 C_1^k は x^k 方向に伸びたリンク上の閉直線であり、積はその上のリンク e について取る．この対称性は \mathbb{Z}_2 tensor 対称性と呼ばれる．この演算子は、 C_1^k を変形できず、トポロジカルな演算子ではない．

これらの2つの保存電荷は、交換によってその交叉数だけ -1 が出る．

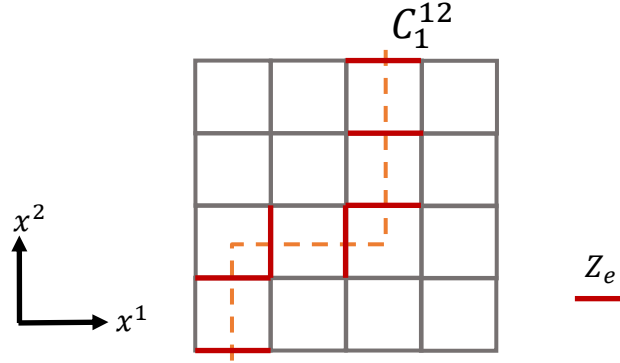


図 2.4 \mathbb{Z}_2 dipole 対称性の保存電荷

2.2.3 基底状態の縮退度

X-cube 模型は、基底状態の縮退度の対数が系の大きさ L のスケールであり、系の大きさに依存する巨大な縮退度を持つ。 \mathbb{Z}_2 X-cube 模型の場合は、基底状態の縮退度は $2^{2L^1+2L^2+2L^3-3}$ となる。基底状態の縮退度は以下のように数えることができる。まず、系の状態空間は $2^{3L^1L^2L^3}$ であるが、これらのうちですべての c, v, k に対して

$$B_c |GS\rangle = |GS\rangle, \quad (2.2.4a)$$

$$A_v^k |GS\rangle = |GS\rangle \quad (2.2.4b)$$

を満たすものが基底状態である。このような条件 1 つにつき状態数は $1/2$ となるため、独立な条件を数えることにする。まず、 $A_v^k |GS\rangle = |GS\rangle$ の条件の個数は $3L^1L^2L^3$ 個であるが、 $A_v^1A_v^2A_v^3 = 1$ から $L^1L^2L^3$ 個が従属である。また、 (x^2, x^3) 平面上のすべての A_v^1 の積が 1 であることから L^1 個、 (x^3, x^1) 平面上のすべての A_v^2 の積が 1 であることから L^2 個が従属である。 (x^1, x^2) 平面上のすべての A_v^3 の積が 1 であるという条件は、 $A_v^1A_v^2A_v^3 = 1$ と前の 2 つの平面の条件を合わせると $L^3 - 1$ 個が従属である。したがって、 A_v^k に関する独立な条件は $3L^1L^2L^3 - (L^1L^2L^3 + L^1 + L^2 + L^3 - 1) = 2L^1L^2L^3 - L^1 - L^2 - L^3 + 1$ 個である。次に、 B_c の条件を考える。 $B_c |GS\rangle = |GS\rangle$ の条件の個数は $L^1L^2L^3$ 個であるが、空間上のすべての B_c をかけると 1 になるということから 1 個が従属である。また、ある平面上のすべての B_c の積が 1 となるが、上の空間上のすべての B_c の積が 1 であるという条件を除くと、従属な条件は $(L^1 - 1) + (L^2 - 1) + (L^3 - 1)$ 個である。したがって、 B_c に関する独立な条件の個数は $L^1L^2L^3 - (1 + L^1 - 1 + L^2 - 1 + L^3 - 1) = L^1L^2L^3 - L^1 - L^2 - L^3 + 2$ 個である。以上を踏まえると、独立な条件の数は $(2L^1L^2L^3 - L^1 - L^2 - L^3 + 1) + (L^1L^2L^3 - L^1 - L^2 - L^3 + 2) = 3L^1L^2L^3 - 2L^1 - 2L^2 - 2L^3 + 3$ 個である。よって、基底状態の縮退度は $2^{3L^1L^2L^3 - (3L^1L^2L^3 - 2L^1 - 2L^2 - 2L^3 + 3)} = 2^{2L^1+2L^2+2L^3-3}$ であることがわかる。

2.2.4 リモートな検出

この節では、後の QFT で time-like 対称性 [43] と呼ばれる演算子について議論する。この演算子は、励起がリモートに空間的な演算子で検出されうるべきという考えに基づく [41, 42].

フラク톤を検出するような演算子は、 X_e を直方体の辺上で積をとった籠演算子 T である。その直方体の内部に単体のフラク톤が存在する状態を考える。この場合、フラク톤はその直方体の外部に連なるような Z_e の積によって生成されているため、そのうちの 1 つが直方体の辺の 1 つと交わり、籠演算子 T をかけると負号が出てフラク톤を検出できる (図 2.5)。一方で、ライネオンを検出するような演算子は、双対格子上的直方体の面のうち、 x^k 方向と直交するような面以外の 4 つの面上に存在する、その面と直交するようなリンク上の Z_e すべての積であるベルト演算子 U_k である。直方体の内部に単体の x^k -ライネオンが存在する状態を考える。この場合、直方体の外部に伸びるような x^k 方向の X_e の積によってライネオンが生成されているか、もしくは残り 2 つの方向に伸びるような直線が交わる部分が直方体の内部にあるような折れ線の X_e の積によってライネオンが生成されている。この状態に、 $i \neq k$ に対するベルト演算子 U_i をかけると、負号が出て x^k -ライネオンを検出できる (図 2.6)。

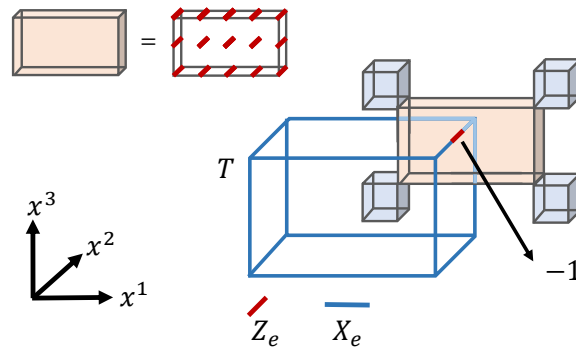


図 2.5 フラク톤を検出する籠演算子

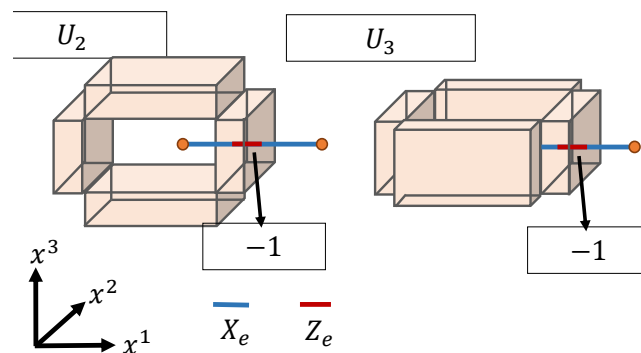


図 2.6 ライネオンを検出するベルト演算子

第 3 章

2+1 次元における ϕ 理論

この章では、部分系対称性を持つスカラー場の理論である 2 + 1 次元の ϕ 理論 [16] をレビューする。この理論は、共形場理論である 1 + 1 次元のコンパクトスカラー場の理論のアナロジーとして理解することができる。^{*1} ϕ 理論は、ギャップレスな exotic 理論であり、部分系対称性は存在するが、フラク톤の励起などは存在しない。一方で、不連続性を持つ場の配位や普遍性などにフラクトン系の特徴を持つ。

3.1 場の理論における部分系対称性

まず、場の理論における部分系対称性について説明する。部分系対称性は、通常の大域的対称性の概念を拡張した一般化大域的対称性である。以下では連続的対称性について考える。後の章での BF 理論では \mathbb{Z}_N 対称性を考えるが、その場合はカレントはなく、 \mathbb{Z}_N 演算子で対称性が記述されることになる。

$d + 1$ 次元での通常の大域的対称性では、Noether カレント (J_0, J^i) は保存則

$$\partial_0 J_0 + \sum_{i=1,2,\dots,d} \partial_i J^i = 0 \quad (3.1.1)$$

を満たし、保存電荷は

$$Q = \int_{\text{space}} J_0 \quad (3.1.2)$$

である。

上の通常の大域的対称性の概念を拡張し、カレントが (J_0^I, J^K) である場合を考える。ここで、 I, K は回転群の表現 R_{time} 及び R_{space} の添字である。保存則は以下の形を満たすと

^{*1} 1 + 1 次元のスカラー場の理論を空間の x^1 及び x^2 方向に foliation することで構成できる可能性はあるが、具体的な構成は与えられていない。

する：

$$\partial_0 J_0^I = \sum_{i,j,\dots;K} \partial_i \partial_j \dots J^K f_K^{ij\dots I}. \quad (3.1.3)$$

ここで、 $f_K^{ij\dots I}$ は不変テンソルである。右辺の偏微分が一階の場合は I, K のテンソル性からテンソル対称性、偏微分が二階の場合は dipole 対称性と呼ぶ [17]。このとき保存電荷は

$$Q^I[\Sigma_I] = \int_{\Sigma_I} J_0^I \quad (3.1.4)$$

となる。ここで、 Σ_I は、 d より低い次元の部分空間である。 $Q^I[\Sigma_I]$ は部分空間上の電荷であるため、一般化大域的対称性である高次対称性 [31] と似ているが、 Σ_I の空間上での位置に依存し、トポロジカルでない点が異なっている。

3.2 XY-plaquette 模型と ϕ 理論

以下では、時空は x^0 を Euclid 時間とし、 x^1, x^2 を空間 2 次元の座標とする。また、各方向の長さは l^0, l^1, l^2 であるとし、時空は周期的である、つまり 3 次元トーラスであるとする。格子模型は正方格子で考え、格子定数を a とし、 x^1 方向に $L^1 = l^1/a$ 個、 x^2 方向に $L^2 = l^2/a$ 個あり、 $\hat{x}^k = x^k/a$ とする。部分系対称性を持つ理論の特徴として、低エネルギー極限である連続場の QFT でも格子模型の空間の 90 度の回転対称性 \mathbb{Z}_4 がそのまま残り、連続的に回転対称な理論とはならない。また、時空は連続的であるのに対し、場は不連続な配位が重要な役割を持つ。

3.2.1 2+1 次元の XY-plaquette 模型

ϕ 理論の格子模型である XY-plaquette 模型 [46] について説明する。正方格子の各サイト s に位相 $e^{i\phi_s}$ があるとする。 ϕ_s は $\phi_s \sim \phi_s + 2\pi$ の周期性を満たす。 ϕ_s の共役運動量を π_s と書くと、これらは $[\phi_s, \pi_{s'}] = i\delta_{s,s'}$ を満たす。Hamiltonian は

$$H = \frac{u}{2} \sum_s (\pi_s)^2 - K \sum_s \cos(\Delta_{12}\phi_s). \quad (3.2.1)$$

ここで、 $\Delta_{12}\phi_{\hat{x}^1, \hat{x}^2} = \phi_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2+1} - \phi_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2} - \phi_{\hat{x}^1, \hat{x}^2+1} + \phi_{\hat{x}^1, \hat{x}^2}$ である。この格子模型は、以下のような momentum dipole 大域的対称性と呼ばれる直線上の部分系対称性を持つ。各 $\hat{x}^1 = \hat{x}_0^1$ にある x^2 軸方向に沿った直線上の $U(1)$ 大域の変換

$$\phi_{\hat{x}_0^1, \hat{x}^2} \rightarrow \phi_{\hat{x}_0^1, \hat{x}^2} + \varphi_{\hat{x}_0^1}, \quad \text{for all } \hat{x}^2 \quad (3.2.2)$$

を考えると、この変換のもとで Hamiltonian は不変である。保存電荷は

$$U_1(\hat{x}_0^1) = \prod_{\hat{x}^2=1}^{L^2} \pi_{\hat{x}_0^1, \hat{x}^2} \quad (3.2.3)$$

である。同様に、 x^1 軸方向に沿った直線上の $U(1)$ 大域的変換

$$\phi_{\hat{x}^1, \hat{x}_0^2} \rightarrow \phi_{\hat{x}^1, \hat{x}_0^2} + \varphi_{\hat{x}_0^2}, \quad \text{for all } \hat{x}^1 \quad (3.2.4)$$

のもとでも Hamiltonian は不変であり、保存電荷は

$$U_2(\hat{x}_0^2) = \prod_{\hat{x}^1=1}^{L^1} \pi_{\hat{x}^1, \hat{x}_0^2} \quad (3.2.5)$$

である。これらの部分系対称性のうち、すべての \hat{x}^1 にある x^2 軸方向に沿った直線上で同じ φ だけ変換することと、すべての \hat{x}^2 にある x^1 軸方向に沿った直線上で同じ φ だけ変換することは等価である。したがって、独立な対称性の数は $L^1 + L^2 - 1$ 個である。

3.2.2 連続極限と場の配位

次に、連続極限をどう考えればよいかを議論する。XY-plaquette 模型では、相互作用はプラケット（格子の最小の正方形）の形であり、 $\exp[i\Delta_{12}\phi_s]$ となる。典型的な格子の配位は、 $\Delta_{12}\phi_s \sim 1$ となるものである。連続極限では、

$$\Delta_{12}\phi_s \sim \frac{a^2}{l^2} \ll 1 \quad (3.2.6)$$

となる配位を考える。ここで、 l は系の大きさである。このとき、二階微分を

$$\partial_1 \partial_2 \phi_s = \frac{1}{a^2} \Delta_{12} \phi_s \quad (3.2.7)$$

とする。 $\Delta_{12}\phi_s$ は 4 点での差なので、 $\Delta_{12}\phi_s$ は十分小さくても隣合う ϕ_s の差が小さいとは限らない。例えば、 x^1 方向に不連続に依存し x^2 には依存しない配位は $\Delta_{12}\phi_s = 0$ であり、考えている配位に含まれている。したがって、 $\partial_i \phi$ は well-defined ではない。上の配位の他に、

$$\Delta_{12}\phi_s \sim \frac{a}{l} \ll 1 \quad (3.2.8)$$

となる配位も考えられる。この配位では、 $\partial_1 \partial_2 \phi_s \sim 1/(al)$ となり、デルタ関数 ($\sim 1/a$) を含むことになる。また、典型的な格子の配位 $\Delta_{12}\phi_s \sim 1$ は、 $\partial_1 \partial_2 \phi_s \sim 1/a^2$ となり、連続極限では取り除かれる。

場の理論の観点からは、局所的なパッチの中で \mathbb{R} 値のスカラー場 ϕ であって、ゲージ変換

$$\phi \rightarrow \phi + 2\pi \tilde{t}^1 + 2\pi \tilde{t}^2 \quad (3.2.9)$$

で同一視されるものを考えることになる。ここで、 \tilde{t}^k は x^k のみに依存する整数値関数であり、

x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。これは、後述する momentum dipole 対称性を $U(1)$ とするために \mathbb{R} を \mathbb{Z} でゲージ化するということである。このようなゲージ変換のもとでは、 $\partial_0\phi$, $\partial_1\partial_2\phi$, $e^{i\phi}$ は well-defined になるが、 ϕ , $\partial_i\phi$ は演算子として well-defined でない。パッチの重なる部分では、ゲージ変換と同じ形の以下の変換関数を持つ：

$$\begin{aligned}\phi_{(2)} &= \phi_{(1)} + g_{(12)}, \\ g_{(12)} &= 2\pi\tilde{t}_{(12)}^1 + 2\pi\tilde{t}_{(12)}^2.\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

パッチが3つ重なる部分では、変換関数 $g_{(ij)}$ は、

$$g_{(12)} + g_{(23)} + g_{(31)} = 0\tag{3.2.11}$$

というコサイクル条件を満たす。また、 $g_{(ij)}$ は、一価でなくてもよく、 2π の整数倍に値を持つそれ自身の変換関数を持つ。

3.2.3 2+1 次元の ϕ 理論

この節では、XY-plaquette 模型の連続的 QFT である ϕ 理論を考える。この理論は、Lorentz 対称性を持たず、回転対称性も 90 度回転 \mathbb{Z}_4 の対称性しか持たない。この理論は、離散的な回転対称性 \mathbb{Z}_4 の表現であるコンパクトスカラー場を持つ。 \mathbb{Z}_4 の既約表現は 1 次元のものが 4 つあるが、それを $\mathbf{1}_n$ ($n = 0, \pm 1, 2$) と書く。 n はスピンと呼ぶが、スピン n の表現は 90 度回転によって $e^{2\pi in/4}$ だけ位相がかかるものである。コンパクトスカラー ϕ ($\phi \sim \phi + 2\pi$) は前節のゲージ変換を持つ表現 $\mathbf{1}_0$ の場である。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2\mu}(\partial_1\partial_2\phi)^2\tag{3.2.12}$$

である。 μ_0 , μ は質量次元 1 とし、 ϕ は質量次元 0 である。運動方程式は

$$\mu_0\partial_0^2\phi - \frac{1}{\mu}\partial_1^2\partial_2^2\phi = 0\tag{3.2.13}$$

である。この運動方程式から、表現 $(\mathbf{1}_0, \mathbf{1}_2)$ のカレント

$$J_0 = \mu_0\partial_0\phi,\tag{3.2.14a}$$

$$J^{12} = \frac{1}{\mu}\partial_1\partial_2\phi\tag{3.2.14b}$$

は、保存則

$$\partial_0J_0 = \partial_1\partial_2J^{12}\tag{3.2.15}$$

を満たすことがわかる。この対称性は $U(1)$ momentum dipole 対称性と呼ばれ、保存電荷は

$$Q^1[C_1^2(x^1)] = \oint_{C_1^2(x^1)} dx^2 J_0, \quad (3.2.16a)$$

$$Q^2[C_1^1(x^2)] = \oint_{C_1^1(x^2)} dx^1 J_0 \quad (3.2.16b)$$

である。ここで、 $C_1^k(x^r)$ は x^r にある x^k 方向に沿った (x^1, x^2) 平面上の直線である。これらの値は定義されている直線ごとに異なるため、部分系対称性である。また、これらの電荷は

$$\oint_{C_1^1} dx^1 Q^1[C_1^2(x^1)] = \oint_{C_1^2} dx^2 Q^2[C_1^1(x^2)] \quad (3.2.17)$$

を満たす。したがって、空間を格子で正規化した場合、momentum dipole 対称性の数は $L^1 + L^2 - 1$ 個となる。場の変換としては、

$$\phi(x^0, x^1, x^2) \rightarrow \phi(x^0, x^1, x^2) + c^1(x^1) + c^2(x^2) \quad (3.2.18)$$

である。この変換は、正準交換関係 $[\phi(x^0, x^1, x^2), \mu_0 \partial_0 \phi(x^0, y^1, y^2)] = i\delta^2(x^1 - y^1, x^2 - y^2)$ を用いて、

$$\exp \left[i \oint_{C_1^2(x^1)} dx^1 c^1(x^1) Q^1[C_1^2(x^1)] + i \oint_{C_1^1(x^2)} dx^2 c^2(x^2) Q^2[C_1^1(x^2)] \right] \quad (3.2.19)$$

を ϕ に作用させることで得られる。また、この理論は $U(1)$ winding 対称性も持つ。カレント

$$J_0^{12} = \frac{1}{2\pi} \partial_1 \partial_2 \phi, \quad (3.2.20a)$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \partial_0 \phi \quad (3.2.20b)$$

は表現 $(\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_0)$ に属し、保存則

$$\partial_0 J_0^{12} = \partial_1 \partial_2 J \quad (3.2.21)$$

を満たす。保存電荷は

$$Q_1^{12}[C_1^2(x^1)] = \oint_{C_1^2(x^1)} dx^2 J_0^{12}, \quad (3.2.22a)$$

$$Q_2^{12}[C_1^1(x^2)] = \oint_{C_1^1(x^2)} dx^1 J_0^{12} \quad (3.2.22b)$$

である。これらは momentum dipole 対称性と同様に

$$\oint_{C_1^1} dx^1 Q_1^{12}[C_1^2(x^1)] = \oint_{C_1^2} dx^2 Q_2^{12}[C_1^1(x^2)] \quad (3.2.23)$$

を満たし、空間を格子で正規化した場合、winding 対称性の数は $L^1 + L^2 - 1$ 個となる。

3.2.4 自己双対性

2 + 1 次元の ϕ 理論は自己双対性を持つ。この双対性は、1 + 1 次元のコンパクトスカラー場の理論の T 双対性のアナロジーになっている。また、後の章では、これを電磁双対と呼ぶ。

ϕ 理論の Lagrangian を以下のように書く：

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2}(B)^2 + \frac{1}{2\mu}E_{12}E^{12} + \frac{i}{2\pi}\hat{B}^{12}(\partial_1\partial_2\phi - E_{12}) + \frac{i}{2\pi}\hat{E}(\partial_0\phi - B). \quad (3.2.24)$$

ここで、 B 、 \hat{E} はスピン 0 の補助場、 E_{12} 、 \hat{B}^{12} はスピン 2 の補助場である。 \hat{B}^{12} 及び \hat{E} を経路積分すれば、(3.2.12) になる。一方で、 B 及び E_{12} を経路積分すれば、

$$\mu_0 B = \frac{i}{2\pi}\hat{E}, \quad (3.2.25a)$$

$$\frac{1}{\mu}E^{12} = \frac{i}{2\pi}\hat{B}^{12} \quad (3.2.25b)$$

が得られ、代入して

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi^2\mu_0}\hat{E}^2 + \frac{\mu}{8\mu^2}\hat{B}_{12}\hat{B}^{12} + \frac{i}{2\pi}\hat{B}^{12}\partial_1\partial_2\phi + \frac{i}{2\pi}\hat{E}\partial_0\phi \quad (3.2.26)$$

となる。ここで、さらに ϕ を経路積分すると、

$$\partial_0\hat{E} = \partial_1\partial_2\hat{B}^{12} \quad (3.2.27)$$

が得られる。これを局所的に解くと、

$$\hat{E} = \partial_1\partial_2\phi^{12}, \quad (3.2.28a)$$

$$\hat{B}^{12} = \partial_0\phi^{12} \quad (3.2.28b)$$

と書ける。ここで、 ϕ^{12} はスピン 2 のスカラー場である。これを Lagrangian に代入すれば、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi^2\mu_0}(\partial_1\partial_2\phi^{12})^2 + \frac{\mu}{8\pi^2}(\partial_0\phi^{12})^2 \quad (3.2.29)$$

となる。これは、 $\hat{\mu}_0 = \mu/4\pi^2$ 、 $\hat{\mu} = 4\pi^2\mu_0$ と置けば、(3.2.12) と同じ形になっている。 ϕ^{12} は ϕ と同様に、ゲージ変換

$$\phi^{12} \rightarrow \phi^{12} + 2\pi\tilde{m}^1 - 2\pi\tilde{m}^2 \quad (3.2.30)$$

を持つとする。ここで、 \tilde{m}^k は x^k のみに依存する整数値関数であり、ステップ関数の不連続性を持つ。 ϕ と ϕ^{12} は \mathbb{Z}_4 の表現としてスピンの異なるが、回転に対し、荷電共役 $C : \phi \rightarrow -\phi$ をかけるという自己同型によってスピンを移すことができるため、 $\mu = 4\pi^2\mu_0$ において、もと

の理論と完全に一致する．大域的対称性は，表現 $(\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_0)$ のカレント $(\hat{J}_0^{12}, \hat{J})$

$$\hat{J}_0^{12} = \hat{\mu}_0 \partial_0 \phi^{12}, \quad (3.2.31a)$$

$$\hat{J} = \frac{1}{\hat{\mu}} \partial_1 \partial_2 \phi^{12}, \quad (3.2.31b)$$

$$\partial_0 \hat{J}_0^{12} = \partial_1 \partial_2 \hat{J} \quad (3.2.31c)$$

によって記述される $U(1)$ momentum dipole 対称性，及び表現 $(\mathbf{1}_0, \mathbf{1}_2)$ のカレント $(\hat{J}_0, \hat{J}^{12})$

$$\hat{J}_0 = \frac{1}{2\pi} \partial_1 \partial_2 \phi^{12}, \quad (3.2.32a)$$

$$\hat{J}^{12} = \frac{1}{2\pi} \partial_0 \phi^{12}, \quad (3.2.32b)$$

$$\partial_0 \hat{J}_0 = \partial_1 \partial_2 \hat{J}^{12} \quad (3.2.32c)$$

によって記述される $U(1)$ winding dipole 対称性を持つ．上の補助場の関係式から得られる ϕ と ϕ^{12} の間の関係式

$$\mu_0 \partial_0 \phi = \frac{i}{2\pi} \partial_1 \partial_2 \phi^{12}, \quad (3.2.33a)$$

$$\frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_2 \phi = \frac{i}{2\pi} \partial_0 \phi^{12} \quad (3.2.33b)$$

を用いることによって，（係数を適切に規格化すると）双対を取ることで momentum dipole 対称性と winding dipole 対称性が入れ替わっていることがわかる．

3.2.5 Momentum mode と winding mode

ϕ 理論では，通常の連続的な場の配位に加え，Hamiltonian が発散するような配位も重要な役割を持つ．この節では，簡単のため計量の空間成分に負号がつく Minkowski 空間で考える．このとき，Lagrangian（密度）は

$$\mathcal{L}_M = \frac{\mu_0}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2\mu} (\partial_1 \partial_2 \phi)^2 \quad (3.2.34)$$

である．

まず，momentum dipole 対称性に対して電荷を持つ以下の momentum mode を考える：

$$\phi(x^0, x^1, x^2) = \phi^1(x^0, x^1) + \phi^2(x^0, x^2). \quad (3.2.35)$$

この配位は，平面波解の場合を考えると，運動方程式 (3.2.13) を満たす場合はエネルギーが 0 の配位となっている．これらは，momentum dipole 対称性の作用で別の配位に移るため，古典的にはこの対称性が自発的に破れているように見える．しかしながら，量子論を考えると，momentum mode は Hamiltonian が発散するような配位であり，基底状態とならない．

Lagrangian を考えると,

$$L_M = \frac{\mu_0}{2} \left[l^2 \oint dx^1 (\dot{\phi}^1)^2 + l^1 \oint dx^2 (\dot{\phi}^2)^2 + 2 \oint dx^1 \dot{\phi}^1 \oint dx^2 \dot{\phi}^2 \right] \quad (3.2.36)$$

であるので, 共役運動量は,

$$\pi^1(x^0, x^1) = \frac{\delta L_M}{\delta \dot{\phi}^1} = \mu_0 l^2 \dot{\phi}^1 + \oint dx^2 \dot{\phi}^2, \quad (3.2.37a)$$

$$\pi^2(x^0, x^2) = \frac{\delta L_M}{\delta \dot{\phi}^2} = \mu_0 l^1 \dot{\phi}^2 + \oint dx^1 \dot{\phi}^1 \quad (3.2.37b)$$

である. Momentum dipole 対称性の電荷 (3.2.16a), (3.2.16b) と比較すると, $Q^1 = \pi^1$, $Q^2 = \pi^2$ となることがわかるが, Q^k は $U(1)$ の電荷であり, 任意の x^k の区間で積分すると整数となる. したがって,

$$\pi^1(x^1) = Q^1 = \sum_{\alpha} N_{\alpha}^1 \delta(x^1 - x_{\alpha}^1), \quad (3.2.38a)$$

$$\pi^2(x^2) = Q^2 = \sum_{\beta} N_{\beta}^2 \delta(x^2 - x_{\beta}^2) \quad (3.2.38b)$$

と書ける. ここで, $N = N_{\alpha}^1$, N_{β}^2 は整数であり, (3.2.17) から $\sum_{\alpha} N_{\alpha}^1 = \sum_{\beta} N_{\beta}^2$ を満たす. Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= \oint dx^1 \pi^1 \dot{\phi}^1 + \oint dx^2 \pi^2 \dot{\phi}^2 - L_M \\ &= \frac{1}{2\mu_0 l^1 l^2} \left[l^1 \oint dx^1 (\pi^1)^2 + l^2 \oint dx^2 (\pi^2)^2 - \oint dx^1 \pi^1 \oint dx^2 \pi^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

と書ける. ここに π^k を代入することで,

$$H = \frac{1}{2\mu_0 l^1 l^2} \left[l^1 \sum_{\alpha} (N_{\alpha}^1)^2 \delta(0) + l^2 \sum_{\beta} (N_{\beta}^2)^2 \delta(0) - N^2 \right] \quad (3.2.40)$$

が得られる. $\delta(0) \sim 1/a$ より, momentum mode のエネルギースケールは $1/(\mu_0 l a)$ であり, $a \rightarrow 0$ で発散することになる. このような配位は通常理論に寄与することはないが, momentum dipole 対称性の電荷を持っているため, 単純に捨て去ることはできない.

次に. winding dipole 対称性の電荷を持つ以下の winding mode を考える:

$$\phi(x^0, x^1, x^2) = 2\pi \left[\frac{x^1}{l^1} \sum_{\beta} W_{\beta}^2 \theta(x^2 - x_{\beta}^2) + \frac{x^2}{l^2} \sum_{\alpha} W_{\alpha}^1 \theta(x^1 - x_{\alpha}^1) - W \frac{x^1 x^2}{l^1 l^2} \right]. \quad (3.2.41)$$

ここで, W_{α}^1 , W_{β}^2 は整数であり, $W = \sum_{\alpha} W_{\alpha}^1 = \sum_{\beta} W_{\beta}^2$ である. この配位は, 例えば x^1 方向に一周した場合,

$$\phi(x^0, x^1 + l^1, x^2) - \phi(x^0, x^1, x^2) = 2\pi \sum_{\beta} W_{\beta}^2 \theta(x^2 - x_{\beta}^2) \quad (3.2.42)$$

となり、変換関数 $2\pi \sum_{\beta} W_{\beta}^2 \theta(x^2 - x_{\beta}^2)$ を除いて周期的になっている。この配位は winding dipole 対称性の電荷

$$Q_1^{12}(x^1) = \frac{1}{2\pi} \oint dx^2 \partial_1 \partial_2 \phi = \sum_{\alpha} W_{\alpha}^1 \delta(x^1 - x_{\alpha}^1), \quad (3.2.43a)$$

$$Q_2^{12}(x^2) = \frac{1}{2\pi} \oint dx^1 \partial_1 \partial_2 \phi = \sum_{\beta} W_{\beta}^2 \delta(x^2 - x_{\beta}^2) \quad (3.2.43b)$$

を持つ。全体の winding charge $c(\phi) = \oint dx^1 Q_1^{12} = \oint dx^2 Q_2^{12}$ は、 W である。この winding mode に対し、Hamiltonian は、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu} \oint dx^1 \oint dx^2 (\partial_1 \partial_2 \phi)^2 \\ &= \frac{2\pi^2}{\mu l^2} \left[l^1 \sum_{\alpha} (W_{\alpha}^1)^2 \delta(0) + l^2 \sum_{\beta} (W_{\beta}^2)^2 \delta(0) - W^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

となるので、エネルギースケールは $1/(\mu la)$ であり、 $a \rightarrow 0$ で発散することになる。

3.2.6 普遍性

通常の高エネルギー（IR）の有効理論である場の理論には普遍性がある。普遍性とは、系の低エネルギー（UV）での理論のパラメーターが低エネルギーの観測量に影響しないということである。UV の理論では、多くの irrelevant な項が含まれているが、これらは a のべきで抑えられるため、低エネルギー領域では無視できる。そのため、低エネルギーの場の理論では、Lagrangian の中で微分が低次の relevant な項だけを考えればよい。一方、フラクトンの性質を持つ ϕ 理論では場の配位として不連続なものが含まれ、高次の微分の項も低次の微分の項と同じオーダーの寄与を持つ。これは、UV の理論と IR の理論が完全には分離されていないことを意味し、UV/IR 混合の具体例となっている。

例えば、 $g(\partial_0 \partial_1 \phi)^2$ という項を考える。 g は、主要項の $\frac{\mu_0}{2} (\partial_0 \phi)^2$ と比較すると空間微分が 2 つ多いため、 a^2 のオーダーとなる。この項は、連続的な場の配位では主要項より寄与が小さいが、 $\pi \sim \partial_0 \phi$ がデルタ関数の和になる momentum mode では、Hamiltonian への寄与を計算すると $\partial_1^2 \delta(0) \sim 1/a^3$ の項が出るため、主要項と同様に $g/a^3 \sim 1/a$ のオーダーの寄与を持つ。もう一方の例として、 $g(\partial_1^2 \partial_2 \phi)^2$ を考える。 g は、主要項の $\frac{1}{2\mu} (\partial_1 \partial_2 \phi)^2$ と比較すると空間微分が 2 つ多いため、 a^2 のオーダーとなる。 ϕ がステップ関数の和となる winding mode を考えると、上の例と同様に Hamiltonian に $g/a^3 \sim 1/a$ のオーダーの寄与を持つ。

このように、高次の項は、momentum mode と winding mode の存在によって Hamiltonian に寄与するため、定量的には普遍性が成り立たない。一方で、高次の項はすべて $1/a$ のオーダーで寄与するため、定性的な振る舞いは高次の項によって変化しない。

3.2.7 Robustness

UV の理論の大域的対称性を G_{UV} , IR の理論の大域的対称性を G_{IR} とする. UV の理論を微小変形したときに, IR の理論の対称性が壊れるかどうかは, IR で G_{IR} を壊すような relevant な演算子があるかどうかによる. もしそのような演算子がなければ, G_{IR} は robust であるという. 一方でそのような relevant な演算子が存在するならば, UV の理論の微小変形によって IR の対称性 G_{IR} は壊れることになり, robust ではない. この場合は, IR での対称性は fine tuning によって実現している. 以下では, RG flow^{*2}を G_{UV} を保ちながら行うことにし, G_{IR} は G_{UV} に対応する対称性に加えて新たな対称性が enhance しているとする. この場合, enhance が robust であるかどうかは, G_{UV} では不変だが G_{IR} では不変でないような relevant な演算子があるかどうかによる.

ϕ 理論の場合, UV の理論を XY-plaquette 模型とすると, G_{UV} は momentum dipole 対称性を持ち, winding dipole 対称性は持たない. 一方で, G_{IR} は momentum dipole 対称性と winding dipole 対称性の両方を持つ. このとき, G_{UV} では不変だが G_{IR} では不変でない演算子として, winding dipole 対称性の電荷を持つ $e^{i\phi^{12}}$ が存在する. この演算子によって生成される状態は, winding mode のエネルギーを持つため, エネルギースケールは $1/a$ となり, 低エネルギー極限で自明な演算子となって irrelevant である. したがって, この演算子は robustness に影響しない. つまり, XY-plaquette 模型の対称性を保つ微小変形によって, IR の ϕ 理論は irrelevant な変形しか起こらず, G_{IR} は robust である.

^{*2} くりこみ流. フラクトン系の場合は, くりこみがどのようなものかははっきりとわかっていない.

第 4 章

2+1 次元のフラクトン系の BF 理論

この章では 2 + 1 次元におけるフラクトン系の BF 理論である foliated BF 理論と exotic BF 理論を考える。これらはどちらも \mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型 (例えば [40]) 及び \mathbb{Z}_N 格子テンソルゲージ理論 [16] の低エネルギー極限の QFT だと考えられており、それらは部分系対称性やフラクTONの励起を持つ。これらの BF 理論は同じ理論を表していると考えられており、実際に後で明示的に場の対応を示す。

第 3 章と同様に、時空は x^0 を Euclid 時間とし、 x^1, x^2 を空間 2 次元の座標とする。また、時空は周期的である、つまり 3 次元トーラスであるとする。各方向の長さは l^0, l^1, l^2 であるとする。格子模型は正方格子で考えるが、低エネルギー極限である連続場の QFT でも格子模型の空間の 90 度の回転対称性 \mathbb{Z}_4 がそのまま残り、連続的に回転対称な理論とはならない。これは部分系対称性を持つ理論に特有の性質である。また、時空は連続的であるのに対し、ゲージ場やゲージパラメーターは離散的な配位が重要な役割を持つ。

4.1 格子模型

この節では、低エネルギー極限で後の節で議論する 2 + 1 次元のフラクトン系の BF 理論になると考えられている格子模型である \mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型と \mathbb{Z}_N 格子テンソルゲージ理論 [16] をレビューする。これらが厳密に連続場理論の BF 理論に RG flow することは示されていないが、対称性や基底状態の縮退度とその強い証拠となっている。ここでの議論はすべて [16] による。以下では、正方格子は格子定数を a とし、 x^1 方向に $L^1 = l^1/a$ 個、 x^2 方向に $L^2 = l^2/a$ 個あり、 $\hat{x}^k = x^k/a$ とする。

4.1.1 \mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型

\mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型では、正方格子の各サイト $s = (\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ に \mathbb{Z}_N 値の位相 U_s 及びその正準運動量 V_s があるとする。これらは、

$$U_s V_s = e^{2\pi i/N} V_s U_s \quad (4.1.1)$$

を満たす (同一サイト以外では交換する)。したがって、各サイト s に対して N 次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_s = \{|0\rangle_s, V_s |0\rangle_s, \dots, V_s^{N-1} |0\rangle_s\}$ があり、状態空間は $N^{L^1 L^2}$ 次元の $\mathcal{H} = \bigotimes_s \mathcal{H}_s$ である。Hamiltonian は、

$$H = -K \sum_{s=(\hat{x}^1, \hat{x}^2)} U_{\hat{x}^1, \hat{x}^2} U_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2}^{-1} U_{\hat{x}^1, \hat{x}^2+1}^{-1} U_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2+1} - h \sum_s V_s + \text{h.c.} \quad (4.1.2)$$

ここで、 K, h は正の実数に値を持ち、 h は十分小さいとする。

この理論は、以下の保存電荷で生成される \mathbb{Z}_N dipole 対称性を持つ：

$$W_{(1)}(\hat{x}^1) = \prod_{\hat{x}^2=1}^{L^2} V_{\hat{x}^1, \hat{x}^2}, \quad (4.1.3)$$

$$W_{(2)}(\hat{x}^2) = \prod_{\hat{x}^1=1}^{L^1} V_{\hat{x}^1, \hat{x}^2}. \quad (4.1.4)$$

つまり、この演算子は Hamiltonian と交換する。これらは、後の BF 理論に現れる \mathbb{Z}_N dipole 対称性に対応する。また、 \mathbb{Z}_N electric 対称性に対応する演算子は U_s であると考えられるが、この対称性は $\sum_s V_s$ によって破れている。

$h = 0$ の場合は、 \mathbb{Z}_N electric 対称性が存在することになる。この場合、

$$P(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2 + 1) = U_{\hat{x}^1, \hat{x}^2} U_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2}^{-1} U_{\hat{x}^1, \hat{x}^2+1}^{-1} U_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2+1} \quad (4.1.5)$$

と置くと、基底状態はすべてのプラケット (格子の最小の正方形) に対し固有値 1 を持つものである。この基底状態の縮退度は以下のように数えられる。まず、状態空間は各サイトに N 個の状態があるので $N^{L^1 L^2}$ 次元である。すべての P が独立の場合は、 $P|GS\rangle = |GS\rangle$ は $L^1 L^2$ 個の条件だが、これらには、 x^1 方向の直線上の P の積が 1 という条件が L^2 個、 x^2 方向の直線上の P の積が 1 という条件が L^1 個、及びそれらの中で平面上のすべての P の積が 1 という条件があるので、独立な条件の数は $L^1 L^2 - (L^1 + L^2 - 1)$ 個である。したがって基底状態の縮退度は、 $N^{L^1 L^2 - (L^1 L^2 - L^1 - L^2 + 1)} = N^{L^1 + L^2 - 1}$ である。

基底状態の 1 つに V_s をかけると、 s を含むような 4 つの P に対して固有値が変化し、エネルギーが増加する。これは s を含むような 4 つのプラケットにフラクトンが生成されていることを意味する。 \mathbb{Z}_2 X-cube 模型の場合と同様に、これらのフラクトンを単体で移動させることはできない。

4.1.2 \mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論

\mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論では、正方格子の各プラケット p に \mathbb{Z}_N 値の位相 U_p 及びその正準運動量 V_p があるとする。これらは、

$$U_p V_p = e^{2\pi i/N} V_p U_p \quad (4.1.6)$$

を満たす（同一プラケット以外では交換する）。したがって、各プラケット p に対して N 次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_p = \{|0\rangle_p, V_p |0\rangle_p, \dots, V_p^{N-1} |0\rangle_p\}$ があり、状態空間は $N^{L^1 L^2}$ 次元の $\mathcal{H} = \bigotimes_p \mathcal{H}_p$ である。また、 U_p は各サイト $s = (\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ 上のゲージパラメーター η_s によって、ゲージ変換

$$U_p \rightarrow U_p \eta_{\hat{x}^1, \hat{x}^2}^{-1} \eta_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2}^{-1} \eta_{\hat{x}^1, \hat{x}^2+1}^{-1} \eta_{\hat{x}^1+1, \hat{x}^2+1} \quad (4.1.7)$$

を持つとする。ここで、 p は $(\hat{x}^1, \hat{x}^2), (\hat{x}^1+1, \hat{x}^2), (\hat{x}^1, \hat{x}^2+1), (\hat{x}^1+1, \hat{x}^2+1)$ で囲まれたプラケットである。また、Gauss 則

$$G_s = \prod_{p \ni s} (V_p)^{\epsilon_p} = 1 \quad (4.1.8)$$

を課す。ここで、 $\epsilon_p = \pm 1$ であり、隣り合うプラケットが異符号となるように値を定める。Hamiltonian は、

$$H = -\tilde{h} \sum_p V_p + \text{h.c.} \quad (4.1.9)$$

ここで、 \tilde{h} は正の実数に値を持つ。

この理論は、以下の保存電荷で生成される \mathbb{Z}_N electric 対称性を持つ：

$$V(p) = V_p. \quad (4.1.10)$$

つまり、この演算子は Hamiltonian と交換する。この対称性は、後の BF 理論に現れる \mathbb{Z}_N electric 対称性に対応する。Gauss 則 (4.1.8) によって、 $V(p = (x^1, x^2))$ は x^1 の関数と x^2 の関数の演算子の積に分けられる。また、 \mathbb{Z}_N dipole 対称性に対応する演算子は U_p の直線上の積であると考えられるが、この対称性は破れている。このモデルの基底状態は V_p の固有値がすべて 1 となるものなので、縮退度は 1 である。

Gauss 則を手で課す代わりに、Hamiltonian に G_s を加えると、Hamiltonian は

$$H = -K \sum_s G_s - \tilde{h} \sum_p V_p + \text{h.c.} \quad (4.1.11)$$

となる。このとき、Gauss 則を満たさない状態のエネルギーは増加する。 $\tilde{h} = 0$ の場合は、基底状態の縮退度の数えることができ、plaquette Ising 模型と同様に $N^{L^1+L^2-1}$ である。また、基底状態に対して U_p をかけると、 p を囲む 4 つのサイトにフラクトンが生成される。

4.2 Foliated QFT

この節では $2+1$ 次元における foliated BF 理論について議論する. この理論は, $3+1$ 次元の foliated BF 理論 [23–25] の $2+1$ 次元版になっており, 先行研究を少し変更するだけで得ることができる.

4.2.1 Foliation と foliated ゲージ場

Foliated QFT を定義するために foliation という概念を導入する. Foliation とは, d 次元の空間多様体を leaf と呼ばれる無限個の $d-i$ 次元多様体に分割することである. この論文では, $i=1$ の場合である余次元 1 の foliation のみを扱う. このような foliation 構造のついた空間上で定義される QFT を foliated QFT (FQFT) と呼ぶ [24].

余次元 1 の foliation は, いたるところ 0 でない 1 形式の foliation 場 e によって特徴づけられる. foliation 場 e は各 leaf の法線ベクトルになっており, foliation が well-defined であるための必要十分条件として, 以下の条件を満たす (例えば [47, 48]) :

$$e \wedge de = 0. \quad (4.2.1)$$

Foliation 場は γ をスカラー関数として $e \rightarrow \gamma e$ のゲージ自由度を持っており, これにより局所的には $e = df$ という形に書ける. ここで f はスカラー関数であるが, これを leaf を指定する座標と考えることができる. 例えば $2+1$ 次元において, 空間の (x^1, x^2) 平面を無限個の x^1 方向の直線で分割する平坦な foliation を考える. このとき, foliation 場は $e = dx^2$ と書くことができ, x^2 は foliation の leaf の位置を表す座標である. ここまでは foliation は 1 つであるとしたが, 同時に複数の foliation を考えることもできる. その場合 $k = 1, 2, \dots, n_f$ を各 foliation を指定する添字だとして, foliation 場を e^k と書く. 以下では, 平坦な foliation, つまり $de^k = 0$ である foliation を考え, $e^k = dx^k$ と書く.

このような foliation 構造と結合した QFT である FQFT は, foliated ゲージ場と呼ばれる leaf 上のゲージ場を持つ [25]. Foliated ゲージ場は leaf が重なる方向に対してデルタ関数の発散またはステップ関数の不連続性を持つことができる. 後に考える $2+1$ 次元の Foliated BF 理論では, 2 つのタイプの $U(1)$ foliated ゲージ場が現れる. これらを $1+1$ 形式の foliated A ゲージ場と 0 形式の foliated B ゲージ場と呼ぶことにする.*¹ $1+1$ 形式の foliated A ゲージ場 \tilde{A}^k は, $\tilde{A}^k \wedge e^k = 0$ を満たす 2 形式のゲージ場である. \tilde{A}^k は $\delta(x^k - x_0^k) dx^k$ といった形の x^k 方向の 1 形式デルタ関数を持つことができる. ゲージ変換は,

$$\tilde{A}^k \rightarrow \tilde{A}^k + d\tilde{\zeta}^k. \quad (4.2.2)$$

*¹ Foliated A ゲージ場と foliated B ゲージ場は, [24] では A^k と B^k と書かれているものである. また [25] では A と B が逆であり, それぞれ B^k と A^k と書かれている.

ここで $\tilde{\zeta}^k$ は $\tilde{\zeta}^k \wedge e^k = 0$ を満たす 0+1 形式ゲージパラメーターである。ゲージパラメーター $\tilde{\zeta}^k$ はそれ自身もゲージ変換 $\tilde{\zeta}^k \rightarrow \tilde{\zeta}^k + 2\pi d\xi^k$ を持つ。ここで ξ^k は x^k のみに依存する整数値の関数である。 $\tilde{\zeta}^k$ はゲージ場と同様に x^k 方向の 1 形式デルタ関数を持つことができる。また、 ξ^k は $\theta(x^k - x_0^k)$ といった形の x^k 方向の 0 形式ステップ関数の不連続性を持つことができる。平坦な foliation $e^k = dx^k$ に対しては、条件から局所的に $\tilde{A}^k = A^k \wedge dx^k$, $\tilde{\zeta}^k = \zeta^k dx^k$ のように書くことができ、以下ではそのように記述する。表 4.1 に foliated A ゲージ場とそのパラメーターをまとめた。もう一方の foliated ゲージ場である foliated B ゲージ場 B^k は 0 形式であり、以下のゲージ変換をもつ：

$$B^k \rightarrow B^k + 2\pi m^k - \mu. \quad (4.2.3)$$

ここで、 m^k は x^k のみに依存する整数値関数である。また、 μ は後に導入するバルクの 1 形式ゲージ場 b の 0 形式ゲージパラメーターである。 B^k は x^k 方向の 0 形式ステップ関数の不連続性を持つことができるとする。^{*2} また、 m^k も x^k 方向に 0 形式ステップ関数の不連続性を持つことができる。表 4.2 に foliated B ゲージ場とそのゲージパラメーターをまとめた。

ゲージ場とパラメーター	条件	ゲージ変換	発散と不連続性
1+1 形式 \tilde{A}^k	$\tilde{A}^k \wedge e^k = 0$	$\tilde{A}^k \rightarrow \tilde{A}^k + d\tilde{\zeta}^k$	1 形式デルタ関数 $\delta(x^k - x_0^k) dx^k$
0+1 形式 $\tilde{\zeta}^k$	$\tilde{\zeta}^k \wedge e^k = 0$	$\tilde{\zeta}^k \rightarrow \tilde{\zeta}^k + 2\pi d\xi^k$	1 形式デルタ関数 $\delta(x^k - x_0^k) dx^k$
x^k のみに依存する 整数値関数 $\xi^k \in \mathbb{Z}$			0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$

表 4.1 1+1 形式 foliated A ゲージ場とそのゲージパラメーター。

^{*2} このようにすると後に説明する BF Lagrangian において同方向のデルタ関数が 1 乗以下となり、作用が有限となる。ここではそのような配位が許されるということである。または、一番“最下層”のゲージパラメーターが x^k のみに依存する整数値のステップ関数になるということから発散と不連続性が決まると考えてもよい。

ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換	発散と不連続性
0 形式 B^k	$B^k \rightarrow B^k + 2\pi m^k - \mu$	0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$
x^k のみに依存する 整数値関数 $m^k \in \mathbb{Z}$		0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$

表 4.2 0 形式 foliated B ゲージ場とそのゲージパラメーター.

4.2.2 2+1 次元の foliated BF Lagrangian

Foliated BF 理論は foliated ゲージ場とバルクのゲージ場を含む FQFT である. Foliated Lagrangian は一般には以下のように書ける:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^{n_f} \frac{iM_k}{2\pi} (dB^k + n_k b) \wedge \tilde{A}^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da. \quad (4.2.4)$$

ここで, \tilde{A}^k は 1+1 形式 foliated A ゲージ場であり, $\tilde{A}^k \wedge e^k = 0$ を満たす. B^k は 0 形式 foliated B ゲージ場である. a および b はバルクの 1 形式ゲージ場である. N, M_k, n_k は整数である. これらの場は $U(1)$ のゲージ場であるが, ゲージ対称性は Higgsing によって \mathbb{Z}_N または \mathbb{Z}_{M_k} となっている. 第 1 項 $\sum_{k=1}^{n_f} \frac{iM_k}{2\pi} dB^k \wedge \tilde{A}^k$ は, 各 foliation k ごとに各 leaf 上に無限個の 1+1 次元の BF 理論があることを表している. 第 3 項 $\frac{iN}{2\pi} b \wedge da$ はバルクの 2+1 次元の BF 理論である. また, 第 2 項 $\sum_{k=1}^{n_f} \frac{iM_k}{2\pi} n_k b \wedge \tilde{A}^k$ は各 leaf 上の理論とバルクの理論の相互作用を表している.

以下では $n_f = 2$ で foliation が平坦, つまり $e^k = dx^k$ ($k = 1, 2$) であり, $M_k = N, n_k = 1$ の場合を考える. この場合が 4.1 節の格子模型の連続極限になっていると考えられ, 後で説明する 4.3 節の理論と対応する. 以上の条件で, foliated A ゲージ場は 1 形式ゲージ場 A^k を用い $\tilde{A}^k = A^k \wedge dx^k$ と書け, foliated Lagrangian は

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^2 \frac{iN}{2\pi} (dB^k + b) \wedge A^k \wedge dx^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da \quad (4.2.5)$$

と書ける. このとき, foliation は平坦で x^1 方向と x^2 方向に実行されているので, 図 4.1 のように空間が分割されており, 各直線上に 1+1 次元の BF 理論があると考えられる.

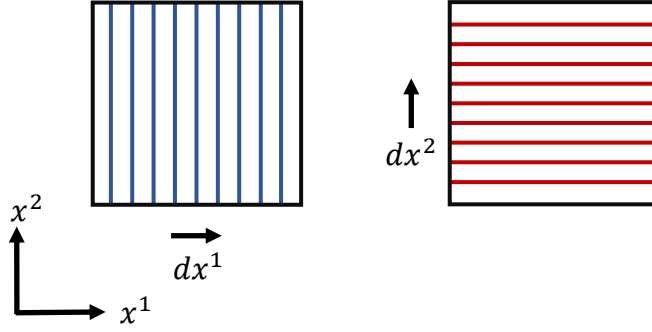


図 4.1 2 + 1 次元の foliated BF 理論の foliation. 2 つの foliation は同時に行われている. また, 分割の直線では無限個である.

運動方程式は

$$\frac{N}{2\pi}(dB^k + b) \wedge dx^k = 0, \quad (4.2.6a)$$

$$\frac{N}{2\pi}db = 0, \quad (4.2.6b)$$

$$\frac{N}{2\pi}dA^k \wedge dx^k = 0, \quad (4.2.6c)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{N}{2\pi}A^k \wedge dx^k + \frac{N}{2\pi}da = 0 \quad (4.2.6d)$$

である.

ゲージ変換は以下のようになる*3 :

$$A^k \wedge dx^k \rightarrow A^k \wedge dx^k + d\zeta^k \wedge dx^k, \quad (4.2.7a)$$

$$B^k \rightarrow B^k + 2\pi m^k - \mu, \quad (4.2.7b)$$

$$a \rightarrow a + d\lambda - \sum_{k=1}^2 \zeta^k dx^k, \quad (4.2.7c)$$

$$b \rightarrow b + d\mu. \quad (4.2.7d)$$

ここで, ζ^k , m^k は 4.2.1 節で説明した foliated ゲージ場のゲージパラメーターであり, λ と μ はそれぞれバルクのゲージ場の 0 形式のゲージパラメーターである. λ はそれ自身のゲージ変換 $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2$ を持つ. ここで, ξ^k は 4.2.1 節で説明した $\zeta^k dx^k$ のゲージ変換のパラメーターであり, x^k のみに依存する整数値関数である. ξ^k はさらに定数モードの自由度があり, それにより λ は $U(1)$ 値の関数とみなすことができる. これらのゲージパラメーターのゲージ変換のもとでは, 1 つ上のゲージ変換は不変になっている. 例えば, a のゲージ変換では

*3 A^k には x^k 成分についてのゲージ変換 $A^k \rightarrow A^k + \chi^k dx^k$ が存在し, この変換によって A^k はゲージ自由度である. つまり, A^k 自身は実質的に 2 成分であり, 1 + 1 次元での 1 形式と成分の数が一致する.

$d\lambda - \sum_{k=1}^2 \zeta^k dx^k$ という項が出るが、これは ξ^k によるゲージ変換 $\zeta^k dx^k \rightarrow \zeta^k dx^k + 2\pi d\xi^k$ 及び $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2$ のもとでは不変である。^{*4}

運動方程式とゲージ変換によってバルクのゲージ場 a , b 及びそのゲージパラメーターも発散と不連続性を持つことができることが示唆される。 a の発散と不連続性の形を表 4.3 にまとめた。^{*5} ここで、 f_i^k , g^k は連続関数である。

ゲージ場とパラメーター	ゲージ変換	発散と不連続を持つ項
a_0	$a_0 \rightarrow a_0 + \partial_0 \lambda$	$f_0^1(x^0, x^2)\theta(x^1 - x_0^1) + f_0^2(x^0, x^1)\theta(x^2 - x_0^2)$
a_1	$a_1 \rightarrow a_1 + \partial_1 \lambda - \zeta^1$	$f_1^1(x^0, x^2)\delta(x^1 - x_0^1) + f_1^2(x^0, x^1)\theta(x^2 - x_0^2)$
a_2	$a_2 \rightarrow a_2 + \partial_2 \lambda - \zeta^2$	$f_2^1(x^0, x^2)\theta(x^1 - x_0^1) + f_2^2(x^0, x^1)\delta(x^2 - x_0^2)$
λ	$\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2$	$g^1(x^0, x^2)\theta(x^1 - x_0^1) + g^2(x^0, x^1)\theta(x^2 - x_0^2)$

表 4.3 ゲージ場 a とそのゲージパラメーターの発散と不連続性。

特定の場の配位を考え、それを積分することによって以下の量が量子化されることを示すことができる：

$$\oint_{C_1^0} a \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.2.8a)$$

$$\oint_{S_2^k} A^k \wedge dx^k \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.2.8b)$$

$$\oint_{C_1} b \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.2.8c)$$

$$B^1 - B^2 \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}. \quad (4.2.8d)$$

ここで、 C_1^0 は時間 x^0 方向に伸びた 1 次元の閉曲線（直線）であり、 C_1 は任意の 1 次元の閉曲線である。また、 S_2^k は x^k 方向に決まった幅を持ったそれ以外の方向に伸びる 2 次元の帯である（例えば S_2^1 は閉区間 $[x_1^1, x_2^1]$ と (x^0, x^2) 平面上の閉曲線 C_1^{02} の直積で書ける）。例えば、

^{*4} ゲージパラメーター μ はゲージ変換 $\mu \rightarrow \mu + 2\pi m$ (m は整数値局所定数関数) を持つが、そのような変換は m^k の定数モードの自由度に吸収される。これは m^k のゲージ変換と考えられるが、話を簡単にするため省略している。また、 ξ^k や m^k 同士でのゲージ変換 $\xi^1 \rightarrow \xi^1 + \xi_0$, $\xi^2 \rightarrow \xi^2 - \xi_0$ (ξ_0 は整数値局所定数関数) なども存在する。

^{*5} b も不連続性を持つことができるが、その形は (4.2.6a) から予想される。

(4.2.8b) については以下のように示せる. B^1 として配位

$$B^1 = 2\pi j \frac{x^2}{l^2} (\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1)), \quad (4.2.9)$$

を考える. ここで, j は整数. この配位は周期的になっており, 特に x^2 方向にはトーラス上を一周するとゲージ変換 $2\pi j m^1 = 2\pi j (\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1))$ の変換関数を除いて周期的である. この配位に対して,

$$\begin{aligned} & \oint_{C_1^0 \times C_1^1 \times C_1^2} dB^1 \wedge A^1 \wedge dx^1 \\ &= \oint_{C_1^0 \times C_1^1 \times C_1^2} 2\pi j (\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1)) \frac{1}{l^2} dx^2 \wedge A^1 \wedge dx^1 \\ &= \frac{2\pi j}{l^2} \oint_{C_1^2} dx^2 \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} A^1 \wedge dx^1 \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

となる. ここで, C_1^2 は x^2 方向に伸びた 1 次元の閉曲線である. 運動方程式 (4.2.6c) を用いると $\oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} A^1 \wedge dx^1$ が x^2 によらないことが示せ*6, B^1 についての経路積分を実行して j について和を取ることで

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[\frac{iNj}{l^2} \oint_{C_1^2} dx^2 \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} A^1 \wedge dx^1 \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[iNj \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} A^1 \wedge dx^1 \right] \quad (4.2.11)$$

が得られる. このとき, $N \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} A^1 \wedge dx^1$ は $2\pi\mathbb{Z}$ の元でなければならず, そうでないような A^1 の配位は経路積分に寄与しない. 再び運動方程式 (4.2.6c) を用いることで C_1^0 は (x^0, x^2) 平面の閉曲線である C_1^{02} に変形することができ, 目的の量の量子化が得られる.

4.2.3 ゲージ不変演算子

ゲージ不変演算子を考える. time-like な多様体上で定義されたゲージ不変演算子は, ギャップのある励起を表し, その多様体は時空上を動く励起の軌跡を表す.

1 つ目は

$$F^q[C_1^0] = \exp \left[iq \oint_{C_1^0} a \right] \quad (4.2.12)$$

である. ここで q は整数. (4.2.8a) から $F^N[C_1^0] = 1$ であるので, $F^q[C_1^0]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である: $q \sim q + N$. もし C_1^0 を空間方向に変形した場合は, ζ^k によるゲージ変換によってゲージ

*6 詳しく考えると, この計算では変換関数の補正が必要である. 付録 A では通常の BF 理論についてこの点を詳しく説明するが, ここでは同様の論法がフラクトン系の BF 理論についても成り立つとし, 変換関数による補正が常になされていると考える.

不変な演算子ではなくなる。例えば積分曲線が (x^0, x^2) 平面上の曲線 C_1^{02} であったとすると、ゲージ変換によってこの演算子は以下のように変換される：

$$F^q[C_1^{02}] \rightarrow \exp \left[iq \oint_{C_1^{02}} \{ dx^0 \partial_0 \lambda + dx^2 (\partial_2 \lambda - \zeta^2) \} \right] F^q[C_1^{02}]. \quad (4.2.13)$$

これはゲージ不変ではない。このように、ゲージ不変性によって、演算子が定義されている多様体は変形することができない。 C_1^0 は時間方向に伸びた直線であるので、この演算子は空間を動かすことができない励起を表していると考えられる。したがって、この演算子がフラク톤を表す。

2つ目は

$$V^q[x] = \exp [iq(B^1 - B^2)] \quad (4.2.14)$$

である。再び q は整数であり、(4.2.8d) から $V^N[x] = 1$ 、つまり $V^q[x]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である。この点演算子 $V^q[x]$ は、 \mathbb{Z}_N electric 対称性を生成する対称性演算子である。これは1次元の部分系上で定義されており、部分系対称性である。運動方程式 (4.2.6a), (4.2.6b) を用いると、 $\frac{N}{2\pi} \partial_1 \partial_2 (B^1 - B^2) = 0$, $\frac{N}{2\pi} \partial_0 (B^1 - B^2) = 0$ が得られ、 $V^q[x]$ が x^1 の関数と x^2 の関数の演算子の積に分解できることがわかる。

3つ目は

$$W_k^q[S_2^k] = \exp \left[iq \oint_{S_2^k} A^k \wedge dx^k \right], \quad k = 1, 2 \quad (4.2.15)$$

である。再び q は整数であり、(4.2.8b) から $W_k^N[S_2^k] = 1$ であるので $W_k^q[S_2^k]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である。これらの帯演算子は x^k 方向に離れたフラク톤の双極子を表す。実際、時空の中に他に演算子がない場合は、運動方程式 (4.2.6c) を用いて S_2^k を $C_1^0 \times [x_1^k, x_2^k]$ のように変形でき、運動方程式 (4.2.6d) を用いることで以下のようにかける：

$$\begin{aligned} W_k^q[S_2^k] &= \exp \left[iq \oint_{C_1^0 \times [x_1^k, x_2^k]} A^k \wedge dx^k \right] \\ &= \exp \left[-iq \oint_{C_1^0 \times [x_1^k, x_2^k]} dx^0 dx^k (\partial_0 a_k - \partial_k a_0) \right] \\ &= \exp \left[-iq \oint_{C_1^0 \times [x_1^k, x_2^k]} dx^0 dx^k \partial_0 a_k \right] F^q[C_1^0(x_2^k)] F^{-q}[C_1^0(x_1^k)]. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

これは、 x^k 方向に離れたフラク톤の双極子を表している。 $\exp \left[-iq \oint_{C_1^0 \times [x_1^k, x_2^k]} dx^0 dx^k \partial_0 a_k \right]$ については後述する修正された帯演算子を考えれば消える。 x^k 方向に離れたフラク톤の双極子は、空間のもう一方の方向にライネオンのように動くことができ、 S^k が x^k 方向以外では変形できることと対応している。 S_2^k が (x^1, x^2) 平面上にある場合、 $W_k^q[S_2^k]$ は \mathbb{Z}_N dipole 対称性を生成する対称性演算子となる。これらは2次元の部分系上で定義されており、部分系対

称性である.

これらの2つのタイプの対称性演算子は互いにもう一方の演算子の charged object になっている. つまり, $V^p[x]$ と $W_k^q[S_2^k]$ は同時刻において以下の交換関係を満たす:

$$V^p[x] W_k^q[S_2^k] = e^{2\pi ipq/N} W_k^q[S_2^k] V^p[x], \quad \text{if } x_1^k < x^k < x_2^k, \quad (4.2.17)$$

ここで, S_2^k は x^r 方向に伸びた閉曲線 C_1^r を用いて $[x_1^1, x_2^1] \times C_1^2$ ($k=1$) または $C_1^1 \times [x_1^2, x_2^2]$ ($k=2$) である. この関係式は, 以下の正準交換関係から得ることができる:

$$[B^1(x^0, x^1, x^2), A_2^1(x^0, y^1, y^2)] = -\frac{2\pi i}{N} \delta^2(x^1 - y^1, x^2 - y^2), \quad (4.2.18a)$$

$$[B^2(x^0, x^1, x^2), A_1^2(x^0, y^1, y^2)] = +\frac{2\pi i}{N} \delta^2(x^1 - y^1, x^2 - y^2). \quad (4.2.18b)$$

他の交換関係は0である.

これらに加えて, バルクのゲージ場 b のゲージ不変演算子

$$T^q[C_1] = \exp \left[iq \oint_{C_1} b \right] \quad (4.2.19)$$

も存在する. (4.2.8c) から, この b 演算子も \mathbb{Z}_N 演算子である. この演算子は, フラクトンの演算子 (4.2.12) に対して以下のように作用する:

$$T^p[C_1] \cdot F^q[C_1^0] = e^{-2\pi ipq/N} F^q[C_1^0]. \quad (4.2.20)$$

ただし, C_1 は C_1^0 を囲んでいるとする [36–39]. もし C_1 の内部に演算子 F^q がなければ, b 演算子 $T^q[C_1]$ は自明となる. このような time-like な演算子を検出するような演算子を time-like 対称性と呼ぶ [43].^{*7} また, C_1 が非可縮なループである場合も $T^q[C_1]$ は自明になる. 例えば, $C_1 = C_1^1$ の場合, 運動方程式 (4.2.6a) を用いることで

$$T^q[C_1^1] = \exp \left[iq \oint_{C_1^1} (-\partial_1 B^2 dx^1) \right] = 1 \quad (4.2.21)$$

となる. 後の節のために, C_1 が空間内の4点 (x_1^1, x_1^2) , (x_1^1, x_2^2) , (x_2^1, x_1^2) , (x_2^1, x_2^2) を結ぶ長方形 $C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2)$ である場合を考えると, 再び運動方程式 (4.2.6a) を用いて

$$\begin{aligned} T^q \left[C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2) \right] &= \exp \left[iq \oint_{C_1^{12, \text{rect}}} (-\partial_1 B^2 dx^1 - \partial_2 B^1 dx^2) \right] \\ &= \exp \left[-iq \Delta_{12} (B^1 - B^2)(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2) \right] \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

と書ける. ここで, $\Delta_{12} f(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2) = f(x_2^1, x_2^2) - f(x_2^1, x_1^2) - f(x_1^1, x_2^2) + f(x_1^1, x_1^2)$ である. この演算子は, 長方形の各頂点に局在している V^q または V^{-q} の積になっており, 四重極演算子と呼ぶ. また, $T^q[C_1]$ が time-like な演算子である場合も, そのような演算子より

^{*7} time-like 対称性は time-like な演算子 (defect 演算子) が存在するような Hilbert 空間に非自明に作用する. もしそのような defect 演算子がなければ, time-like 対称性の演算子は自明になる.

モートに（つまり，時空上で C_1 と交わらないような演算子で）detect するような演算子が存在しないことに注意してほしい．通常の BF 理論の場合は $\exp \left[iq \oint_{C_1} a \right]$ が空間内にある場合もゲージ不変演算子となり， b 演算子を検出することができるが，今の場合はこのような演算子は時間方向の直線でしかゲージ不変にならない．このような事実から， T^q に対応するような励起は存在しない．これは通常のトポロジカル QFT とは異なる事象であり，フラクトン系の QFT に特有の性質である [1]．

4.2.4 電磁双対による記述

通常の $1+1$ 次元の BF 理論は，電荷 N のスカラー場に $U(1)$ ゲージ場を結合させることによって実現される \mathbb{Z}_N ゲージ理論と双対である [36–39]．これは片方のゲージ場の電磁双対をとったものである．同様に，4.2 節での foliated BF 理論と後の 4.3 節での exotic BF 理論も，電磁双対をとった記述が存在する．

Foliated BF 理論は，無限個の leaf 上の $1+1$ 次元の BF 理論を持つが，これらをスカラー場による記述で書くことができる．Lagrangian は，

$$\mathcal{L}'_f = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{i}{2\pi} U^k \wedge (d\Phi^k - NA^k) \wedge dx^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge A^k \wedge dx^k \right] + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da \quad (4.2.23)$$

である．ここで， Φ^k はコンパクトスカラー場であり， U^k は 1 形式の Lagrange 未定乗数である． Φ^k は x^k 方向にデルタ関数の発散を持つことができる．ゲージ変換は，

$$\Phi^k \rightarrow \Phi^k + N\zeta^k + 2\pi\partial_k t^k \quad (4.2.24a)$$

である．ここで， t^k は x^k のみに依存する整数値関数であり， x^k 方向に 0 形式のステップ関数の不連続性を持つことができる． ζ^k は，4.2.1 節及び 4.2.2 節で定義されたゲージパラメータである． U^k を積分して得られる運動方程式は，

$$(d\Phi^k - NA^k) \wedge dx^k = 0 \quad (4.2.25)$$

であるので，帯演算子 (4.2.15) は

$$W_k^q[S_2^k] = \exp \left[i \frac{q}{N} \oint_{S_2^k} d\Phi^k \wedge dx^k \right], \quad (k = 1, 2) \quad (4.2.26)$$

とも書ける．

実際にこの理論が，foliated BF 理論と双対であることを見るために， Φ^k を経路積分する．得られる運動方程式は，

$$\frac{N}{2\pi} dU^k \wedge dx^k = 0. \quad (4.2.27)$$

この方程式は，局所的に $U^k \wedge dx^k = dB^k \wedge dx^k$ と解くことができる．ここで， B^k は 4.2.1 節

で定義された foliated B ゲージ場となる. このとき, Lagrangian は

$$\mathcal{L}'_f \rightarrow \sum_{k=1}^2 \left[\frac{iN}{2\pi} dB^k \wedge A^k \wedge dx^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge A^k \wedge dx^k \right] + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da \quad (4.2.28)$$

となり, (4.2.5) と一致する.

4.3 Exotic QFT

この節では, $2+1$ 次元における \mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論である exotic BF 理論 [16] をレビューする. 後の 4.4 節ではこの exotic 理論が前節の foliated BF 理論と等価であることを示す.

4.3.1 テンソルゲージ場

第 3 章と同様に, 以下で導入する exotic 理論は連続的 QFT であるが, Lorentz 対称性を持たず, 回転対称性も 90 度回転 \mathbb{Z}_4 の対称性しか持たない. この理論では, 離散的な回転対称性 \mathbb{Z}_4 の表現であるテンソルゲージ場を持つ. \mathbb{Z}_4 の既約表現は 1 次元のものが 4 つあるが, それを $\mathbf{1}_n$ ($n = 0, \pm 1, 2$) と書く. n はスピンと呼ぶが, スピン n の表現は 90 度回転によって $e^{2\pi i n/4}$ だけ位相がかかるものである. Exotic BF 理論は表現 $\mathbf{1}_2$ のコンパクトスカラー場 ϕ^{12} 及び表現 $(\mathbf{1}_0, \mathbf{1}_2)$ の $U(1)$ テンソルゲージ場 (A_0, A_{12}) によって記述される. これらのゲージ変換は

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha, \quad (4.3.1a)$$

$$A_{12} \rightarrow A_{12} + \partial_1 \partial_2 \alpha, \quad (4.3.1b)$$

$$\phi^{12} \rightarrow \phi^{12} + 2\pi \tilde{m}^1 - 2\pi \tilde{m}^2 \quad (4.3.1c)$$

である. ここで, α は $\mathbf{1}_0$ のゲージパラメーターである. また, \tilde{m}^k は x^k のみに依存する整数値関数である. ゲージパラメーター α はそれ自身ゲージ変換を持つ: $\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi \tilde{n}^1 + 2\pi \tilde{n}^2$. ここで, \tilde{n}^k は x^k のみに依存する整数値関数である. \tilde{m}^k 及び \tilde{n}^k は x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる. このとき, ϕ^{12} も不連続性を持つ配位が存在する. このような配位が存在することは, 格子模型がブラケットの相互作用を持つことに原因がある. このような状況では, 連続極限を考える際に, $\partial_1 \phi^{12}$ のような演算子ではなく $\partial_1 \partial_2 \phi^{12}$ が十分小さくなる配位のみが残ることになり, $\partial_1 \partial_2 \phi^{12}$ が single-valued な演算子となる. 具体的な ϕ^{12} の配位としては, x^1 及び x^2 方向に一回転したときにゲージ自由度を除いて周期的になる配位

$$\phi^{12} = 2\pi \left[\frac{x^2}{l^2} \theta(x^1 - x_0^1) + \frac{x^1}{l^1} \theta(x^2 - x_0^2) - \frac{x^1 x^2}{l^1 l^2} \right] \quad (4.3.2)$$

がある。 A_0 も同様である。 また、 α も ϕ^{12} と同じ配位が許され、 それに対応して A_{12} にはデルタ関数の発散を持つ配位が存在する。 具体的な配位としては、

$$A_{12} = 2\pi \frac{x^0}{l^0} \left[\frac{1}{l^2} \delta(x^1 - x_0^1) + \frac{1}{l^1} \delta(x^2 - x_0^2) - \frac{1}{l^1 l^2} \right] \quad (4.3.3)$$

がある。 これらのテンソルゲージ場の発散と不連続性は表 4.4 にまとめた。 ここで、 \tilde{f}_0^k , \tilde{f}_{12}^k , \tilde{g}^k , \tilde{h}^k は適切な周期性を持つ連続関数である。

テンソルゲージ場とゲージパラメーター	ゲージ変換	発散と不連続性を持つ項
A_0	$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha$	$\tilde{f}_0^1(x^0, x^2) \theta(x^1 - x_0^1) + \tilde{f}_0^2(x^0, x^1) \theta(x^2 - x_0^2)$
A_{12}	$A_{12} \rightarrow A_{12} + \partial_1 \partial_2 \alpha$	$\tilde{f}_{12}^1(x^0, x^2) \delta(x^1 - x_0^1) + \tilde{f}_{12}^2(x^0, x^1) \delta(x^2 - x_0^2)$
α	$\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi \tilde{n}^1 + 2\pi \tilde{n}^2$	$\tilde{g}^1(x^0, x^2) \theta(x^1 - x_0^1) + \tilde{g}^2(x^0, x^1) \theta(x^2 - x_0^2)$
ϕ^{12}	$\phi^{12} \rightarrow \phi^{12} + 2\pi \tilde{m}^1 - 2\pi \tilde{m}^2$	$\tilde{h}^1(x^0, x^2) \theta(x^1 - x_0^1) + \tilde{h}^2(x^0, x^1) \theta(x^2 - x_0^2)$

表 4.4 テンソルゲージ場とそのゲージパラメーターの発散と不連続性。

4.3.2 2+1 次元の exotic BF Lagrangian

Exotic BF 理論の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_e = \frac{iN}{2\pi} \phi^{12} (\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0) \quad (4.3.4)$$

である。

運動方程式は

$$\frac{N}{2\pi} \partial_1 \partial_2 \phi^{12} = 0, \quad (4.3.5a)$$

$$\frac{N}{2\pi} \partial_0 \phi^{12} = 0, \quad (4.3.5b)$$

$$\frac{N}{2\pi} (\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0) = 0 \quad (4.3.5c)$$

である。

特定の場の配位を考え、積分することによって以下の量が量子化されることが示せる：

$$\oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.3.6a)$$

$$\oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.3.6b)$$

$$\oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (4.3.6c)$$

$$\phi^{12} \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}. \quad (4.3.6d)$$

ここで、前節と同様に C_1^0 は時間 x^0 方向に伸びた 1 次元の閉曲線（直線）であり、 S_2^k は x^k 方向に決まった幅を持ち、他の方向に伸びた 2 次元の帯である．例えば、(4.3.6b) を示すには以下の配位

$$\phi^{12} = 2\pi j \frac{x^2}{l^2} [\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1)] \quad (4.3.7)$$

を考えればよい．ここで J は整数．この配位について、

$$\oint_{C_1^1} dx^1 \oint_{C_1^2} dx^2 \partial_2 \phi^{12} \partial_1 A_0 = 2\pi j \oint_{C_1^1} dx^1 (\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1)) \frac{1}{l^2} \oint_{C_1^2} dx^2 \partial_1 A_0 \quad (4.3.8)$$

となるので、 j について和を取り、(4.3.5c) を用いることで、分配関数は

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[\frac{iNj}{l^2} \oint_{C_1^2} dx^2 \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[iNj \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 \right] \quad (4.3.9)$$

となる．したがって、 $N \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} dx^0 dx^1 \partial_1 A_0$ は整数でなければ寄与しない．再び運動方程式 (4.3.5c) を使って C_1^0 は C_1^{02} へと変形でき、 $\oint_{C_1^{02} \times [x_1^1, x_2^1]} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12})$ となる．

4.3.3 ゲージ不変演算子

ゲージ不変演算子について考える．ゲージ不変演算子は foliated BF 理論と同じ形をとる．

フラク톤の演算子は

$$\tilde{F}^q[C_1^0] = \exp \left[iq \oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \right] \quad (4.3.10)$$

である．Foliated BF 理論と同様に、 C_1^0 を空間方向に変形するとゲージ不変性が破れることがわかる． \mathbb{Z}_N electric 対称性を生成する点演算子は

$$\tilde{V}^q[x] = \exp [iq\phi^{12}] \quad (4.3.11)$$

である．点演算子は運動方程式 (4.3.5a), (4.3.5b) により, x^1 の関数と x^2 の関数の演算子の積に分解できる．フラク톤の双極子を表す帯演算子は

$$\tilde{W}_1^q [S_2^1] = \exp \left[iq \oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12}) \right], \quad (4.3.12a)$$

$$\tilde{W}_2^q [S_2^2] = \exp \left[iq \oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12}) \right] \quad (4.3.12b)$$

である． S_2^k が (x^1, x^2) 平面上にある場合は, \tilde{W}_k^q は \mathbb{Z}_N dipole 対称性を生成する対称性演算子となる．これらのゲージ不変演算子はすべて \mathbb{Z}_N 演算子である．

2つのタイプの対称性演算子は以下の交換関係を満たす：

$$\tilde{V}^p[x] \tilde{W}_k^q[S_2^k] = e^{2\pi ipq/N} \tilde{W}_k^q[S_2^k] \tilde{V}^p[x], \quad \text{if } x_1^k < x^k < x_2^k. \quad (4.3.13)$$

この関係式は同時刻の正準交換関係

$$[\phi^{12}(x^0, x^1, x^2), A_{12}(x^0, y^1, y^2)] = -\frac{2\pi i}{N} \delta^2(x^1 - y^1, x^2 - y^2). \quad (4.3.14)$$

から導かれる (他の交換関係は 0)．これらの exotic BF 理論の対称性は部分系対称性であり, 4.2 節で議論した foliated BF 理論と全く同じ形になっている．

これらに加えて, フラク톤の演算子を検出する演算子

$$\tilde{T}^q \left[C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \right] = \exp \left[-iq \Delta_{12} \phi^{12}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \right] \quad (4.3.15)$$

も存在する．この四重極演算子は空間上の長方形 $C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ の頂点に局在した \tilde{V}^q 及び \tilde{V}^{-q} の積になっている．これは time-like 対称性である [43]．Time-like 対称性 \tilde{T}^p は \tilde{F}^q に対して以下の作用を持つ：

$$\tilde{T}^p \left[C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \right] \cdot \tilde{F}^q[C_1^0] = e^{-2\pi ipq/N} \tilde{F}^q[C_1^0]. \quad (4.3.16)$$

ただし, $C_1^{12, \text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ は C_1^0 を囲む長方形である．

4.3.4 電磁双対による記述

Foliated BF 理論と同様に, exotic BF 理論もスカラー場に $U(1)$ テンソルゲージ場を結合させた \mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論の記述を持つ [16]．後の節で, この \mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論が, 直接的に foliated の理論 (4.2.23) と対応することを見る．

Lagrangian は,

$$\mathcal{L}'_e = \frac{i}{2\pi} \hat{E}^{12} (\partial_1 \partial_2 \phi - N A_{12}) + \frac{i}{2\pi} \hat{B} (\partial_0 \phi - N A_0) \quad (4.3.17)$$

である．ここで, ϕ は表現 $\mathbf{1}_0$ のコンパクトスカラー場である．また, (\hat{E}^{12}, \hat{B}) は表現 $(\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_0)$

に属する Lagrange 未定乗数である。スカラー場 ϕ は、 ϕ^{12} と同様に、 x^1 方向と x^2 方向のステップ関数を持つ項の和の配位を持つ。ゲージ変換は、

$$\phi \rightarrow \phi + N\alpha + 2\pi\tilde{t}^1 + 2\pi\tilde{t}^2 \quad (4.3.18)$$

である。ここで、 \tilde{t}^k は x^k のみに依存する整数値関数であり、 x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。 α は 4.3.1 節で定義されたゲージパラメーターである。

Lagrange 未定定数を積分して得られる運動方程式は、

$$\partial_1\partial_2\phi - NA_{12} = 0, \quad (4.3.19a)$$

$$\partial_0\phi - NA_0 = 0 \quad (4.3.19b)$$

である。ここから、帯演算子 (4.3.12a), (4.3.12b)) は、

$$\tilde{W}_1^q [S_2^1] = \exp \left[i\frac{q}{N} \oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 \partial_0 \phi + dx^2 dx^1 \partial_1 \partial_2 \phi) \right], \quad (4.3.20a)$$

$$\tilde{W}_2^q [S_2^2] = \exp \left[i\frac{q}{N} \oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 \partial_0 \phi + dx^1 dx^2 \partial_1 \partial_2 \phi) \right] \quad (4.3.20b)$$

とも書くことができる。

実際に、この理論が exotic BF 理論と等価であることを見るために、 ϕ を積分する。得られる運動方程式は、

$$\partial_1\partial_2\hat{E}^{12} - \partial_0\hat{B} = 0. \quad (4.3.21)$$

この方程式は局所的に $\hat{E}^{12} = \partial_0\phi^{12}$, $\hat{B} = \partial_1\partial_2\phi^{12}$ と解くことができる。このとき、Lagrangian は

$$\mathcal{L}'_e \rightarrow \frac{iN}{2\pi}\phi^{12}\partial_0 A_{12} - \frac{iN}{2\pi}\phi^{12}\partial_1\partial_2 A_0 \quad (4.3.22)$$

となり、(4.3.4) と一致している。

4.4 2+1 次元における対応

2+1 次元において、4.2 節で説明した foliated BF 理論と 4.3 節で説明した exotic BF 理論は、foliated 側で $e^k = dx^k$, $M_k = N$, $n_k = 1$ ($k = 1, 2$) という状況で等価であると考えられる。実際、ゲージ不変演算子は同じ形になっており、それを比較して得られるゲージ場とゲージパラメーターの対応は、発散と不連続性を含めて完全に一致する。これを foliated-exotic 双対性と呼ぶ [1]。この節では、その対応を頭わに書き下す。

[25]において言及されているが, あるバルクの理論を含まない foliated 理論は平坦条件

$$d \left(\sum_{k=1}^2 \frac{N}{2\pi} A^k \wedge dx^k \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

のもとでテンソルゲージ理論と対応すると考えられていた. 節 4.2 の foliated BF 理論においては, b を経路積分することによって運動方程式 (4.2.6d) が得られ, これが上の平坦条件となる. しかしながら, 以下で考える対応ではバルクの理論まで含めた FQFT を考え, バルクのゲージ場 a が非自明に場の対応に入ることによって, 発散と不連続性も含めて正確な対応となっていることがわかる.

4.4.1 BF 理論における対応

まず, フラクトンの演算子の対応を考える. (4.2.12) で定義された $F^q[C_1^0]$ と (4.3.10) で定義された $\tilde{F}^q[C_1^0]$ を同一視する*⁸:

$$\exp \left[iq \oint_{C_1^0} a \right] \simeq \exp \left[iq \oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \right]. \quad (4.4.2)$$

この同一視によって, ゲージ場の対応

$$a_0 \simeq A_0 \quad (4.4.3)$$

が得られる. a_0 と A_0 のゲージ変換は

$$a_0 \rightarrow a_0 + \partial_0 \lambda, \quad (4.4.4a)$$

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha \quad (4.4.4b)$$

であるので, ここからゲージパラメーターの対応

$$\lambda \simeq \alpha \quad (4.4.5)$$

も得られる. さらに, ゲージパラメーター λ と α のゲージ変換

$$\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2, \quad (4.4.6a)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi\tilde{n}^1 + 2\pi\tilde{n}^2 \quad (4.4.6b)$$

によって,

$$\xi^k \simeq \tilde{n}^k \quad (4.4.7)$$

*⁸ この同一視は仮定であるが, 双方の理論においてこの演算子が格子模型におけるフラクトンの励起を連続 QFT で表していると考えられることが根拠になっている. また, この同一視によって得られるゲージ場とゲージパラメーターが対応を持つことから, 実際にこの仮定が妥当であることがわかる.

を得る．これらの対応のもとで，発散と不連続性も合致していることは容易に確かめることができる．

ここで，運動方程式 (4.2.6d) を成分で書くと

$$\frac{N}{2\pi}(A_0^1 + \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) = 0, \quad (4.4.8a)$$

$$\frac{N}{2\pi}(A_0^2 + \partial_0 a_2 - \partial_2 a_0) = 0, \quad (4.4.8b)$$

$$\frac{N}{2\pi}(A_2^1 - A_1^2 + \partial_2 a_1 - \partial_1 a_2) = 0 \quad (4.4.8c)$$

であるが，これらに対応 (4.4.3) と合わせることによって

$$A_0^1 + \partial_0 a_1 \simeq \partial_1 A_0, \quad (4.4.9a)$$

$$A_0^2 + \partial_0 a_2 \simeq \partial_2 A_0 \quad (4.4.9b)$$

が示唆される．左辺では， ζ^k によるゲージ変換が打ち消され，ゲージパラメーターの対応 (4.4.5) と整合していることがわかる．

次に，帯演算子の対応を考える．(4.2.15) で定義された $W_k^q[S_2^k]$ と (4.3.12a), (4.3.12b) で定義された $\tilde{W}_k^q[S_2^k]$ を同一視したいが，これらの指数部分の被積分関数のゲージ変換は一致せず，場の対応を考えても (4.4.9a), (4.4.9a) と矛盾する．したがって，foiated 側では以下の修正されたゲージ不変帯演算子

$$W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k] = \exp \left[iq \oint_{S_2^k} (A^k \wedge dx^k + d(a_k dx^k)) \right], \quad k = 1, 2 \quad (4.4.10)$$

を考える．指数は以下でみるように量子化されている：

$$\oint_{S_2^k} (A^k \wedge dx^k + d(a_k dx^k)) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}. \quad (4.4.11)$$

したがって， $W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である．例えば， $k = 1$ で量子化を示すためには， b の配位として

$$b = 2\pi j \frac{1}{l^2} (\theta(x^1 - x_1^1) - \theta(x^1 - x_2^1)) dx^2 \quad (4.4.12)$$

を考えればよい．ここで j は整数．運動方程式 (4.2.6c) を用いて，

$$\begin{aligned} & \oint_{C_1^0 \times C_1^1 \times C_1^2} b \wedge \left(\sum_{k=1}^2 A^k \wedge dx^k + da \right) \\ &= \frac{2\pi j}{l^2} \oint dx^2 \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} (A_0^1 + \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) dx^0 \wedge dx^1 \\ &= 2\pi j \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} (A_0^1 + \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) dx^0 \wedge dx^1 \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

を得る．(4.2.8a) から， $\oint_{C_1^0} a_0 dx^0$ は $2\pi \mathbb{Z}/N$ に値を持つので，経路積分を実行することで分

配関数は

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[iNj \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} (A_0^1 + \partial_0 a_1) dx^0 \wedge dx^1 \right] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp \left[iNj \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} (A^1 \wedge dx^1 + d(a_1 dx^1)) \right] \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

となる。したがって、 $N \oint_{C_1^0 \times [x_1^1, x_2^1]} (A^1 \wedge dx^1 + d(a_1 dx^1))$ は $2\pi\mathbb{Z}$ に値を持たなければ寄与しない。再び運動方程式 (4.2.6c) を用いることで、 C_1^0 は C^{02} に変形することができ、(4.4.11) が示される。この修正された帯演算子 $W_k^q[S_2^k]$ を $\tilde{W}_k^q[S_2^k]$ と同一視する：

$$\exp \left[iq \oint_{S_2^1} (A^1 \wedge dx^1 + d(a_1 dx^1)) \right] \simeq \exp \left[iq \oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12}) \right], \quad (4.4.15a)$$

$$\exp \left[iq \oint_{S_2^2} (A^2 \wedge dx^2 + d(a_2 dx^2)) \right] \simeq \exp \left[iq \oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12}) \right]. \quad (4.4.15b)$$

ここから、ゲージ場の対応

$$A_2^1 + \partial_2 a_1 \simeq A_{12}, \quad (4.4.16a)$$

$$A_1^2 + \partial_1 a_2 \simeq A_{12}, \quad (4.4.16b)$$

及び (4.4.9a), (4.4.9b) が得られる。項 $\partial_2 a_1$, $\partial_1 a_2$ によって、ゲージパラメーターの対応 (4.4.5) のもとで A_{12} のゲージ変換と整合していることがわかる。Foliated 側の帯演算子 $W_{k,\text{mod}}^q$ と W_k^q の比

$$W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k] W_k^{-q}[S_2^k] = \exp \left[iq \oint_{S_2^k} d(a_k dx^k) \right], \quad (4.4.17)$$

は、 S_2^k 上で a_k が一価なら自明になる。このような演算子は、他の演算子によって検出することができず、対応する物理的励起が存在しないと考えられる。通常の TQFT ではすべてのゲージ不変演算子が励起に対応しているため [41, 42]、このような曖昧さは、フラクトン相に特有の性質だと考えられる。

最後に、 \mathbb{Z}_N electric 対称性の点演算子を考える。(4.2.14) で定義された $V^q[x]$ と (4.3.11) で定義された $\tilde{V}^q[x]$ を同一視する：

$$\exp [iq(B^1 - B^2)] \simeq \exp [iq\phi^{12}]. \quad (4.4.18)$$

ここからゲージ場の対応

$$B^1 - B^2 \simeq \phi^{12} \quad (4.4.19)$$

を得る．左辺では μ によるゲージ変換は打ち消されている．ゲージ変換 (4.2.7b), (4.3.1c) より，ゲージパラメーターの対応

$$m^1 - m^2 \simeq \tilde{m}^1 - \tilde{m}^2 \quad (4.4.20)$$

が得られる．不連続性を考えれば，

$$m^1 \simeq \tilde{m}^1, \quad m^2 \simeq \tilde{m}^2 \quad (4.4.21)$$

がわかる．対応 (4.4.19) のもとで，(4.2.22) における time-like 対称性演算子 $T^q[C_1^{12,\text{rect}}]$ は (4.3.15) で定義された $\tilde{T}^q[C_1^{12,\text{rect}}]$ と対応することがわかる．フラク톤の defect 演算子が存在する Hilbert 空間上では，任意の閉曲線 C_1 上の b 演算子 $T^q[C_1]$ は，defect 演算子がない領域では自明になるので， C_1 で囲まれた defect 演算子を囲む長方形上での演算子 $T^q[C_1^{12,\text{rect}}]$ の積に分解される．

Foliated 側で b を積分した場合，上のゲージ場の対応のもとでは，Lagrangian (4.2.5) と (4.3.4) は一致する． b による運動方程式 (4.4.8a), (4.4.8b), (4.4.8c) を用いると，(4.2.5) は単純にバルクの項が消えて

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^2 \frac{iN}{2\pi} dB^k \wedge A^k \wedge dx^k \quad (4.4.22)$$

となるが，部分積分して*⁹場の対応 (4.4.9a), (4.4.9b), (4.4.16a), (4.4.16b) 及び (4.4.19) を用いることで，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{iN}{2\pi} [B^1(-\partial_2 A_0^1 + \partial_0 A_2^1) + B^2(-\partial_0 A_1^2 + \partial_1 A_0^2)] dx^0 dx^1 dx^2 \\ &= \frac{iN}{2\pi} [B^1 \{-\partial_2(A_0^1 + \partial_0 a_1) + \partial_0(A_2^1 + \partial_2 a_1)\} \\ &\quad + B^2 \{-\partial_0(A_1^2 + \partial_1 a_2) + \partial_1(A_0^2 + \partial_0 a_2)\}] dx^0 dx^1 dx^2 \\ &\simeq \frac{iN}{2\pi} [B^1(-\partial_2 \partial_1 A_0 + \partial_0 A_{12}) + B^2(-\partial_0 A_{12} + \partial_1 \partial_2 A_0)] dx^0 dx^1 dx^2 \\ &= \frac{iN}{2\pi} [(B^1 - B^2)(\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0)] dx^0 dx^1 dx^2 \\ &\simeq \frac{iN}{2\pi} [\phi^{12}(\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0)] dx^0 dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

が得られ，(4.3.4) の $\mathcal{L}_e = \frac{iN}{2\pi} \phi^{12}(\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0)$ と一致する．

4.4.2 電磁双対の理論での対応

4.2.4 節での foliated ゲージ理論と 4.3.4 節での exotic テンソルゲージ理論は，直接対応する．具体的には，帯演算子の対応から，スカラー場 Φ^k と ϕ の対応を得ることができる．

*⁹ 付録 A の通常の BF 理論の場合と同様に，変換関数の補正を適切に変更して部分積分することができると考えられる．

帯演算子 (4.2.26) と (4.3.20a), (4.3.20b) を比較するが, (4.4.10) における $W_k^q[S_2^k]$ の修正も考慮に入れ, 以下のように同一視する:

$$\exp \left[i \frac{q}{N} \oint_{S_2^1} (d\Phi^1 \wedge dx^1 + Nd(a_1 dx^1)) \right] \simeq \exp \left[i \frac{q}{N} \oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 \partial_0 \phi + dx^2 dx^1 \partial_1 \partial_2 \phi) \right], \quad (4.4.24a)$$

$$\exp \left[i \frac{q}{N} \oint_{S_2^2} (d\Phi^2 \wedge dx^2 + Nd(a_2 dx^2)) \right] \simeq \exp \left[i \frac{q}{N} \oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 \partial_0 \phi + dx^1 dx^2 \partial_1 \partial_2 \phi) \right]. \quad (4.4.24b)$$

ここから, スカラー場の対応

$$\Phi^1 + Na_1 \simeq \partial_1 \phi, \quad (4.4.25a)$$

$$\Phi^2 + Na_2 \simeq \partial_2 \phi \quad (4.4.25b)$$

が得られる. Φ^k と ϕ のゲージ変換は,

$$\Phi^k \rightarrow \Phi^k + N\zeta^k + 2\pi\partial_k t^k, \quad (4.4.26a)$$

$$a_k \rightarrow a_k + \partial_k \lambda - \zeta^k, \quad (4.4.26b)$$

$$\phi \rightarrow \phi + N\alpha + 2\pi\tilde{t}^1 + 2\pi\tilde{t}^2 \quad (4.4.26c)$$

であるので, 左辺では ζ^k によるゲージ変換が打ち消されている. ここから, ゲージパラメータの対応

$$\lambda \simeq \alpha, \quad (4.4.27a)$$

$$t^k \simeq \tilde{t}^k \quad (4.4.27b)$$

が得られる. これらの対応のもとでは, 不連続性は両辺で一致している.

2 + 1 次元におけるゲージ場とゲージパラメータの対応は表 4.5 にまとめた.

Foliated BF 理論		Exotic BF 理論	
ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換	ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換
a_0	$\partial_0 \lambda$	A_0	$\partial_0 \alpha$
$A_0^k + \partial_0 a_k$ ($k = 1, 2$)	$\partial_0 \partial_k \lambda$ ($k = 1, 2$)	$\partial_k A_0$ ($k = 1, 2$)	$\partial_k \partial_0 \alpha$ ($k = 1, 2$)
$A_i^k + \partial_i a_k$ ($k, i = (1, 2), (2, 1)$)	$\partial_i \partial_k \lambda$ ($k, i = (1, 2), (2, 1)$)	A_{12}	$\partial_1 \partial_2 \alpha$
λ	$2\pi \xi^1 + 2\pi \xi^2$	α	$2\pi \tilde{n}^1 + 2\pi \tilde{n}^2$
ξ^k ($k = 1, 2$)		\tilde{n}^k ($k = 1, 2$)	
$B^1 - B^2$	$2\pi m^1 - 2\pi m^2$	ϕ^{12}	$2\pi \tilde{m}^1 - 2\pi \tilde{m}^2$
m^k ($k = 1, 2$)		\tilde{m}^k ($k = 1, 2$)	
$\Phi^k + N a_k$ ($k = 1, 2$)	$N \partial_k \lambda + 2\pi \partial_k t^k$ ($k = 1, 2$)	$\partial_k \phi$ ($k = 1, 2$)	$N \partial_k \alpha + 2\pi \partial_k \tilde{t}^k$ ($k = 1, 2$)
t^k ($k = 1, 2$)		\tilde{t}^k ($k = 1, 2$)	

表 4.5 2 + 1 次元における foliated BF 理論と exotic BF 理論の間のゲージ場とゲージパラメーターの対応.

4.5 基底状態の縮退度とロバストネス

この節では、基底状態の縮退度とロバストネス [16] を論じる。

基底状態の縮退度は、対称性演算子の表現を調べることでわかる。空間は格子に正則化されており、格子定数は a 、格子の数は x^k 方向に L^k 個、 $\hat{x}^k = x^k/a$ とする。以下では exotic BF 理論の場合で考える。対称性演算子は、

$$\tilde{V}^q[x] = \exp[iq\phi^{12}] \quad (4.5.1)$$

及び

$$\tilde{W}_1^q[S_2^1] = \exp\left[iq \oint_{S_2^1} dx^2 dx^1 A_{12}\right], \quad (4.5.2a)$$

$$\tilde{W}_2^q[S_2^2] = \exp\left[iq \oint_{S_2^2} dx^1 dx^2 A_{12}\right] \quad (4.5.2b)$$

である。ここで、 S_2^k は $S_2^1 = [x_1^1, x_2^1] \times C_1^2$ 、 $S_2^2 = C_1^1 \times [x_1^2, x_2^2]$ であり、 C_1^k は x^k 方向の閉曲線（直線）である。これら 2つのタイプの対称性演算子は以下の交換関係

$$\tilde{V}^p[x] \tilde{W}_k^q[S_2^k] = e^{2\pi ipq/N} \tilde{W}_k^q[S_2^k] \tilde{V}^p[x], \quad \text{if } x_1^k < x^k < x_2^k \quad (4.5.3)$$

を満たす。格子による正則化によって、独立な演算子は以下のようになる：

$$A(\hat{x}^1) = \exp[i\phi^{12}(a\hat{x}^1, a)], \quad \hat{x}^1 = 1, \dots, L^1, \quad (4.5.4a)$$

$$B(\hat{x}^1) = \exp\left[ia^2 \sum_{\hat{x}^2=1}^{L^2} A_{12}(a\hat{x}^1, a\hat{x}^2)\right], \quad \hat{x}^1 = 1, \dots, L^1, \quad (4.5.4b)$$

$$A(\hat{x}^2) = \exp[i\phi^{12}(a, a\hat{x}^2) - i\phi^{12}(a, a)], \quad \hat{x}^2 = 2, \dots, L^2, \quad (4.5.4c)$$

$$B(\hat{x}^2) = \exp\left[ia^2 \sum_{\hat{x}^1=1}^{L^1} A_{12}(a\hat{x}^1, a\hat{x}^2)\right], \quad \hat{x}^2 = 2, \dots, L^2. \quad (4.5.4d)$$

これらは $A(\hat{x}^k)^N = 1$ 、 $B(\hat{x}^k)^N = 1$ 、 $A(\hat{x}^k)B(\hat{x}^k) = e^{2\pi i/N} B(\hat{x}^k)A(\hat{x}^k)$ を満たし、独立な $AB = e^{2\pi i/N} BA$ という代数を満たす $L^1 + L^2 - 1$ 個の演算子の組である。それぞれの代数に対して最小の表現は N 次元表現であり、よって縮退度は $N^{L^1+L^2-1}$ となる。

次にロバストネスについて考える。IR の foliated / exotic BF 理論での対称性 G_{IR} は \mathbb{Z}_N electric 対称性及び \mathbb{Z}_N dipole 対称性である。UV の格子模型が \mathbb{Z}_N plaquette Ising 模型 ($h \neq 0$ は十分小さい) の場合は、対称性 G_{UV} は \mathbb{Z}_N dipole 対称性のみである。 $h = 0$ では、基底状態の縮退度は IR と一致する。この場合、 G_{UV} を保ちながら低エネルギーに RG flow すると、foliated / exotic BF 理論に flow すると考えられる。このとき、 \mathbb{Z}_N electric 対称性が現れるが、この対称性を壊すような局所演算子は存在しないので、 G_{IR} は robust である。

また、この G_{UV} で不変となるような局所演算子は存在しないため、理論は普遍性を持つ。一方で、UV の理論が \mathbb{Z}_N テンソルゲージ理論 ($K \neq 0$ かつ $\tilde{h} \neq 0$ は十分小さい) である場合は、対称性 G_{UV} は \mathbb{Z}_N electric 対称性のみである。 $K = 0$ では、基底状態は唯一であり、自明な理論に flow すると考えられる。 $\tilde{h} = 0$ では基底状態の縮退度は foliated / exotic BF 理論と一致するため、IR ではこの理論に flow すると考えられる。しかしながら IR の理論では、 G_{UV} 不変であり、 \mathbb{Z}_N dipole 対称性の電荷を持つ演算子である $e^{iq\phi^{12}}$ を持つ。したがって、UV の理論を摂動させた場合、IR の \mathbb{Z}_N dipole 対称性は壊れ、基底状態の縮退も解ける。よって、このような flow は fine-tuning によるものであり、 G_{IR} は robust ではない。

第 5 章

3+1 次元のフラクトン系の BF 理論

この章では、 $2+1$ 次元の場合と同様に、 $3+1$ 次元におけるフラクトン系の BF 理論である foliated BF 理論と exotic BF 理論を考える。これらはどちらも \mathbb{Z}_N 格子テンソルゲージ理論 [18] 及び \mathbb{Z}_N X-cube 模型 [7] の低エネルギー極限の QFT であると考えられており、それらは部分系対称性やフラクトン、ライネオンの励起を持つ。これらの BF 理論は同じ理論を表していると考えられており、実際に後で明示的に場の対応を示す。ほとんどの議論は第 4 章と同様である。

時空は x^0 を Euclid 時間とし、 x^1, x^2, x^3 を空間 3 次元の座標とする。また、時空は周期的である、つまり 4 次元トーラスであるとする。各方向の長さは l^0, l^1, l^2, l^3 であるとする。格子模型は正方格子で考えるが、低エネルギー極限である連続場の QFT でも格子模型の空間の 90 度の回転対称性 S_4 がそのまま残り、連続的に回転対称な理論とはならない。これは部分系対称性を持つ理論に特有の性質である。また、時空は連続的であるのに対し、ゲージ場やゲージパラメーターは離散的な配位が重要な役割を持つ。

5.1 格子模型

この節では、低エネルギー極限で後の節で議論する $3+1$ 次元のフラクトン系の BF 理論となると考えられている格子模型である、 \mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論と \mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論 [18] をレビューする。また、これらの係数の適切な極限をとった \mathbb{Z}_N X-cube 模型も見るとする。ここでの議論はすべて [18] による。以下では、立方格子は格子定数を a とし、 x^1 方向に $L^1 = l^1/a$ 個、 x^2 方向に $L^2 = l^2/a$ 個、 x^3 方向に $L^3 = l^3/a$ 個あり、 $\hat{x}^k = x^k/a$ とする。

5.1.1 \mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論

\mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論では、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して (x^i, x^j) 平面上の 4 点 $(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k), (\hat{x}^i + 1, \hat{x}^j, \hat{x}^k), (\hat{x}^i, \hat{x}^j + 1, \hat{x}^k), (\hat{x}^i + 1, \hat{x}^j + 1, \hat{x}^k)$ で囲まれたブ

ラケットに \mathbb{Z}_N 位相のゲージ場 $U_{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)$ があるとする。 ${}^*1U_{ij}$ の正準運動量を V_{ij} とし、同プラケット上で $U_{ij}V_{ij} = e^{2\pi i/N}V_{ij}U_{ij}$ を満たすとする（他は交換する）。また、各サイト上にゲージパラメーター $\eta(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ があり、 U_{ij} はゲージ変換

$$U_{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k) \rightarrow U_{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)\eta(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)\eta(\hat{x}^i + 1, \hat{x}^j, \hat{x}^k)^{-1}\eta(\hat{x}^i + 1, \hat{x}^j + 1, \hat{x}^k)\eta(\hat{x}^i, \hat{x}^j + 1, \hat{x}^k)^{-1} \quad (5.1.1)$$

を持つとする。A 格子テンソルゲージ理論の Hamiltonian は

$$H = -\frac{1}{g_e^2} \sum_{\text{plaquettes}} V - \frac{1}{g_m^2} \sum_{\text{cubes}} (L_{[12]3} + L_{[23]1} + L_{[31]2}) + \text{h.c.} \quad (5.1.2)$$

ここで、

$$L_{[12]3} = U_{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1}U_{23}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)U_{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)U_{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3)^{-1}, \quad (5.1.3a)$$

$$L_{[23]1} = U_{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1}U_{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3)U_{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)U_{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 + 1)^{-1}, \quad (5.1.3b)$$

$$L_{[31]2} = U_{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1}U_{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 + 1)U_{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)U_{23}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1} \quad (5.1.3c)$$

である（図 5.1）。また、Gauss 則

$$G(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) = \prod_{p \ni (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)} V^{\epsilon_p} = 1 \quad (5.1.4)$$

を満たすとする。ここで、 ϵ_p は、適切な符号 ± 1 である。これらの量の指数の ± 1 は図 5.2 のようにする。このとき、以下の保存電荷が存在する：

$$L_1(\hat{x}^2, \hat{x}^3) = \prod_{\hat{x}^1=1}^{L^1} V_{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3), \quad (5.1.5a)$$

$$L_2(\hat{x}^3, \hat{x}^1) = \prod_{\hat{x}^2=1}^{L^2} V_{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3), \quad (5.1.5b)$$

$$L_3(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \prod_{\hat{x}^3=1}^{L^3} V_{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3). \quad (5.1.5c)$$

この対称性は部分系対称性であり、 \mathbb{Z}_N tensor 対称性と呼ぶ。これらは Gauss 則 (5.1.4) から、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して、 $L_i(\hat{x}^j, \hat{x}^k)$ は \hat{x}^j の関数と \hat{x}^k の関数の積に分解されることがわかる。また、 (x^i, x^j) 平面のリンク上の閉折れ線 C_1^{ij} 上の x^k 方向のプラケット U_{ki} 、 U_{jk} を適切な符号で積を取ったゲージ不変な演算子 $W_k(C_1^{ij})$ も存在する。^{*2}この演算子は \mathbb{Z}_N dipole 対称性を生成するが、A 格子テンソルゲージ理論にはこの対称性は存在しない。

^{*1} 時間方向のリンク上にゲージ場 U_0 もあるが、簡単のためこれを 1 とするゲージをとることにする。

^{*2} 適切な符号とは、 G と交換するような符号（指数の ± 1 ）である。

Gauss 則 (5.1.4) を課す代わりに、以下のように Hamiltonian に項を追加して、基底状態は Gauss 則を満たすようにすることができる：

$$H = -\frac{1}{g_e^2} \sum_{\text{plaquettes}} V - \frac{1}{g^2} \sum_{\text{sites}} G - \frac{1}{g_m^2} \sum_{\text{cubes}} (L_{[12]3} + L_{[23]1} + L_{[31]2}) + \text{h.c.} \quad (5.1.6)$$

この場合、 $L_i(\hat{x}^j, \hat{x}^k)$ は \hat{x}^j の関数と \hat{x}^k の関数の積に分解されない。また、 $g_e \rightarrow \infty$ で、 \mathbb{Z}_N dipole 対称性が現れ、後述する \mathbb{Z}_N X-cube 模型となる。

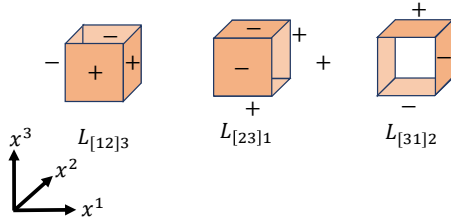


図 5.1 $L_{[ij]k}$ の項. 各プラケットは U_{ij} を表し、符号は指数を表す。

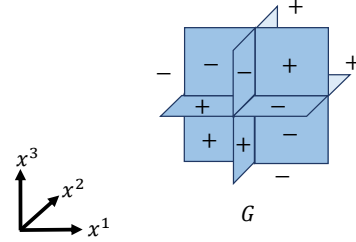


図 5.2 G の項. 各プラケットは V_{ij} を表し、符号は指数を表す。

5.1.2 \mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論

\mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論では、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して 2 点 $(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)$, $(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k + 1)$ を結ぶ x^k 方向のリンク上に \mathbb{Z}_N 位相のゲージ場 $\hat{U}^{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)$ があるとす。^{*3} \hat{U}^{ij} の正準運動量を \hat{V}^{ij} とし、同プラケット上で $\hat{U}^{ij}\hat{V}^{ij} = e^{2\pi i/N}\hat{V}^{ij}\hat{U}^{ij}$ を満たすとす (他は交換する)。また、各サイト上に、 $\hat{\eta}^{1(23)}\hat{\eta}^{2(31)}\hat{\eta}^{3(12)} = 1$ を満たすゲージパラメーター $\hat{\eta}^{i(jk)}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ があり、 \hat{U}^{ij} はゲージ変換

$$\hat{U}^{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k) \rightarrow \hat{U}^{ij}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)\hat{\eta}^{k(ij)}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)\hat{\eta}^{k(ij)}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k + 1)^{-1} \quad (5.1.7)$$

を持つとする。 \hat{A} 格子テンソルゲージ理論の Hamiltonian は

$$H = -\frac{1}{\hat{g}_e^2} \sum_{\text{links}} \hat{V} - \frac{1}{\hat{g}_m^2} \sum_{\text{cubes}} \hat{L} + \text{h.c.} \quad (5.1.8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{L}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) &= \hat{U}^{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)\hat{U}^{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3)^{-1}\hat{U}^{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)\hat{U}^{31}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1} \\ &\hat{U}^{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 + 1)^{-1}\hat{U}^{23}(\hat{x}^1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3 + 1)\hat{U}^{31}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 + 1)^{-1}\hat{U}^{31}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 + 1) \\ &\hat{U}^{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)\hat{U}^{12}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)^{-1}\hat{U}^{12}(\hat{x}^1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3)^{-1}\hat{U}^{12}(\hat{x}^1 + 1, \hat{x}^2 + 1, \hat{x}^3) \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

^{*3} 時間方向のリンク上にゲージ場 $\hat{U}_0^{i(jk)}$ もあるが、簡単のためこれを 1 とするゲージをとることにす。

であり、図 5.3 のような立方体の辺の積である。また、Gauss 則

$$\begin{aligned} \hat{G}^{[ij]k}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k) &= \hat{V}^{jk}(\hat{x}^i - 1, \hat{x}^j, \hat{x}^k)^{-1} \hat{V}^{jk}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k) \hat{V}^{ki}(\hat{x}^i, \hat{x}^j - 1, \hat{x}^k) \hat{V}^{ki}(\hat{x}^i, \hat{x}^j, \hat{x}^k)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

を満たすとする (図 5.4)。このとき、以下の保存電荷が存在する：

$$\hat{W}_k(C_1^{ij}) = \prod_{C_1^{ij}} \hat{V}. \quad (5.1.11)$$

ここで、 C_1^{ij} は (x^i, x^j) 平面の双対格子のリンク上の閉折れ線であり、積は C_1^{ij} と交わるリンク上の \hat{V}^{jk} , \hat{V}^{ki} の適切な符号の積である。^{*4}この対称性は部分系対称性であり、 \mathbb{Z}_N dipole 対称性である。Gauss 則 (5.1.10) から、 C_1^{ij} が (x^i, x^j) 平面上で自由に変形できることがわかる。また、 x^k 方向の直線上のゲージ不変な演算子 $\hat{L}_k(\hat{x}^i, \hat{x}^j) = \prod_{\hat{x}^k=1}^{L^k} \hat{U}^{ij}$ も存在する。この演算子は \mathbb{Z}_N tensor 対称性を生成するが、 \hat{A} 格子テンソルゲージ理論にはこの対称性は存在しない。

Gauss 則 (5.1.10) を課す代わりに、以下のように Hamiltonian に項を追加して、基底状態は Gauss 則を満たすようにすることができる：

$$H = -\frac{1}{\hat{g}_e^2} \sum_{\text{links}} \hat{V} - \frac{1}{\hat{g}_m^2} \sum_{\text{cubes}} \hat{L} - \frac{1}{\hat{g}^2} \sum_{\text{sites}} (\hat{G}^{[12]3} + \hat{G}^{[23]1} + \hat{G}^{[31]2}) + \text{h.c.} \quad (5.1.12)$$

この場合、 $\hat{W}_k(C_1^{ij})$ の C_1^{ij} は自由に変形できない。 $\hat{g}_e \rightarrow \infty$ で、 \mathbb{Z}_N tensor 対称性が現れ、後述する \mathbb{Z}_N X-cube 模型となる。

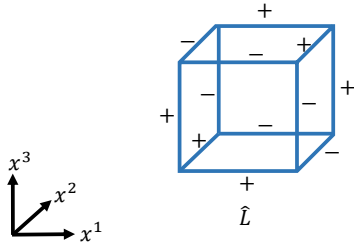


図 5.3 \hat{L} の項。各リンクは \hat{U}^{ij} を表し、符号は指数を表す。

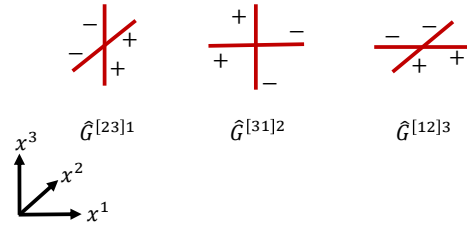


図 5.4 $\hat{G}^{[ij]k}$ の項。各リンクは \hat{V}^{ij} を表し、符号は指数を表す。

^{*4} 適切な符号とは、 \hat{L} と交換するような符号 (指数の ± 1) である。

5.1.3 \mathbb{Z}_N X-cube 模型

\mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論で $g_e \rightarrow \infty$ を取った

$$H = -\frac{1}{g^2} \sum_{\text{sites}} G - \frac{1}{g_m^2} \sum_{\text{cubes}} (L_{[12]3} + L_{[23]1} + L_{[31]2}) + \text{h.c.}, \quad (5.1.13)$$

及び \mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論で $\hat{g}_e \rightarrow \infty$ を取った

$$H = -\frac{1}{\hat{g}_m^2} \sum_{\text{cubes}} \hat{L} - \frac{1}{\hat{g}^2} \sum_{\text{sites}} (\hat{G}^{[12]3} + \hat{G}^{[23]1} + \hat{G}^{[31]2}) + \text{h.c.} \quad (5.1.14)$$

は, \mathbb{Z}_N X-cube 模型である. これらは $g = \hat{g}_m, g_m = \hat{g}$ とし, $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対して, U_{ij} (のゲージ同値類) と U_{ij} のブラケットを貫く双対格子の x^k 方向のリンク上の V^{ij} , 及び V_{ij} と V_{ij} のブラケットを貫く双対格子の x^k 方向のリンク上の U^{ij} (のゲージ同値類) を同一視することで同じ模型であることがわかる. X-cube 模型は tensor 対称性と dipole 対称性の 2 つの部分系対称性を持つが, これらは格子テンソルゲージ理論と異なり, $L_i(\hat{x}^j, \hat{x}^k)$ は \hat{x}^j の関数と \hat{x}^k の関数の積に分解されず, $\hat{W}_k(C_1^{ij})$ の C_1^{ij} は自由に変形できない. そこで, これらの対称性は unconstrained tensor 対称性及び unconstrained dipole 対称性と呼ばれる. この模型は解くことができ, \mathbb{Z}_2 の場合と同様にすることで, フラクトンとライネオンの励起が存在し, 基底状態の縮退度は $N^{2L^1+2L^2+2L^3-3}$ であることがわかる. この場合, 励起は \mathbb{Z}_N の電荷を持つことに注意されたい.

5.2 Foliated QFT

この節では $3+1$ 次元における foliated BF 理論 [23–25] をレビューする.

5.2.1 Foliated ゲージ場

Foliation は平坦であるとする. $3+1$ 次元の foliated BF 理論では, $1+1$ 形式の foliated A ゲージ場 \tilde{A}^k はほとんど $2+1$ 次元の場合と同じである. 一方, foliated B ゲージ場 B^k は 1 形式であり, x^k 方向に 0 形式のステップ関数の不連続性を持つ. ゲージ変換は,

$$B^k \rightarrow B^k + d\lambda^k + \tilde{\beta}^k - \mu \quad (5.2.1)$$

である. ここで λ^k は 0 形式, $\tilde{\beta}^k$ は $\tilde{\beta}^k \wedge e^k = 0$ を満たす $0+1$ 形式のゲージパラメーターである. μ は, バルクの 2 形式ゲージ場 b の 1 形式ゲージパラメーターである. ゲージパラメーター λ^k は, それ自身ゲージ変換 $\lambda^k \rightarrow \lambda^k + 2\pi m^k + \nu$ を持つ. ここで, m^k は x^k のみに依存する整数値関数. また, ゲージパラメーター β^k もゲージ変換 $\beta^k \rightarrow \beta^k + 2\pi d m^k$ を持つ. さらに, μ もゲージ変換 $\mu \rightarrow \mu + d\nu$ を持つ. ここで, ν は 0 形式ゲージパラメーター. λ^k, m^k

は x^k 方向に 0 形式ステップ関数の不連続性を持つことができる。 $\tilde{\beta}^k$ は x^k 方向に 1 形式デルタ関数の発散を持つことができるが、このゲージパラメーターによって B^k 及び $d\lambda^k$ の x^k 成分はゲージ自由度である。^{*5}表 5.1 に 1 形式の foliated B ゲージ場とそのゲージパラメーターをまとめた。

ゲージ場とパラメーター	条件	ゲージ変換	発散と不連続性
1 形式 B^k		$B^k \rightarrow B^k + d\lambda^k + \tilde{\beta}^k - \mu$	0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$
0 形式 λ^k		$\lambda^k \rightarrow \lambda^k + 2\pi m^k + \nu$	0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$
0 + 1 形式 $\tilde{\beta}^k$	$\tilde{\beta}^k \wedge e^k = 0$	$\tilde{\beta}^k \rightarrow \tilde{\beta}^k - 2\pi d m^k$	1 形式デルタ関数 $\delta(x^k - x_0^k) dx^k$
1 形式 μ		$\mu \rightarrow \mu + d\nu$	0 形式ステップ関数
x^k のみに依存する 整数値関数 $m^k \in \mathbb{Z}$			0 形式ステップ関数 $\theta(x^k - x_0^k)$

表 5.1 1 形式 foliated B ゲージ場とそのゲージパラメーター。

5.2.2 3+1 次元の foliated BF Lagrangian

Foliated Lagrangian は 2 + 1 次元での Lagrangian(4.2.4) とほとんど同じ形であるが、foliation は $k = 1, 2, 3$ 方向となっており、 B^k は上で見た 1 形式の foliated B ゲージ場、 b はバルクの 2 形式のゲージ場である。Foliated BF Lagrangian は、

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^3 \frac{iN}{2\pi} (dB^k + b) \wedge A^k \wedge dx^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da \quad (5.2.2)$$

である。このとき、foliation は平坦で x^1 方向、 x^2 方向、 x^3 方向に実行されているので、それぞれと直交する平面で空間が分割されており、各平面上に 2 + 1 次元の BF 理論があると考え

^{*5} したがって、 B^k は実質的に 3 成分であり、2 + 1 次元での 1 形式と成分の数が一致する。また、4.2.2 節の脚注と同様に、 A^k は実質的に 3 成分である。

られる。

運動方程式は

$$\frac{N}{2\pi}(dB^k + b) \wedge dx^k = 0, \quad (5.2.3a)$$

$$\frac{N}{2\pi}db = 0, \quad (5.2.3b)$$

$$\frac{N}{2\pi}dA^k \wedge dx^k = 0, \quad (5.2.3c)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{N}{2\pi}A^k \wedge dx^k + \frac{N}{2\pi}da = 0 \quad (5.2.3d)$$

である。

ゲージ変換は以下のようになる：

$$A^k \wedge dx^k \rightarrow A^k \wedge dx^k + d\zeta^k \wedge dx^k, \quad (5.2.4a)$$

$$B^k \rightarrow B^k + d\lambda^k + \beta^k dx^k - \mu, \quad (5.2.4b)$$

$$a \rightarrow a + d\lambda - \sum_{k=1}^3 \zeta^k dx^k, \quad (5.2.4c)$$

$$b \rightarrow b + d\mu. \quad (5.2.4d)$$

ここで、 ζ^k , λ^k , $\beta^k dx^k = \tilde{\beta}^k$ は 4.2.1 節及び 5.2.1 節で説明した foliated ゲージ場のゲージパラメーターであり、 λ と μ はそれぞれバルクのゲージ場の 0 形式、1 形式のゲージパラメーターである。 λ はそれ自身のゲージ変換 $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2 + 2\pi\xi^3$ を持つ。ここで、 ξ^k は 4.2.1 節で説明した $\zeta^k dx^k$ のゲージ変換のパラメーターであり、 x^k のみに依存する整数値関数である。 ξ^k はさらに定数モードの自由度があり、それにより λ は $U(1)$ 値の関数とみなすことができる。また、バルクのゲージパラメーター μ もゲージ変換 $\mu \rightarrow \mu + d\nu$ を持つ。ここで、 ν は 0 形式のゲージパラメーターである。これらのゲージパラメーターのゲージ変換のもとでは、1 つ上のゲージ変換は不変になっている。2+1 次元の場合と同様に、運動方程式とゲージ変換によってバルクのゲージ場 a , b 及びそのゲージパラメーターも発散と不連続性を持つことができることが示唆される。

特定の場の配位を考え、それを積分することによって以下の量が量子化されることを示すこ

とができる：

$$\oint_{C_1^0} a \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.2.5a)$$

$$\oint_{S_2^k} A^k \wedge dx^k \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.2.5b)$$

$$\oint_{S_2} b \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.2.5c)$$

$$\oint_{C_1^q} \sum_{k=1}^3 q_k B^k \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}. \quad (5.2.5d)$$

ここで、 C_1^0 は時間 x^0 方向に伸びた 1 次元の閉曲線（直線）であり、 S_2 は任意の 2 次元の閉曲面である。また、 S_2^k は x^k 方向に決まった幅を持ったそれ以外の方向に伸びる 2 次元の帯である（例えば S_2^1 は閉区間 $[x_1^1, x_2^1]$ と (x^0, x^2, x^3) 空間上の閉曲線 C_1^{023} の直積で書ける）。電荷 q_k は $\sum_{k=1}^3 q_k = 0$ を満たす整数であり、 C_1^q は q_k が 0 でない foliation k の leaf の交叉上の 1 次元閉曲線である。例えば、 $(q_k)_k = (1, -1, 0)$ の場合は、 $k = 1$ と $k = 2$ の leaf の交叉は x^3 方向の直線であるので、時間方向も含めて (x^0, x^3) 平面上の曲線となる。

5.2.3 ゲージ不変演算子

ゲージ不変演算子を考える。

1 つ目は

$$F^q[C_1^0] = \exp \left[iq \oint_{C_1^0} a \right]. \quad (5.2.6)$$

$F^q[C_1^0]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である。 C_1^0 は空間方向に変形できない時間方向の直線であるので、この演算子はフラクトンを表す。

2 つ目は

$$L[C_1^q] = \exp \left[i \oint_{C_1^q} \sum_{k=1}^3 q_k B^k \right] \quad (5.2.7)$$

である。ここで $q = (q_k)_k$ は、成分が $\sum_{k=1}^3 q_k = 0$ を満たす整数である電荷ベクトルである。 C_1^q は前節で説明したように、 $q_k \neq 0$ である foliation k の leaf 1 つずつの交叉上の閉曲線である。(5.2.5d) から、 $L[C_1^{(Nq)}] = 1$ がわかる。任意の電荷ベクトルは、 $q^1 = (0, 1, -1)$ と $q^2 = (-1, 0, 1)$ によって展開される。 $q^3 = -q^1 - q^2 = (1, -1, 0)$ と定義すると、これらに対

応する演算子は,

$$L_1^q[C_1^{01}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{01}} (B^2 - B^3) \right], \quad (5.2.8a)$$

$$L_2^q[C_1^{02}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{02}} (B^3 - B^1) \right], \quad (5.2.8b)$$

$$L_3^q[C_1^{03}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{03}} (B^1 - B^2) \right]. \quad (5.2.8c)$$

ここで, C_1^{0k} は (x^0, x^k) 平面上の 1 次元の閉曲線である. これらの曲線上の演算子は, 空間の中の x^k 方向のみに動くことができる励起を表すため, $L_k^q[C_1^{0k}]$ は x^k -ライネオンを表す. 任意の $L[C_1^q]$ は, これらのライネオンの演算子の積で表すことができる. また, $L_k^q[C_1^{0k}]$ も \mathbb{Z}_N 演算子である. C_1^{0k} が空間の中にある場合 (C_1^k と書く), これらの演算子 $L_k^q[C_1^k]$ は, 部分系対称性である \mathbb{Z}_N テンソル大域的対称性を生成する対称性演算子である. また, 運動方程式 (5.2.3a), (5.2.3b) を用いることで,

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_3 \oint_{C_1^1} (B_1^2 - B_1^3) dx^1 &= \oint_{C_1^1} \{ \partial_2 (\partial_1 B_3^2 - b_{31}) - \partial_3 (\partial_1 B_2^3 + b_{12}) \} dx^1 \\ &= \oint_{C_1^1} \{ \partial_2 \partial_1 B_3^2 - \partial_3 \partial_1 B_2^3 + \partial_1 b_{23} \} dx^1 \\ &= - \oint_{C_1^1} \{ \partial_1 \partial_2 (B_3^1 - B_3^2) + \partial_3 \partial_1 (B_2^3 - B_2^1) \} dx^1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

となり, $L_1^q[C_1^1]$ は x^2 の関数と x^3 の関数の積の演算子に分解できる.*⁶ $L_2^q[C_1^2]$ と $L_3^q[C_1^3]$ についても同様の分解が成り立つ.

3 つ目は

$$W_k^q[S_2^k] = \exp \left[iq \oint_{S_2^k} A^k \wedge dx^k \right], \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.2.10)$$

である. 同様に帯演算子 $W_k^q[S_2^k]$ は \mathbb{Z}_N 演算子である. これらは, x^k 方向に離れたフラクトンの双極子を表す. 3 次元空間では, x^k 方向のフラクトンの双極子はプラノンのように x^k 方向以外の平面上を動くことができる. S_2^k が空間の中にある場合, これらの演算子は部分系対称性である \mathbb{Z}_N dipole 大域的対称性を生成する対称性演算子となる.

これらの 2 つのタイプの対称性演算子は互いにもう一方の演算子の charged object になっ

*⁶ 厳密には, x^1 方向の積分により, $-\partial_2 \partial_3 (\lambda^1 - \lambda^2) - \partial_3 \partial_2 (\lambda^3 - \lambda^1) = \partial_2 \partial_3 (\lambda^2 - \lambda^3)$ という形の変換関数が現れる. したがって, 演算子の指数部分の積分は変換関数を用いて, $\oint_{C_1^1} (B_1^2 - B_1^3) dx^1 - (\lambda^2 - \lambda^3)$ と補正する必要がある. このような補正が必要な場面は多くあるが, 実際には演算子の定義にはこのような補正が常にかかっているとし, 上のような満たすべき関係式を満たしているとする.

ている。つまり、 $L^p[C_1^k]$ と $W_k^q[S_2^k]$ は同時刻において以下の交換関係を満たす：

$$L_2^p[C_1^2] W_1^q[S_2^1] = e^{2\pi i p q I(C_1^2, S_2^1)/N} W_1^q[S_2^1] L_2^p[C_1^2], \quad \text{if } x_1^1 < x^1 < x_2^1, \quad (5.2.11a)$$

$$L_3^p[C_1^3] W_1^q[S_2^1] = e^{2\pi i p q I(C_1^3, S_2^1)/N} W_1^q[S_2^1] L_3^p[C_1^3], \quad \text{if } x_1^1 < x^1 < x_2^1. \quad (5.2.11b)$$

ここで、 $S_2^1 = [x_1^1, x_2^1] \times C_1^{23}$ 、 I は 2 つの多様体の交叉数である。^{*7}同様の関係式が他の方向についても成り立つ。

4 つ目は

$$K_{12}^q[C_1^{03} \times C_1^{12}] = \exp \left[i q \oint_{C_1^{03} \times C_1^{12}} (A^1 \wedge dx^1 + A^2 \wedge dx^2) \right] \quad (5.2.12)$$

である。ここで、 C_1^{12} は、 (x_1^1, x_1^2) と (x_2^1, x_2^2) をつなぐ (x^1, x^2) 平面上の 1 次元曲線である。 K_{12}^q もフラク톤の双極子を表すが、 (x_1^1, x_1^2, x^3) と (x_2^1, x_2^2, x^3) にあるフラク톤の双極子であり、 x^3 -ライネオンのように x^3 方向にのみ動くことができるものである。Stokes の定理と運動方程式 (5.2.3c) を使うことによって、空間に他の演算子がない場合は、 C_1^{12} は $[x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\} + \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]$ に変形することができ、この場合は K_{12}^q は

$$\begin{aligned} K_{12}^q[C_1^{03} \times C_1^{12}] &= \exp \left[i q \oint_{C_1^{03} \times [x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\}} A^1 \wedge dx^1 \right] \\ &\quad \times \exp \left[i q \oint_{C_1^{03} \times \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]} A^2 \wedge dx^2 \right] \\ &= W_1^q [C_1^{03} \times [x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\}] W_2^q [C_1^{03} \times \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]] \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

と書ける。同様に、帯演算子 K_{23}^q と K_{31}^q も定義される。

これらに加えて、バルクのゲージ場 b のゲージ不変演算子

$$T^q[S_2] = \exp \left[i q \oint_{S_2} b \right]. \quad (5.2.14)$$

も存在する。(5.2.5c) から、この b 演算子も \mathbb{Z}_N 演算子である。この演算子は、フラク톤の演算子 (5.2.6) に対して以下のように作用する：

$$T^p[S_2] \cdot F^q[C_1^0] = e^{-2\pi i p q / N} F^q[C_1^0]. \quad (5.2.15)$$

ただし、 S_2 は C_1^0 を囲んでいるとする。もし S_2 の内部に defect 演算子 F^q がなければ、 b 演算子 $T^q[S_2]$ は自明となるため、この演算子は、time-like 対称性演算子である [43]。 S_2 が直方体 $[x_1^1, x_2^1] \times [x_1^2, x_2^2] \times [x_1^3, x_2^3]$ の表面である $S_2^{123, \text{cube}}$ である場合、運動方程式 (5.2.3a) を用

^{*7} 例えば S_2^1 が $[x_1^1, x_2^1] \times C_1^2$ のように (x^1, x^2) 平面上にあり、その上に $L_2^p[C_1^2]$ がある場合は、これらの交叉数は $I = 0$ とする。

いることで、 T^q の積分の一部を実行でき、

$$\begin{aligned}
T^q[S_2^{123,\text{cube}}] &= \exp \left[iq \oint_{S_2^{123,\text{cube}}} \left\{ -(\partial_1 B_2^3 + \partial_2 B_1^3) dx^1 dx^2 - (\partial_2 B_3^1 + \partial_3 B_2^1) dx^2 dx^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\partial_3 B_1^2 + \partial_1 B_3^2) dx^3 dx^1 \right\} \right] \\
&= \exp \left[-iq \int_{x_1^1}^{x_2^1} \left\{ \Delta_{23}(B_1^2 - B_1^3)(x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3) \right\} dx^1 \right] \\
&\quad \times \exp \left[-iq \int_{x_2^2}^{x_1^2} \left\{ \Delta_{31}(B_2^3 - B_2^1)(x_1^3, x_2^3, x_1^1, x_2^1) \right\} dx^2 \right] \\
&\quad \times \exp \left[-iq \int_{x_1^3}^{x_2^3} \left\{ \Delta_{12}(B_3^1 - B_3^2)(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \right\} dx^3 \right]
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

とかける．この形の演算子を籠演算子と呼ぶが、これは表面が $S_2^{123,\text{cube}}$ であるような直方体の各辺に局在する演算子の積で書けている．また、 S_2 が時間方向に伸びた $S_2^{012,\text{cube}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = C_1^0 \times C_1^{12,\text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ である場合、 b 演算子は

$$\begin{aligned}
T^q[S_2^{012,\text{cube}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)] &= \exp \left[iq \oint_{S_2^{012,\text{cube}}} \left\{ -(\partial_0 B_1^2 + \partial_1 B_0^2) dx^0 dx^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\partial_2 B_0^1 + \partial_0 B_2^1) dx^2 dx^0 \right\} \right] \\
&= \exp \left[-iq \oint_{C_1^0} \Delta_{12}(B_0^1 - B_0^2)(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) dx^0 \right]
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

と書ける．この演算子は、長方形 $C_1^{12,\text{rect}}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ の各頂点に局在する x^3 -ライネオンの四重極子を表し、自明である．同様に x^1 -ライネオンや x^2 -ライネオンの四重極子の演算子も考えることができる．

2 + 1 次元の場合とは異なり、time-like 対称性演算子 T^q は、上のように長方形の頂点にあるライネオンという物理的励起に対応する場合がある．しかしながら、これらは他の演算子で検出することができず、自明となる．*8このような事情は、通常の BF 理論とは異なっている．

5.3 Exotic QFT

この節では、3 + 1 次元の exotic BF 理論 [18] をレビューする．

*8 ライネオンは後で説明するベルト演算子という time-like 対称性によって検出することができるが、ベルト演算子が $S_2^{012,\text{cube}}$ と交叉することなしに、つまりリモートに四重極子 $T^q[S_2^{012,\text{cube}}]$ を検出することはできない．

5.3.1 テンソルゲージ場

3 + 1 次元では、90 度回転は向きを保存する正六面体群を生成する。これは対称群 S_4 と同型である。Exotic BF 理論の各テンソルゲージ場は S_4 の表現であり、 S_4 の既約表現は以下のように記述される（[17, 18] の Appendix を参考にした）：

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &: S, \\
\mathbf{1}' &: T_{(ijk)}, \quad i \neq j \neq k, \\
\mathbf{2} &: B_{[ij]k}, \quad i \neq j \neq k, \quad B_{[ij]k} + B_{[jk]i} + B_{[ki]j} = 0, \\
&\quad B_{i(jk)}, \quad i \neq j \neq k, \quad B_{i(jk)} + B_{j(ki)} + B_{k(ij)} = 0, \\
\mathbf{3} &: V_i, \\
\mathbf{3}' &: E_{ij}, \quad i \neq j, \quad E_{ij} = E_{ji}.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

ここで、 i, j, k は 1 または 2 または 3 であり、添字 $[ij]$ は反対称、 (ij) は対称であるとする。これらの添字は $SO(3)$ の添字であり、自由に上下できる。^{*9} 既約表現 $\mathbf{2}$ の 2 つの基底は

$$B_{i(jk)} = B_{[ij]k} + B_{[ik]j}, \tag{5.3.2a}$$

$$B_{[ij]k} = \frac{1}{3}(B_{i(jk)} + B_{j(ik)}) \tag{5.3.2b}$$

を満たす。

Exotic BF 理論は Lorentz 対称性を持たず、回転対称性は離散的な S_4 の対称性しか持たない。この理論は $U(1)$ テンソルゲージ場である表現 $(\mathbf{1}, \mathbf{3}')$ の (A_0, A_{ij}) と $(\mathbf{2}, \mathbf{3}')$ 表現の $(\hat{A}_0^{i(jk)}, \hat{A}^{ij})$ を持つ。 (A_0, A_{ij}) のゲージ変換は

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha, \tag{5.3.3a}$$

$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} + \partial_i \partial_j \alpha \tag{5.3.3b}$$

である。ここで、 α は表現 $\mathbf{1}$ のゲージパラメーターである。ゲージパラメーター α は、それ自身ゲージ変換 $\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi\tilde{n}^1 + 2\pi\tilde{n}^2 + 2\pi\tilde{n}^3$ を持つ。ここで、 \tilde{n}^k は x^k のみに依存する整数値関数である。 A_{ij} は x^i 及び x^j 方向にデルタ関数の発散を持ち、それ以外の空間方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。一方、 A_0 と α はステップ関数の不連続性を持つことができる。また、ゲージパラメーター \tilde{n}^k は、 x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。ただし、テンソルゲージ場の配位は、トーラスを一回転したときにゲージ自由度を除いて周期的になるものが許される。 (A_0, A_{ij}) のゲージ不変な電場と磁場は

$$E_{ij} = \partial_0 A_{ij} - \partial_i \partial_j A_0, \tag{5.3.4}$$

$$B_{[ij]k} = \partial_i A_{jk} - \partial_j A_{ik} \quad \text{or} \quad B_{k(ij)} = 2\partial_k A_{ij} - \partial_i A_{kj} - \partial_j A_{ki} \tag{5.3.5}$$

^{*9} これらは S_4 の表現として変換が定まっているが、ここでは深くは言及しない。

である。もう一方のテンソルゲージ場 $(\hat{A}_0^{i(jk)}, \hat{A}^{ij})$ のゲージ変換は

$$\hat{A}_0^{i(jk)} \rightarrow \hat{A}_0^{i(jk)} + \partial_0 \hat{\alpha}^{i(jk)}, \quad (5.3.6a)$$

$$\hat{A}^{ij} \rightarrow \hat{A}^{ij} + \partial_k \hat{\alpha}^{k(ij)} \quad (5.3.6b)$$

である。ここで $\hat{\alpha}^{i(jk)}$ は表現 2 のゲージパラメーターである。ゲージパラメーター $\hat{\alpha}^{i(jk)}$ は、それ自身ゲージ変換 $\hat{\alpha}^{i(jk)} \rightarrow \hat{\alpha}^{i(jk)} + 2\pi \tilde{m}^j - 2\pi \tilde{m}^k$ を持つ。ここで、 \tilde{m}^k は x^k のみに依存する整数値関数である。 $\hat{A}_0^{i(jk)}$, \hat{A}^{jk} , $\hat{\alpha}^{i(jk)}$ は、 x^j 及び x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。また、ゲージパラメーター \tilde{m}^k は、 x^k 方向にステップ関数の不連続性を持つことができる。 $(\hat{A}_0^{i(jk)}, \hat{A}^{ij})$ のゲージ不変な電場と磁場は

$$\hat{E}^{ij} = \partial_0 \hat{A}^{ij} - \partial_k \hat{A}_0^{k(ij)}, \quad (5.3.7)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j \hat{A}^{ij} \quad (5.3.8)$$

である。テンソルゲージ場の発散と不連続性は表 5.2 にまとめた。ここで、 \tilde{f}_0^k , \tilde{f}_{ij}^k , \tilde{g}^k , $\tilde{h}_0^{i(jk),l}$, $\tilde{h}^{ij,l}$, $\tilde{s}^{i(jk),l}$ は適切な周期性を持つ連続関数である。^{*10}

5.3.2 3+1 次元の exotic BF Lagrangian

Exotic BF 理論の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_e = \frac{iN}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \hat{E}^{ij} + A_0 \hat{B} \right) \quad (5.3.9)$$

である。ここで、添字の対称性より $\sum_{i,j} A_{ij} \hat{E}^{ij} = 2(A_{12} \hat{E}^{12} + A_{23} \hat{E}^{23} + A_{31} \hat{E}^{31})$ である。部分積分し、 $\sum_{i,j,k} (\partial_i A_{jk} + \partial_j A_{ki} + \partial_k A_{ij}) \hat{A}_0^{k(ij)} = \sum_{i,j,k} \partial_i A_{jk} (\hat{A}_0^{k(ij)} + \hat{A}_0^{i(jk)} + \hat{A}_0^{j(ki)}) = 0$ 及び (5.3.2a) を用いることで、Lagrangian は

$$\mathcal{L}_e = \frac{iN}{2\pi} \left(\frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \hat{A}_0^{k(ij)} B_{k(ij)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \hat{A}^{ij} E_{ij} \right) \quad (5.3.10)$$

と書ける。

^{*10} 関数 $f(x; x^k)$ の引数は x^k に依存しないことを表す。

ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換	発散と不連続性を持つ項
A_0	$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha$	$\sum_{k=1}^3 \tilde{f}_0^k(x; \hat{x}^k) \theta(x^k - x_0^k)$
A_{ij}	$A_{ij} \rightarrow A_{ij} + \partial_i \partial_j \alpha$	$\tilde{f}_{ij}^i(x; \hat{x}^i) \delta(x^i - x_0^i) + \tilde{f}_{ij}^j(x; \hat{x}^j) \delta(x^j - x_0^j)$ $+ \tilde{f}_{ij}^k(x; \hat{x}^k) \theta(x^j - x_0^j) \quad (k \neq 0, i, j)$
α	$\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi \tilde{n}^1 + 2\pi \tilde{n}^2 + 2\pi \tilde{n}^3$	$\sum_{k=1}^3 \tilde{g}^k(x; \hat{x}^k) \theta(x^k - x_0^k)$
$\hat{A}_0^{i(jk)}$	$\hat{A}_0^{i(jk)} \rightarrow \hat{A}_0^{i(jk)} + \partial_0 \hat{\alpha}^{i(jk)}$	$\tilde{h}_0^{i(jk),j}(x; \hat{x}^j) \theta(x^j - x_0^j)$ $+ \tilde{h}_0^{i(jk),k}(x; \hat{x}^k) \theta(x^k - x_0^k)$
\hat{A}^{ij}	$\hat{A}^{ij} \rightarrow \hat{A}^{ij} + \partial_k \hat{\alpha}^{k(ij)}$	$\tilde{h}^{ij,i}(x; \hat{x}^i) \theta(x^i - x_0^i) + \tilde{h}^{ij,j}(x; \hat{x}^j) \theta(x^j - x_0^j)$
$\hat{\alpha}^{i(jk)}$	$\hat{\alpha}^{i(jk)} \rightarrow \hat{\alpha}^{i(jk)} + 2\pi \tilde{m}^j - 2\pi \tilde{m}^k$	$\tilde{s}^{i(jk),j}(x; \hat{x}^j) \theta(x^j - x_0^j)$ $+ \tilde{s}^{i(jk),k}(x; \hat{x}^k) \theta(x^k - x_0^k)$

表 5.2 テンソルゲージ場とそのゲージパラメーターの発散と不連続性.

運動方程式は

$$\frac{N}{2\pi} E_{ij} = 0, \quad (5.3.11a)$$

$$\frac{N}{2\pi} B_{k(ij)} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{N}{2\pi} B_{[ij]k} = 0, \quad (5.3.11b)$$

$$\frac{N}{2\pi} \hat{E}^{ij} = 0, \quad (5.3.11c)$$

$$\frac{N}{2\pi} \hat{B} = 0 \quad (5.3.11d)$$

である.

特定の場の配位を考え、積分することによって以下の量が量子化されることが示せる：

$$\oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.3.12a)$$

$$\oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12} + dx^3 dx^1 A_{31}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.3.12b)$$

$$\oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12} + dx^3 dx^2 A_{23}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.3.12c)$$

$$\oint_{S_2^3} (dx^0 dx^3 \partial_3 A_0 + dx^1 dx^3 A_{31} + dx^2 dx^3 A_{23}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}, \quad (5.3.12d)$$

$$\oint_{C_1^{0k}} (dx^0 \hat{A}_0^{k(ij)} + dx^k \hat{A}^{ij}) \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}. \quad (5.3.12e)$$

ここで、前節と同様に C_1^0 は時間 x^0 方向に伸びた 1 次元の閉曲線（直線）、 S_2^k は x^k 方向に決まった幅を持ち、他の方向に伸びた 2 次元の帯、 C_1^{01} は (x^0, x^k) 平面上の 1 次元閉曲線である。

5.3.3 ゲージ不変演算子

ゲージ不変演算子を考える。

フラク톤の演算子は

$$\tilde{F}^q[C_1^0] = \exp \left[iq \oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \right] \quad (5.3.13)$$

である。Foliated BF 理論と同様に、 C_1^0 を空間方向に変形するとゲージ不変性が破れることがわかる。ライネオンの演算子は

$$\tilde{L}_k^q[C_1^{0k}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{0k}} (dx^0 \hat{A}_0^{k(ij)} + dx^k \hat{A}^{ij}) \right], \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.3.14)$$

である。 C_1^{0k} が x^k 方向に伸びた閉直線の場合は、 \tilde{L}_k^q は \mathbb{Z}_N テンソル大域的対称性を生成する対称性演算子である。また、運動方程式 (5.3.11d) を用いることで、

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_3 \oint_{C_1^1} dx^1 \hat{A}^{23} &= - \oint_{C_1^1} \left\{ \partial_1 \partial_2 \hat{A}^{12} + \partial_3 \partial_1 \hat{A}^{31} \right\} dx^1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

となり、 $\tilde{L}_1^q[C_1^1]$ は x^2 の関数と x^3 の関数の積の演算子に分解できる。^{*11} $\tilde{L}_2^q[C_1^2]$ と $\tilde{L}_3^q[C_1^3]$ に

^{*11} Foliated の場合と同様に、実際には $-\partial_2 \partial_3 \hat{\alpha}^{3(12)} - \partial_3 \partial_2 \hat{\alpha}^{2(31)} = \partial_2 \partial_3 \hat{\alpha}^{1(23)}$ という形の変換関数が現れるため、 $\oint_{C_1^1} dx^1 \hat{A}^{23} - \hat{\alpha}^{1(23)}$ と補正する必要がある。

についても同様の分解が成り立つ。 x^k 方向に離れたフラク톤の双極子を表す帯演算子は

$$\tilde{W}_1^q [S_2^1] = \exp \left[iq \oint_{S_2^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12} + dx^3 dx^1 A_{31}) \right], \quad (5.3.16a)$$

$$\tilde{W}_2^q [S_2^2] = \exp \left[iq \oint_{S_2^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12} + dx^3 dx^2 A_{23}) \right], \quad (5.3.16b)$$

$$\tilde{W}_3^q [S_2^3] = \exp \left[iq \oint_{S_2^3} (dx^0 dx^3 \partial_3 A_0 + dx^1 dx^3 A_{31} + dx^2 dx^3 A_{23}) \right] \quad (5.3.16c)$$

である。 S_2^k が (x^1, x^2, x^3) 空間の中にある場合、 \tilde{W}_k^q は \mathbb{Z}_N dipole 対称性を生成する対称性演算子となる。 2つのタイプの対称性演算子は以下の交換関係を満たす：

$$\tilde{L}_2^p [C_1^2] \tilde{W}_1^q [S_2^1] = e^{2\pi i p q I (C_1^2, S_2^1) / N} \tilde{W}_1^q [S_2^1] \tilde{L}_2^p [C_1^2], \quad \text{if } x_1^1 < x^1 < x_2^1, \quad (5.3.17a)$$

$$\tilde{L}_3^p [C_1^3] \tilde{W}_1^q [S_2^1] = e^{2\pi i p q I (C_1^3, S_2^1) / N} \tilde{W}_1^q [S_2^1] \tilde{L}_3^p [C_1^3], \quad \text{if } x_1^1 < x^1 < x_2^1. \quad (5.3.17b)$$

ここで、 $S_2^1 = [x_1^1, x_2^1] \times C_1^{23}$ 、 I は 2つの多様体の交叉数である。 同様の関係式が他の方向についても成り立つ。 Exotic BF 理論のこれら対称性は、 5.2.2 節で見た foliated BF 理論のものと同一形をしている。

x^3 -ライネオンのように x^3 方向にのみ動くことができる、 (x_1^1, x_1^2, x^3) と (x_2^1, x_2^2, x^3) にあるフラク톤の双極子の演算子は

$$\tilde{K}_{12}^q [C_1^{03} \times C_1^{12}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{03} \times C_1^{12}} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^3 dx^1 A_{31} + dx^3 dx^2 A_{23}) \right] \quad (5.3.18)$$

である。 ここで、 C_1^{12} は、 (x_1^1, x_1^2) と (x_2^1, x_2^2) をつなぐ (x^1, x^2) 平面上の 1次元曲線である。 Stokes の定理と運動方程式 (5.3.11a), (5.3.11b) を用いることで、空間に他の演算子がない場合は、 C_1^{12} は $[x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\} + \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]$ に変形することができ、この場合は \tilde{K}_{12}^q は

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{12}^q [C_1^{03} \times C_1^{12}] &= \exp \left[iq \oint_{C_1^{03} \times [x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\}} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^3 dx^1 A_{31}) \right] \\ &\quad \times \exp \left[iq \oint_{C_1^{03} \times \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^3 dx^2 A_{23}) \right] \quad (5.3.19) \\ &= \tilde{W}_1^q [C_1^{03} \times [x_1^1, x_2^1] \times \{x_1^2\}] \tilde{W}_2^q [C_1^{03} \times \{x_2^2\} \times [x_1^2, x_2^2]] \end{aligned}$$

と書ける。 同様に、 \tilde{K}_{23}^q と \tilde{K}_{31}^q も定義される。

また、 x^3 方向に離れた x^1 -ライネオンの双極子、及び x^2 -ライネオンの双極子に対応する演算子も考えることができる。 これらの双極子は、 (x^1, x^2) 平面上をプラノンのように動くこと

ができる：

$$\tilde{P}_{3,1}^q[S_2^3] = \exp \left[iq \oint_{S_2^3} \left(dx^0 dx^3 \partial_3 \hat{A}_0^{1(23)} + dx^1 dx^3 \partial_3 \hat{A}^{23} - dx^2 dx^3 (\partial_3 \hat{A}^{31} + \partial_2 \hat{A}^{12}) \right) \right], \quad (5.3.20)$$

$$\tilde{P}_{3,2}^q[S_2^3] = \exp \left[iq \oint_{S_2^3} \left(dx^0 dx^3 \partial_3 \hat{A}_0^{2(31)} + dx^2 dx^3 \partial_3 \hat{A}^{31} - dx^1 dx^3 (\partial_3 \hat{A}^{23} + \partial_1 \hat{A}^{12}) \right) \right]. \quad (5.3.21)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{3,1}^q &= \tilde{P}_{3,2}^{-q} \exp \left[-iq \oint_{S_2^3} \left(dx^0 dx^3 \partial_3 \hat{A}_0^{3(12)} + dx^2 dx^3 \partial_2 \hat{A}^{12} + dx^1 dx^3 \partial_1 \hat{A}^{12} \right) \right] \\ &= \tilde{P}_{3,2}^{-q} \tilde{P}_{3,3}^{-q} \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

という関係式を満たす．ここで， $\tilde{P}_{3,3}^q$ は x^3 方向に離れた x^3 -ライネオンの双極子を表すが，これは自明な演算子である．Stokes の定理及び運動方程式 (5.3.11c), (5.3.11d) を用いることで， S_2^3 は，空間に他の演算子がない場合は， $C_1^{01} \times \{x^2\} \times [x_1^3, x_2^3]$ と変形することができ， $\tilde{P}_{3,1}^q[S_2^3]$ は

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{3,1}^q[S_2^3] &= \exp \left[iq \oint_{C_1^{01} \times \{x^2\} \times [x_1^3, x_2^3]} \left(dx^0 dx^3 \partial_3 \hat{A}_0^{1(23)} + dx^1 dx^3 \partial_3 \hat{A}^{23} \right) \right] \\ &= \exp \left[iq \oint_{C_1^{01}(x^2, x_2^3)} \left(dx^0 \hat{A}_0^{1(23)} + dx^1 \hat{A}^{23} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[-iq \oint_{C_1^{01}(x^2, x_1^3)} \left(dx^0 \hat{A}_0^{1(23)} + dx^1 \hat{A}^{23} \right) \right] \\ &= \tilde{L}_1^q [C_1^{01}(x^2, x_2^3)] \tilde{L}_1^{-q} [C_1^{01}(x^2, x_1^3)] \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

と書ける．ここで， $C_1^{01}(x^2, x^3)$ は (x^2, x^3) にある (x^0, x^1) 平面上の閉曲線である．同様に， $(k, i) = (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$ に対して $\tilde{P}_{k,i}^q$ も定義される．

2 + 1 次元の場合と同様に，フラク톤の演算子を検出する time-like 対称性の演算子

$$\begin{aligned} \tilde{T}^q [S_2^{123, \text{cube}}] &= \exp \left[-iq \int_{x_1^1}^{x_2^1} dx^1 \left\{ \Delta_{23} \hat{A}^{23}(x_1^1, x_2^2, x_1^3, x_2^3) \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \left[-iq \int_{x_1^2}^{x_2^2} dx^2 \left\{ \Delta_{31} \hat{A}^{31}(x_1^3, x_2^3, x_1^1, x_2^1) \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \left[-iq \int_{x_1^3}^{x_2^3} dx^3 \left\{ \Delta_{12} \hat{A}^{12}(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

も存在する [43]．この籠演算子は，表面が $S_2^{123, \text{cube}}$ である直方体の各辺に局在している．ま

た、フラクTONの演算子 \tilde{F}^q に対しては

$$\tilde{T}^p \left[S_2^{123, \text{cube}} \right] \cdot \tilde{F}^q [C_1^0] = e^{-2\pi i p q / N} \tilde{F}^q [C_1^0] \quad (5.3.25)$$

のように作用する。ただし、 $S_2^{123, \text{cube}}$ は C_1^0 を囲む。フラクTONの演算子があれば自明となる。

これに加え、この理論はさらにライネオンを検出する time-like 対称性演算子（ベルト演算子）

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{[12]3}^q \left[S_2^{3, \text{belt}} \right] &= \exp \left[i q \int_{x_1^2}^{x_2^2} \int_{x_1^3}^{x_2^3} dx^2 dx^3 (A_{23}(x_2^1) - A_{23}(x_1^1)) \right] \\ &\times \exp \left[-i q \int_{x_1^1}^{x_2^1} \int_{x_1^3}^{x_2^3} dx^1 dx^3 (A_{31}(x_2^2) - A_{31}(x_1^2)) \right] \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

を持つ。ここで、 $S_2^{3, \text{belt}}$ は $C_1^{12, \text{rect}} \times [x_1^3, x_2^3]$ である。同様に、 $\tilde{U}_{[31]2}^q \left[S_2^{2, \text{belt}} \right]$ 及び $\tilde{U}_{[23]1}^q \left[S_2^{1, \text{belt}} \right]$ も定義される。これらはライネオンの演算子に対して以下のように作用する：

$$\tilde{U}_{[12]3}^p \left[S_2^{3, \text{belt}} \right] \cdot \tilde{L}_3^q [C_1^0] = \tilde{L}_3^q [C_1^0], \quad (5.3.27a)$$

$$\tilde{U}_{[31]2}^p \left[S_2^{2, \text{belt}} \right] \cdot \tilde{L}_3^q [C_1^0] = e^{2\pi i p q / N} \tilde{L}_3^q [C_1^0], \quad (5.3.27b)$$

$$\tilde{U}_{[23]1}^p \left[S_2^{1, \text{belt}} \right] \cdot \tilde{L}_3^q [C_1^0] = e^{-2\pi i p q / N} \tilde{L}_3^q [C_1^0]. \quad (5.3.27c)$$

ただし、 $S_2^{k, \text{belt}}$ の和集合である $S_2^{123, \text{cube}}$ は、 C_1^0 を囲んでいるとする。同様の関係式が \tilde{L}_1^q , \tilde{L}_2^q に対しても成り立つ。

これらのゲージ不変演算子はすべて \mathbb{Z}_N 演算子である。

5.4 3+1 次元における対応

2+1 次元の場合と同様に、5.2.2 節で説明した foliated BF 理論と 5.3 節で説明した exotic BF 理論は、foliated 側で平坦な foliation $e^k = dx^k (k = 1, 2, 3)$ で等価であると考えられる。この節では、ゲージ不変演算子を比較することで、ゲージ場とゲージパラメーターの対応を顕わに書き下す。この対応は、発散と不連続性を含めて完全に一致する [1]。

まず、フラクTONの演算子の対応を考える。(5.2.6) で定義された $F^q [C_1^0]$ と (5.3.13) で定義された $\tilde{F}^q [C_1^0]$ を同一視する：

$$\exp \left[i q \oint_{C_1^0} a \right] \simeq \exp \left[i q \oint_{C_1^0} dx^0 A_0 \right]. \quad (5.4.1)$$

この同一視によって、ゲージ場の対応

$$a_0 \simeq A_0 \quad (5.4.2)$$

が得られる。 a_0 と A_0 のゲージ変換は

$$a_0 \rightarrow a_0 + \partial_0 \lambda, \quad (5.4.3a)$$

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha \quad (5.4.3b)$$

であるので、ここからゲージパラメーターの対応

$$\lambda \simeq \alpha \quad (5.4.4)$$

も得られる。さらに、ゲージパラメーター λ と α のゲージ変換

$$\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\xi^1 + 2\pi\xi^2 + 2\pi\xi^3, \quad (5.4.5a)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi\tilde{n}^1 + 2\pi\tilde{n}^2 + 2\pi\tilde{n}^3 \quad (5.4.5b)$$

によって、

$$\xi^k \simeq \tilde{n}^k \quad (5.4.6)$$

を得る。これらの対応のもとで、発散と不連続性も合致していることは容易に確かめることができる。

ここで、運動方程式 (5.2.3d) を成分で書くと

$$\frac{N}{2\pi}(A_0^k + \partial_0 a_k - \partial_k a_0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.4.7a)$$

$$\frac{N}{2\pi}(A_i^k - A_k^i + \partial_i a_k - \partial_k a_i) = 0, \quad (k, i) = (1, 2), (2, 3), (3, 1) \quad (5.4.7b)$$

であるが、これらに対応 (5.4.2) と合わせることによって

$$A_0^k + \partial_0 a_k \simeq \partial_k A_0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.4.8)$$

が示唆される。左辺では、 ζ^k によるゲージ変換が打ち消されていることがわかる。

次に、帯演算子の対応を考える。2 + 1 次元の場合と同様に、修正されたゲージ不変帯演算子 $W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k]$ を

$$W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k] = \exp \left[iq \oint_{S_2^k} (A^k \wedge dx^k + d(a_k dx^k)) \right], \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.4.9)$$

と定義し, $W_{k,\text{mod}}^q[S_2^k]$ と (5.3.16a), (5.3.16b), (5.3.16c) で定義した $\tilde{W}_k^q[S_2^k]$ を同一視する:

$$\exp \left[iq \oint_{S_2^k} (A^k \wedge dx^k + d(a_k dx^k)) \right] \simeq \exp \left[iq \oint_{S_2^k} (dx^0 dx^k \partial_k A_0 + dx^i dx^k A_{ik} + dx^j dx^k A_{jk}) \right],$$

$$(k, i, j) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$
(5.4.10)

この同一視によって, ゲージ場の対応

$$A_i^k + \partial_i a_k \simeq A_{ki}, \quad k \neq i, \quad k, i \in \{1, 2, 3\},$$
(5.4.11)

及び (5.4.8) を得る. 項 $\partial_i a_k$ によって, ゲージパラメーターの対応 (5.4.4) のもとで A_{ki} のゲージ変換と整合していることがわかる. また, ゲージ場の対応 (5.4.8) 及び (5.4.11) を用いることによって, (5.2.12) で定義された演算子 K_{12}^q と (5.3.18) で定義された \tilde{K}_{12}^q が対応することがわかる. 正確には W_k^q と同様に, foliated 側の演算子 K_{12}^q は

$$K_{12,\text{mod}}^q[C_1^{03} \times C_1^{12}] = \exp \left[iq \oint_{C_1^{03} \times C_1^{12}} (A^1 \wedge dx^1 + A^2 \wedge dx^2 + d(a_1 dx^1 + a_2 dx^2)) \right]$$
(5.4.12)

のように修正したものが対応する.

最後に, ライネオンの演算子を考える. (5.2.8a)-(5.2.8c) で定義された $L_k^q[C_{0k}^k]$ と (5.3.14) で定義された $\tilde{L}_k^q[C_1^k 0k]$ を同一視する:

$$\exp \left[iq \oint_{C_1^{0k}} (B^i - B^j) \right] \simeq \exp \left[iq \oint_{C_1^{0k}} (dx^0 \hat{A}_0^{k(ij)} + dx^k \hat{A}^{ij}) \right].$$
(5.4.13)

この同一視によって, ゲージ場の対応

$$B_0^i - B_0^j \simeq \hat{A}_0^{k(ij)}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$$
(5.4.14a)

$$B_k^i - B_k^j \simeq \hat{A}^{ij}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$
(5.4.14b)

を得る. 左辺の μ によるゲージ変換は相殺し, β^k によるゲージ変換は現れない. 両辺の i, j の対称性は一致していないので, $B_0^2 - B_0^1 \simeq -\hat{A}_0^{3(21)}$, $B_3^2 - B_3^1 \simeq -\hat{A}^{21}$ となる. また, これらの対応は場が満たすべき条件 $\hat{A}_0^{1(23)} + \hat{A}_0^{2(31)} + \hat{A}_0^{3(12)} = 0$ を満たす. (5.2.4b), (5.3.6a), (5.3.6b) から, ゲージ変換は

$$B_0^i - B_0^j \rightarrow B_0^i - B_0^j + \partial_0(\lambda^i - \lambda^j),$$
(5.4.15a)

$$B_k^i - B_k^j \rightarrow B_k^i - B_k^j + \partial_k(\lambda^i - \lambda^j),$$
(5.4.15b)

$$\hat{A}_0^{k(ij)} \rightarrow \hat{A}_0^{k(ij)} + \partial_0 \hat{\alpha}^{k(ij)},$$
(5.4.15c)

$$\hat{A}^{ij} \rightarrow \hat{A}^{ij} + \partial_k \hat{\alpha}^{k(ij)}$$
(5.4.15d)

である. ここで, $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$. したがって, ゲージパラメーターの

対応

$$\lambda^i - \lambda^j \simeq \hat{\alpha}^{k(ij)}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (5.4.16)$$

が得られる. さらに, λ^k と $\hat{\alpha}^{k(ij)}$ のゲージ変換

$$\lambda^k \rightarrow \lambda^k + 2\pi m^k + \nu, \quad (5.4.17a)$$

$$\hat{\alpha}^{k(ij)} \rightarrow \hat{\alpha}^{k(ij)} + 2\pi \tilde{m}^i - 2\pi \tilde{m}^j \quad (5.4.17b)$$

によって,

$$m^k \simeq \tilde{m}^k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.4.18a)$$

も得られる. 再びこれらの対応のもとで, 発散や不連続性は一致していることが容易に確かめられる. また, ゲージ場の対応 (5.4.14a), (5.4.14b) を用いることで, (5.3.20) で定義された exotic 側のライネオンの双極子の演算子 $\tilde{P}_{3,1}^q$ は foliated 側で以下の演算子と対応することがわかる:

$$P_{3,1}^q[S_2^3] = \exp \left[iq \oint_{S_2^3} \left\{ dx^0 dx^3 \partial_3 (B_0^2 - B_0^3) + dx^1 dx^3 \partial_3 (B_1^2 - B_1^3) - dx^2 dx^3 (\partial_3 (B_2^3 - B_2^1) + \partial_2 (B_3^1 - B_3^2)) \right\} \right]. \quad (5.4.19)$$

同様に, $(k, i) = (3, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$ に対しても foliated 側の演算子 $P_{k,i}^q$ も得られる.

これらに加えて, time-like 対称性の演算子も対応する. ゲージ場の対応 (5.4.14b) のもとで, (5.2.16) で定義された time-like 対称性の籠演算子 $T^q[S_2^{123,\text{cube}}]$ は, (5.3.24) で定義された籠演算子 $\tilde{T}^q[S_2^{123,\text{cube}}]$ と対応することがわかる. フラクトンの defect 演算子が存在する Hilbert 空間上では, 任意の閉曲面 S_2 上の b 演算子 $T^q[S_2]$ は, defect 演算子がない領域では自明になるので, S_2 で囲まれた defect 演算子を囲む直方体上での演算子 $T^q[S_2^{123,\text{cube}}]$ の積に分解される. また, ゲージ場の対応 (5.4.11) のもとで, (5.3.26) で定義された exotic 側の time-like 対称性のベルト演算子 $\tilde{U}_{[12]3}^q[S_2^{3,\text{belt}}]$ に対応する以下の foliated 側のベルト演算子を見つけることができる:

$$\begin{aligned} & U_{[12]3,\text{mod}}^q \left[S_2^{3,\text{belt}} \right] \\ &= \exp \left[iq \int_{x_1^2}^{x_2^2} \int_{x_1^3}^{x_2^3} (A_2^3(x_2^1) + \partial_2 a_3(x_2^1) - A_2^3(x_1^1) - \partial_2 a_3(x_1^1)) dx^2 \wedge dx^3 \right] \\ &\times \exp \left[-iq \int_{x_1^1}^{x_2^1} \int_{x_1^3}^{x_2^3} (A_1^3(x_2^2) + \partial_1 a_3(x_2^2) - A_1^3(x_1^2) - \partial_1 a_3(x_1^2)) dx^1 \wedge dx^3 \right], \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

または、修正されていない演算子である

$$U_{[12]3}^q \left[S_2^{3,\text{belt}} \right] = \exp \left[iq \int_{x_1^2}^{x_2^2} \int_{x_1^3}^{x_2^3} (A_2^3(x_2^1) - A_2^3(x_1^1)) dx^2 \wedge dx^3 \right] \\ \times \exp \left[-iq \int_{x_1^1}^{x_2^1} \int_{x_1^3}^{x_2^3} (A_1^3(x_2^2) - A_1^3(x_1^2)) dx^1 \wedge dx^3 \right]. \quad (5.4.21)$$

同様に、他の方向のベルト演算子 $U_{[31]2}^q \left[S_2^{2,\text{belt}} \right]$, $U_{[23]1}^q \left[S_2^{1,\text{belt}} \right]$ も見つけることができる。

2 + 1 次元の場合と同様に、foliated 側で b を積分した場合、上のゲージ場の対応のもとでは、Lagrangian(5.2.2) と (5.3.9) は一致する。 b による運動方程式 (5.4.7a), (5.4.7b) を用いると、(5.2.2) は単純にバルクの項が消えて

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^3 \frac{iN}{2\pi} dB^k \wedge A^k \wedge dx^k \quad (5.4.22)$$

となるが、部分積分して場の対応 (5.4.8), (5.4.11) 及び (5.4.14a), (5.4.14b) を用いることで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{iN}{2\pi} \left[B_0^1(\partial_3 A_2^1 - \partial_2 A_3^1) + B_2^1(\partial_0 A_3^1 - \partial_3 A_0^1) + B_3^1(\partial_2 A_0^1 - \partial_0 A_2^1) \right. \\ &\quad + B_0^2(\partial_1 A_3^2 - \partial_3 A_1^2) + B_1^2(\partial_3 A_0^2 - \partial_0 A_3^2) + B_3^2(\partial_0 A_1^2 - \partial_1 A_0^2) \\ &\quad \left. + B_0^3(\partial_2 A_1^3 - \partial_1 A_2^3) + B_1^3(\partial_0 A_2^3 - \partial_2 A_0^3) + B_2^3(\partial_1 A_0^3 - \partial_0 A_1^3) \right] d^4x \\ &\simeq \frac{iN}{2\pi} \left[B_0^1(\partial_3 A_{12} - \partial_2 A_{31}) + B_2^1(\partial_0 A_{31} - \partial_3 \partial_1 A_0) + B_3^1(\partial_2 \partial_1 A_0 - \partial_0 A_{12}) \right. \\ &\quad + B_0^2(\partial_1 A_{23} - \partial_3 A_{12}) + B_1^2(\partial_3 \partial_2 A_0 - \partial_0 A_{23}) + B_3^2(\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0) \\ &\quad \left. + B_0^3(\partial_2 A_{31} - \partial_1 A_{23}) + B_1^3(\partial_0 A_{23} - \partial_2 \partial_3 A_0) + B_2^3(\partial_1 \partial_3 A_0 - \partial_0 A_{31}) \right] d^4x \\ &= \frac{iN}{2\pi} \left[(B_0^1 - B_0^2) \partial_3 A_{12} + (B_0^2 - B_0^3) \partial_1 A_{23} + (B_0^3 - B_0^1) \partial_2 A_{31} \right. \\ &\quad - (B_3^1 - B_3^2) (\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0) - (B_1^2 - B_1^3) (\partial_0 A_{23} - \partial_2 \partial_3 A_0) \\ &\quad \left. - (B_2^3 - B_2^1) (\partial_0 A_{31} - \partial_3 \partial_1 A_0) \right] d^4x \\ &\simeq \frac{iN}{2\pi} \left[\hat{A}_0^{3(12)} \partial_3 A_{12} + \hat{A}_0^{1(23)} \partial_1 A_{23} + \hat{A}_0^{2(31)} \partial_2 A_{31} \right. \\ &\quad \left. - \hat{A}^{12} (\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0) - \hat{A}^{23} (\partial_0 A_{23} - \partial_2 \partial_3 A_0) - \hat{A}^{31} (\partial_0 A_{31} - \partial_3 \partial_1 A_0) \right] d^4x \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

となる。再び部分積分することで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{iN}{2\pi} \left[A_{12} (\partial_0 \hat{A}^{12} - \partial_3 \hat{A}_0^{3(12)}) + A_{23} (\partial_0 \hat{A}^{23} - \partial_1 \hat{A}_0^{1(23)}) \right. \\ &\quad \left. + A_{31} (\partial_0 \hat{A}^{31} - \partial_2 \hat{A}_0^{2(31)}) + A_0 (\partial_1 \partial_2 \hat{A}^{12} + \partial_2 \partial_3 \hat{A}^{23} + \partial_3 \partial_1 \hat{A}^{31}) \right] d^4x \\ &= \frac{iN}{2\pi} \left[A_{12} \hat{E}^{12} + A_{23} \hat{E}^{23} + A_{31} \hat{E}^{31} + A_0 \hat{B} \right] d^4x \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

となり、(5.3.9) の \mathcal{L}_e と一致する。

ゲージ場とゲージパラメーターの対応は表 5.3 及び表 5.4 にまとめた。

Foliated BF 理論		Exotic BF 理論	
ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換	ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換
a_0	$\partial_0 \lambda$	A_0	$\partial_0 \alpha$
$A_0^k + \partial_0 a_k$ ($k = 1, 2, 3$)	$\partial_0 \partial_k \lambda$ ($k = 1, 2, 3$)	$\partial_k A_0$ ($k = 1, 2, 3$)	$\partial_k \partial_0 \alpha$ ($k = 1, 2, 3$)
$A_i^k + \partial_i a_k$ $k \neq i, k, i \in \{1, 2, 3\}$	$\partial_i \partial_k \lambda$ $k \neq i, k, i \in \{1, 2, 3\}$	A_{ki} $k \neq i, k, i \in \{1, 2, 3\}$	$\partial_k \partial_i \alpha$ $k \neq i, k, i \in \{1, 2, 3\}$
λ	$2\pi \zeta^1 + 2\pi \zeta^2 + 2\pi \zeta^3$	α	$2\pi \tilde{n}^1 + 2\pi \tilde{n}^2 + 2\pi \tilde{n}^3$
ξ^k ($k = 1, 2, 3$)		\tilde{n}^k ($k = 1, 2, 3$)	

表 5.3 3 + 1 次元における foliated BF 理論と exotic BF 理論の間のゲージ場とゲージパラメーターの対応 (A ゲージ場).

Foliated BF 理論		Exotic BF 理論	
ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換	ゲージ場と パラメーター	ゲージ変換
$B_0^i - B_0^j$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$\partial_0(\lambda^i - \lambda^j)$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$\hat{A}_0^{k(ij)}$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$\partial_0 \hat{\alpha}^{k(ij)}$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$
$B_k^i - B_k^j$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$\partial_k(\lambda^i - \lambda^j)$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	\hat{A}^{ij} $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$\partial_k \hat{\alpha}^{k(ij)}$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$
$\lambda^i - \lambda^j$ $(i, j) = (1, 2),$ $(2, 3), (3, 1)$	$2\pi m^i - 2\pi m^j$ $(i, j) = (1, 2),$ $(2, 3), (3, 1)$	$\hat{\alpha}^{k(ij)}$ $(i, j, k) = (1, 2, 3),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2)$	$2\pi \tilde{m}^i - 2\pi \tilde{m}^j$ $(i, j) = (1, 2),$ $(2, 3), (3, 1)$
m^k $(k = 1, 2, 3)$		\tilde{m}^k $(k = 1, 2, 3)$	

表 5.4 3 + 1 次元における foliated BF 理論と exotic BF 理論の間のゲージ場とゲージパラメーターの対応 (B ゲージ場).

5.5 基底状態の縮退度とロバストネス

この節では、基底状態の縮退度とロバストネス [18] を論じる。

2 + 1 次元の場合と同様に、基底状態の縮退度は対称性演算子の表現を調べることでわかる。空間は格子に正則化されており、格子定数は a 、格子の数は x^k 方向に L^k 個、 $\hat{x}^k = x^k/a$ とする。以下では exotic BF 理論の場合で考える。対称性演算子は、

$$\tilde{L}_k^q[C_1^k] = \exp \left[iq \oint_{C_1^k} dx^k \hat{A}^{ij} \right], \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.5.1)$$

及び

$$\tilde{W}_1^q [S_2^1] = \exp \left[iq \oint_{S_2^1} (dx^2 dx^1 A_{12} + dx^3 dx^1 A_{31}) \right], \quad (5.5.2a)$$

$$\tilde{W}_2^q [S_2^2] = \exp \left[iq \oint_{S_2^2} (dx^1 dx^2 A_{12} + dx^3 dx^2 A_{23}) \right], \quad (5.5.2b)$$

$$\tilde{W}_3^q [S_2^3] = \exp \left[iq \oint_{S_2^3} (dx^1 dx^3 A_{31} + dx^2 dx^3 A_{23}) \right] \quad (5.5.2c)$$

である。ここで、 S_2^k は $S_2^1 = [x_1^1, x_2^1] \times C_1^{23}$, $S_2^2 = [x_1^2, x_2^2] \times C_1^{31}$, $S_2^3 = C_1^{12} \times [x_1^3, x_2^3]$ であり、 C_1^{ik} は (x^i, x^k) 平面上の閉曲線である。これら 2 つのタイプの対称性演算子は以下の交換関係

$$\tilde{L}_1^p [C_1^1] \tilde{W}_2^q [S_2^2] = e^{2\pi i p q I (C_1^1, S_2^2) / N} \tilde{W}_2^q [S_2^2] \tilde{L}_1^p [C_1^1], \quad \text{if } x_1^2 < x^2 < x_2^2, \quad (5.5.3a)$$

$$\tilde{L}_1^p [C_1^1] \tilde{W}_3^q [S_2^3] = e^{2\pi i p q I (C_1^1, S_2^3) / N} \tilde{W}_3^q [S_2^3] \tilde{L}_1^p [C_1^1], \quad \text{if } x_1^3 < x^3 < x_2^3 \quad (5.5.3b)$$

を満たす。ここで、 I は 2 つの多様体の交叉数である。同様の関係式が他の方向についても成り立つ。格子による正則化によって、独立な演算子は以下ようになる：

$$A(\hat{x}^2) = \exp \left[ia \sum_{\hat{x}^1=1}^{L^1} \hat{A}^{23}(a\hat{x}^1, a\hat{x}^2, a) \right], \quad \hat{x}^2 = 1, \dots, L^2, \quad (5.5.4a)$$

$$B(\hat{x}^2) = \exp \left[ia^2 \sum_{\hat{x}^3=1}^{L^3} A_{23}(a, a\hat{x}^2, a\hat{x}^3) \right], \quad \hat{x}^2 = 1, \dots, L^2, \quad (5.5.4b)$$

$$A(\hat{x}^3) = \exp \left[ia \sum_{\hat{x}^1=1}^{L^1} \left(\hat{A}^{23}(a\hat{x}^1, a, a\hat{x}^3) - \hat{A}^{23}(a\hat{x}^1, a, a) \right) \right], \quad \hat{x}^3 = 2, \dots, L^3, \quad (5.5.4c)$$

$$B(\hat{x}^3) = \exp \left[ia^2 \sum_{\hat{x}^2=1}^{L^2} A_{23}(a, a\hat{x}^2, a\hat{x}^3) \right], \quad \hat{x}^3 = 2, \dots, L^3. \quad (5.5.4d)$$

x^2 -ライネオンと x^3 -ライネオンの演算子についても同様である。これらは $A(\hat{x}^k)^N = 1$, $B(\hat{x}^k)^N = 1$, $A(\hat{x}^k)B(\hat{x}^k) = e^{2\pi i/N} B(\hat{x}^k)A(\hat{x}^k)$ を満たし、独立な $AB = e^{2\pi i/N} BA$ という代数を満たす $(L^2 + L^3 - 1) + (L^3 + L^1 - 1) + (L^1 + L^2 - 1) = 2L^1 + 2L^2 + 2L^3 - 3$ 個の演算子の組である。それぞれの代数に対して最小の表現は N 次元表現であり、よって縮退度は $N^{2L^1+2L^2+2L^3-3}$ となる。

次にロバストネスについて考える。IR の foliated / exotic BF 理論での対称性 G_{IR} は \mathbb{Z}_N tensor 対称性及び \mathbb{Z}_N dipole 対称性である。UV の格子模型が \mathbb{Z}_N A 格子テンソルゲージ理論の場合は、対称性 G_{UV} は \mathbb{Z}_N tensor 対称性のみである。一方で、UV の格子模型が \mathbb{Z}_N \hat{A} 格子テンソルゲージ理論の場合は、対称性 G_{UV} は \mathbb{Z}_N dipole 対称性のみである。また、 \mathbb{Z}_N X-cube 模型の場合は、対称性 G_{UV} は \mathbb{Z}_N unconstrained tensor 対称性及び \mathbb{Z}_N unconstrained dipole 対称性である。X-cube 模型では、基底状態の縮退度は IR と一致する。

これらは、 G_{UV} を保ちながら低エネルギーに RG flow すると、foliated / exotic BF 理論に flow すると考えられる。このとき、IR の理論には G_{UV} で不変となるような局所演算子は存在しないので、どの格子模型から flow させても G_{IR} は robust である。また、そのような局所演算子が存在しないため、理論は普遍性を持つのに加え、基底状態の縮退度も robust である。

第 6 章

結論と展望

この論文では、フラクトン系の格子模型と QFT についてレビューした。まず、格子模型である \mathbb{Z}_2 X-cube 模型を例にとって、フラクトン系の性質を見た。その後、フラクトン系の QFT である $2+1$ 次元の ϕ 理論を例にとって、部分系対称性、格子模型との関係、場の配位、普遍性などをレビューした。また、 $2+1$ 次元及び $3+1$ 次元の foliated BF 理論と exotic BF 理論をレビューし、それらのゲージ不変演算子を同一視することでゲージ場とゲージパラメータの顕わな対応を得た。この対応のもとでは、ゲージ場とパラメータの発散と不連続性は一致する。また、time-like 対称性の演算子も対応することを示した。

Foliated-exotic 双対性の今後の方向性としては、部分系対称性の混合 't Hooft アノマリー [49] の対応を調べることが挙げられる。部分系対称性の 't Hooft アノマリーとそのアノマリー流入 [50] については、[21, 28] で研究されており、対応する 1 つ高い次元の理論は部分系対称性保護トポロジカル相 (SSPT 相) と呼ばれている [21, 51, 52]。フラクトン系の BF 理論はこのようなアノマリーを持つため、foliated 側と exotic 側の SSPT の対応を調べることが可能であると考えられる。他の方向性としては、ギャップのない foliated QFT である foliated スカラー場の理論 [22, 25] と、exotic な ϕ 理論 [16, 19] の対応を調べることが挙げられる。ギャップのない理論では、foliated-exotic 双対性が単純には成立しないと考えられているが [25]、これらは RG flow によって繋がっている可能性があり、その構造を明らかにする研究も考えられる。また、foliated-exotic 双対性を用いて、exotic QFT から等価な foliated QFT を構成する (またはその逆) などの試みも考えられる。フラクトン系の QFT における boson-fermion 対応 (格子模型では [53]) などは、foliated QFT を用いた方が考察しやすいと考えられ、foliated-exotic 双対性がそのような研究に繋がることも期待される。

フラクトン系はここ数年で発見された分野であり、純粋に理論的なものであるが、実験系での実現も将来的な課題として存在する。また、ゲージ場として現れるものが発散や不連続性を許し、通常のゲージ場とは異なるため、その数学的定式化もまだ未解決の課題であり、今後のさらなる発展が期待される。

謝辞

同研究室の大森寛太郎助教には，大学院入学時から本修士論文の執筆に至るまで，膨大な量の指導，議論をしていただいた。深く感謝する。同研究室の松尾泰教授は，未熟な筆者を指導教員として受け入れてくださり，多くのことをご教授いただいた。深く感謝する。IPMU の前田竜成君には，大学入学時から多くの議論に付き合っただき，本論文に助言もいただいた。また，IPMU の岡田昌樹君，基礎物理学研究所の津田崇史君は，同分野の同期として勉強会で多くの時間を共にした。深く感謝する。その他，筆者の大学院生活に関わるすべての皆様に感謝する。筆者は修士課程在学中に東京大学大学院数理科学研究科の WINGS-FMSP から援助を受けており，これにも深く感謝する。

付録 A

1+1 次元の BF 理論

この章では、1+1 次元の通常の相対論的な BF 理論 [36–39] についてレビューする。パッチによる記述は [54] を参考にした。空間は (x^0, x^1) を座標とする長さ l^0, l^1 の Euclid な 2 次元トーラス M とする。

A.1 ゲージ場とゲージ変換

1+1 次元では、0 形式の $U(1)$ ゲージ場 b と 1 形式の $U(1)$ ゲージ場 a が現れる。それぞれのゲージ変換は

$$b \rightarrow b + 2\pi m, \quad (\text{A.1.1})$$

$$a \rightarrow a + d\lambda \quad (\text{A.1.2})$$

である。ここで、 m は整数値の局所定数関数、 λ は 0 形式のゲージパラメーターである。 λ はそれ自身ゲージ変換 $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi s$ (s は整数値の局所定数関数) を持つ。厳密には、空間を開集合のパッチ $\{U_i\}_i$ でわけ、その開集合 U_i 上で考える。パッチの上では、ゲージ場 b はパッチ上の実数値関数 $b_{(i)}$ と

$$b_{(i)} - b_{(j)} = 2\pi n_{(ij)} \quad (\text{A.1.3})$$

を満たすパッチ間の整数値の変換関数 $n_{(ij)}$ の組 $(b_{(i)}, n_{(ij)})$ である。^{*1}一方で、ゲージ場 a はパッチ上の 1 形式 $a_{(i)}$,

$$a_{(i)} - a_{(j)} = d\chi_{(ij)} \quad (\text{A.1.4})$$

を満たすパッチ間の実数値変換関数 $\chi_{(ij)}$ 、3 つのパッチ間のコサイクル条件

$$\chi_{(ij)} + \chi_{(jk)} + \chi_{(ki)} = 2\pi t_{(ijk)} \quad (\text{A.1.5})$$

^{*1} b や a は大域的な微分形式ではなく、これらを開集合 U_i 上に制限した場合に U_i 上の微分形式となる。例えば、 b の場合はこれを $b_{(i)}$ と表記し、 $U_i \cup U_j \neq \emptyset$ となる i, j 間での変換関数を $n_{(ij)}$ のように書く。

を満たすような整数値関数 $t_{(ijk)}$ の組 $(a_{(i)}, \chi_{(ij)}, t_{(ijk)})$ である。このように考えると $b = (b_{(i)}, n_{(ij)})$ のゲージ変換は,

$$b_{(i)} \rightarrow b_{(i)} + 2\pi m_{(i)}, \quad (\text{A.1.6})$$

$$n_{(ij)} \rightarrow n_{(ij)} + m_{(i)} - m_{(j)}, \quad (\text{A.1.7})$$

$a = (a_{(i)}, \chi_{(ij)}, t_{(ijk)})$ のゲージ変換は,

$$a_{(i)} \rightarrow a_{(i)} + d\lambda_{(i)}, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\chi_{(ij)} \rightarrow \chi_{(ij)} + \lambda_{(i)} - \lambda_{(j)} + 2\pi\xi_{(ij)}, \quad (\text{A.1.9})$$

$$t_{(ijk)} \rightarrow t_{(ijk)} + \xi_{(ij)} + \xi_{(jk)} + \xi_{(ki)} \quad (\text{A.1.10})$$

である。ここで、 $\xi_{(ik)}$ は整数値の局所定数関数であり、変換関数に現れるゲージ変換である。^{*2}

ここで、開集合のパッチ $\{U_i\}_i$ を適切に取り、それに対して $M = \bigcup_i \sigma_i$ 、 $\sigma_i \subset U_i$ であり、以下の条件を満たすような閉集合の組 $\{\sigma_i\}_i$ を取ることにする。これらの閉集合は、 σ_i と σ_j の共通部分は空集合または 1 次元の σ_{ij} であり、 σ_i 、 σ_j 、 σ_k の共通部分が空集合または点 σ_{ijk} 、さらに 4 つ以上の σ_i の共通部分は空集合であるように取る。このような閉集合の組は開集合のパッチを適切に取ればいつでも存在する。このような準備のもとで、ゲージ場の外微分の積分が $2\pi\mathbb{Z}$ の値を持つことが容易に示せる。 b については、閉曲線 C を取ると、^{*3}

$$\begin{aligned} \oint_C db &= \sum_i \int_{C \cap \sigma_i} db_{(i)} \\ &= \sum_{i < j} \int_{C \cap \sigma_{ij}} (b_{(i)} - b_{(j)}) \\ &= \sum_{i < j} 2\pi n_{(ij)} \Big|_{C \cap \sigma_{ij}} \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

a については、

$$\begin{aligned} \int_M da &= \sum_i \int_{\sigma_i} da_{(i)} \\ &= \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} (a_{(i)} - a_{(j)}) \\ &= \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} d\chi_{(ij)} \\ &= \sum_{i < j < k} (\chi_{(ij)} + \chi_{(jk)} + \chi_{(ki)}) \Big|_{\sigma_{ijk}} \\ &= \sum_{i < j < k} 2\pi t_{(ijk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} \in 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

となる。これらの積分が 0 でない場合、場は flux を持つという。

^{*2} λ 自身のゲージ変換 $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi s$ は、 $\lambda_{(i)} \rightarrow \lambda_{(i)} + 2\pi s_{(i)}$ 、 $\xi_{(ij)} \rightarrow \xi_{(ij)} - s_{(i)} + s_{(j)}$ となる。

^{*3} 簡単のため $C \cap \sigma_{ij}$ が 1 次元にならないように C を取るが、一般性は失わない。

A.2 BF 理論

1 + 1 次元の BF 理論の作用は

$$S = \frac{iN}{2\pi} \int_M b da \quad (\text{A.2.1})$$

と書かれる．ここで， N は正の整数である．この表記は厳密には以下のような意味である．トラス M を前節のようなパッチで分けると，ナイーブには $\frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} b_{(i)} da_{(i)}$ となるが，この表記はゲージ変換のもとで不変にならない．したがって，以下のように変換関数の補正項を付け加える必要がある：

$$S = \frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} b_{(i)} da_{(i)} - iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} n_{(ij)} a_{(j)} + iN \sum_{i < j < k} n_{(ij)} \chi_{(jk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} . \quad (\text{A.2.2})$$

この作用のゲージ不変性は以下のように確かめられる．まず第 1 項のゲージ変換による変化分は，

$$\begin{aligned} & \frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} 2\pi m_{(i)} da_{(i)} \\ &= \frac{iN}{2\pi} \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} 2\pi (m_{(i)} a_{(i)} - m_{(j)} a_{(j)}) \\ &= iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} \{ (m_{(i)} - m_{(j)}) a_{(j)} + m_{(i)} d\chi_{(ij)} \} \\ &= iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} (m_{(i)} - m_{(j)}) a_{(j)} \\ & \quad + iN \sum_{i < j < k} (m_{(i)} \chi_{(ij)} + m_{(j)} \chi_{(jk)} - m_{(i)} \chi_{(ik)}) \Big|_{\sigma_{ijk}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

となる．*4第 2 項の変化分は，

$$\begin{aligned} & -iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} (m_{(i)} - m_{(j)}) a_{(j)} - iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} (n_{(ij)} + m_{(i)} - m_{(j)}) d\lambda_{(j)} \\ &= -iN \sum_{i < j} \int_{\sigma_{ij}} (m_{(i)} - m_{(j)}) a_{(j)} - iN \sum_{i < j < k} \{ (n_{(ij)} + m_{(i)} - m_{(j)}) \lambda_{(j)} \\ & \quad + (n_{(jk)} + m_{(j)} - m_{(k)}) \lambda_{(k)} - (n_{(ik)} + m_{(i)} - m_{(k)}) \lambda_{(k)} \} \Big|_{\sigma_{ijk}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

*4 σ_{ij} の向きは適切に決める必要がある．ここでは， $i < j$ に対して， σ_i を左回りに囲むような向きに σ_{ij} の向きを取る．

となる。第 3 項の変化分は,

$$\begin{aligned} & iN \sum_{i<j<k} (m_{(i)} - m_{(j)}) \chi_{(jk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} \\ & + iN \sum_{i<j<k} (n_{(ij)} + m_{(i)} - m_{(j)}) (\lambda_{(j)} - \lambda_{(k)} + 2\pi\xi_{(jk)}) \Big|_{\sigma_{ijk}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

となる。これらを足し合わせ, $n_{(ij)} = -n_{(ji)}$, $\chi_{(ij)} = -\chi_{(ji)}$, $n_{(ij)} + n_{(jk)} + n_{(ki)} = 0$ などを用い, $2\pi i$ の整数倍となる項を落とすと,

$$\begin{aligned} & iN \sum_{i<j<k} m_{(i)} (\chi_{(ij)} + \chi_{(jk)} + \chi_{(ki)}) \Big|_{\sigma_{ijk}} \\ & = iN \sum_{i<j<k} m_{(i)} 2\pi t_{(ijk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

となる。この項は $2\pi i$ の整数倍となるので, 結果的に経路積分内の e^{-S} はゲージ不変となる。また, 部分積分した表式も求めておく。作用の第 1 項は

$$-\frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} db_{(i)} \wedge a_{(i)} + \frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} d(b_{(i)} a_{(i)}) \quad (\text{A.2.7})$$

となるが, この式の第 2 項は

$$\begin{aligned} & \frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} d(b_{(i)} a_{(i)}) \\ & = \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} \{b_{(i)} (a_{(i)} - a_{(j)}) + (b_{(i)} - b_{(j)}) a_{(j)}\} \\ & = \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} \{b_{(i)} d\chi_{(ij)} + 2\pi n_{(ij)} a_{(j)}\} \\ & = \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} d(b_{(i)} \chi_{(ij)}) - \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} db_{(i)} \chi_{(ij)} + iN \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} n_{(ij)} a_{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

と変形できる。さらにこの式の第 1 項は

$$\begin{aligned} & \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j<k} (b_{(i)} \chi_{(ij)} + b_{(j)} \chi_{(jk)} - b_{(i)} \chi_{(ik)}) \Big|_{\sigma_{ijk}} \\ & = \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j<k} \{b_{(i)} (\chi_{(ij)} + \chi_{(jk)} + \chi_{(ki)}) - (b_{(i)} - b_{(j)}) \chi_{(jk)}\} \Big|_{\sigma_{ijk}} \\ & = iN \sum_{i<j<k} b_{(i)} t_{(ijk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} - iN \sum_{i<j<k} n_{(ij)} \chi_{(jk)} \Big|_{\sigma_{ijk}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

と変形できる。これらをすべて合わせると, 作用の変換関数による補正項が変化し, 以下のようになる:

$$S = -\frac{iN}{2\pi} \sum_i \int_{\sigma_i} db_{(i)} \wedge a_{(i)} - \frac{iN}{2\pi} \sum_{i<j} \int_{\sigma_{ij}} db_{(i)} \chi_{(ij)} + iN \sum_{i<j<k} b_{(i)} t_{(ijk)} \Big|_{\sigma_{ijk}}. \quad (\text{A.2.10})$$

つまり、部分積分によって追加の項が現れるが、それらは変換関数の補正を変更するだけである。これを

$$S = -\frac{iN}{2\pi} \int_M db \wedge a = \frac{iN}{2\pi} \int_M a \wedge db \quad (\text{A.2.11})$$

と書く。

運動方程式は、

$$Ndb = 0, \quad (\text{A.2.12})$$

$$Nda = 0 \quad (\text{A.2.13})$$

であるが、パッチに分けた正確な表記では、

$$Ndb_{(i)} = 0, \quad (\text{A.2.14})$$

$$Nb_{(i)} \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad (\text{A.2.15})$$

$$Nda_{(i)} = 0, \quad (\text{A.2.16})$$

$$N \int_{\sigma_{ij}} a_{(j)} - N \sum_{k; k>j} \chi_{(jk)} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{A.2.17})$$

である。場が量子化されている運動方程式は以下のように得る。例えば、作用 (A.2.10) に対して $t_{(ijk)}$ を経路積分する場合は、 $t_{(ijk)}$ を整数全体に渡って和を取るが、その場合には $Nb_{(i)}$ が 2π の整数倍となる場合だけ経路積分に寄与することから $Nb_{(i)} \in 2\pi\mathbb{Z}$ が得られる。

A.3 ゲージ不変演算子

ゲージ不変演算子は

$$V[x] = \exp [ib(x)], \quad (\text{A.3.1})$$

$$W[C] = \exp \left[i \oint_C a \right] \quad (\text{A.3.2})$$

である。ここで、 C は 1 次元の閉曲線である。 b は局所的なパッチ上では $b_{(i)}$ であり、パッチ間の差は $2\pi n_{(ij)} \in 2\pi\mathbb{Z}$ となるため、 $V[x]$ は大域的に定義されている。また、 $W[C]$ は正確には変換関数の補正を加えて

$$W[C] = \exp \left[i \sum_i \int_{C \cap \sigma_i} a_{(i)} - \sum_{i<j} \chi_{(ij)} |_{C \cap \sigma_{ij}} \right] \quad (\text{A.3.3})$$

である。運動方程式を適用すれば、 x の位置や C の形状は自由に変形することができ、トポロジカルであることがわかる。また、これらは \mathbb{Z}_N 演算子： $V^N = W^N = 1$ である。 $V^N = 1$ は、まず (A.2.15) から点 σ_{ijk} の場合に示せ、さらに運動方程式 (A.2.14) を用いて任意の点でも示せる。 $W^N = 1$ は、まず (A.2.17) から、経路が σ_{ij} に沿うような場合で示せ、さらに運動方程式 (A.2.16) を用いて任意の経路 C について示せる。これらの計算は、実際にはパッチ

で分けた運動方程式を使わずに簡略化して行うことが多い。その場合、常に変換関数の補正がかかっていると、積分によって境界に出る量は適切にキャンセルされるとして計算する。

これらの2つの演算子は、 \mathbb{Z}_N の対称性演算子である。 V は余次元2の演算子であり、1形式対称性である。一方、 W は余次元1の演算子であり、通常の大域的対称性である。これらはそれぞれがもう一方の演算子に以下のように作用する：

$$e^{i \oint_C a} e^{ib(x)} = e^{2\pi i/N} e^{ib(x)} e^{i \oint_{C'} a}. \quad (\text{A.3.4})$$

ここで、 C は閉曲線であり、 C' は C を x を横切るように微小に変形した閉曲線である。この関係式を示すには以下のように考えればよい。^{*5} 演算子の期待値を考えると

$$\begin{aligned} \langle e^{i \oint_C a} e^{ib(x)} \dots \rangle &= \int [da db] \exp \left[-\frac{iN}{2\pi} \int_M b da + i \oint_C a + i \int_M d^2 y \delta^2(x-y) b(y) \right] \dots \\ &= \int [da] \exp \left[i \oint_C a \right] \delta \left(-\frac{iN}{2\pi} da + i d^2 y \delta^2(x-y) \right) \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

ここで、 C を x を含む微小な領域を囲む閉曲線 $C_x = \partial D_x$ とそれ以外の部分の閉曲線 C' に分割する。このとき、

$$\begin{aligned} &\langle e^{i \oint_C a} e^{ib(x)} \dots \rangle \\ &= \int [da] \exp \left[i \oint_{C'} a + i \oint_{D_x} \frac{2\pi}{N} d^2 y \delta^2(x-y) \right] \delta \left(-\frac{iN}{2\pi} da + i d^2 y \delta^2(x-y) \right) \dots \\ &= e^{2\pi i/N} \int [da] \exp \left[i \oint_{C'} a \right] \delta \left(-\frac{iN}{2\pi} da + i d^2 y \delta^2(x-y) \right) \dots \\ &= e^{2\pi i/N} \int [da db] \exp \left[-\frac{iN}{2\pi} \int_M b da + i \oint_{C'} a + ib(x) \right] \dots \\ &= e^{2\pi i/N} \langle e^{ib(x)} e^{i \oint_{C'} a} \dots \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

となるので、(A.3.4) が示せた。場への作用を見ておくと、通常の大域的対称性の $e^{i \oint_C a}$ の場への作用は

$$b \rightarrow b + \frac{2\pi}{N} k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.3.7})$$

であり、この対称性は \mathbb{Z}_N 対称性である。通常 $U(1)$ 対称性のシフトは、(A.2.10) の第3項の変換関数による補正の項で不変にならないことはすぐにわかる。一方、1形式対称性の e^{ib} の場への作用は

$$a \rightarrow a + \nu, \quad d\nu = 0, \quad \oint_C \nu = \frac{2\pi}{N} k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.3.8})$$

である。この変換は N 回行くとゲージ変換となるため、 \mathbb{Z}_N 対称性である。この変換は、 $U(1)/\mathbb{Z}_N$ 値のパラメーター α を用いて書ける。このパラメーターは、パッチ上では $\nu_{(i)} =$

^{*5} この議論は若干ラフなものである。

$d\alpha_{(i)}$, $\alpha_{(i)} - \alpha_{(j)} = 2\pi\beta_{(ij)}/N$ ($\beta \in \mathbb{Z}$) となるものであり, 変換は

$$a_{(i)} \rightarrow a_{(i)} + d\alpha_{(ij)} \tag{A.3.9}$$

$$\chi_{(ij)} \rightarrow \chi_{(ij)} + 2\pi\beta_{(ij)}/N \tag{A.3.10}$$

である. この変換のもとで作用 (A.2.2) が不変であることもすぐにわかる.

参考文献

- [1] K. Ohmori and S. Shimamura, “Foliated-Exotic Duality in Fractonic BF Theories,” [arXiv:2210.11001 \[hep-th\]](#).
- [2] R. M. Nandkishore and M. Hermele, “Fractons,” *Ann. Rev. Condensed Matter Phys.* **10** (2019) 295–313, [arXiv:1803.11196 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [3] M. Pretko, X. Chen, and Y. You, “Fracton Phases of Matter,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35** no. 06, (2020) 2030003, [arXiv:2001.01722 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [4] A. Gromov and L. Radzihovsky, “Fracton Matter,” [arXiv:2211.05130 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [5] J. Haah, “Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators,” *Phys. Rev. A* **83** no. 4, (2011) 042330, [arXiv:1101.1962 \[quant-ph\]](#).
- [6] S. Vijay, J. Haah, and L. Fu, “A New Kind of Topological Quantum Order: A Dimensional Hierarchy of Quasiparticles Built from Stationary Excitations,” *Phys. Rev. B* **92** no. 23, (2015) 235136, [arXiv:1505.02576 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [7] S. Vijay, J. Haah, and L. Fu, “Fracton Topological Order, Generalized Lattice Gauge Theory and Duality,” *Phys. Rev. B* **94** no. 23, (2016) 235157, [arXiv:1603.04442 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [8] W. Shirley, K. Slagle, Z. Wang, and X. Chen, “Fracton Models on General Three-Dimensional Manifolds,” *Phys. Rev. X* **8** no. 3, (2018) 031051, [arXiv:1712.05892 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [9] A. Prem, S.-J. Huang, H. Song, and M. Hermele, “Cage-Net Fracton Models,” *Phys. Rev. X* **9** no. 2, (2019) 021010, [arXiv:1806.04687 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [10] B. J. Brown and D. J. Williamson, “Parallelized quantum error correction with fracton topological codes,” *Phys. Rev. Res.* **2** no. 1, (2020) 013303, [arXiv:1901.08061 \[quant-ph\]](#).
- [11] V. Khemani, M. Hermele, and R. Nandkishore, “Localization from Hilbert space shattering: From theory to physical realizations,” *Phys. Rev. B* **101** no. 17, (2020) 174204, [arXiv:1904.04815 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [12] M. Pretko, “Emergent gravity of fractons: Mach’s principle revisited,” *Phys. Rev. D* **96** no. 2, (2017) 024051, [arXiv:1702.07613 \[cond-mat.str-el\]](#).

- [13] M. Pretko, “The Fracton Gauge Principle,” *Phys. Rev. B* **98** no. 11, (2018) 115134, [arXiv:1807.11479](#) [`cond-mat.str-el`].
- [14] K. Slagle and Y. B. Kim, “Quantum Field Theory of X-Cube Fracton Topological Order and Robust Degeneracy from Geometry,” *Phys. Rev. B* **96** no. 19, (2017) 195139, [arXiv:1708.04619](#) [`cond-mat.str-el`].
- [15] N. Seiberg, “Field Theories With a Vector Global Symmetry,” *SciPost Phys.* **8** no. 4, (2020) 050, [arXiv:1909.10544](#) [`cond-mat.str-el`].
- [16] N. Seiberg and S.-H. Shao, “Exotic Symmetries, Duality, and Fractons in 2+1-Dimensional Quantum Field Theory,” *SciPost Phys.* **10** no. 2, (2021) 027, [arXiv:2003.10466](#) [`cond-mat.str-el`].
- [17] N. Seiberg and S.-H. Shao, “Exotic $U(1)$ Symmetries, Duality, and Fractons in 3+1-Dimensional Quantum Field Theory,” *SciPost Phys.* **9** no. 4, (2020) 046, [arXiv:2004.00015](#) [`cond-mat.str-el`].
- [18] N. Seiberg and S.-H. Shao, “Exotic \mathbb{Z}_N symmetries, duality, and fractons in 3+1-dimensional quantum field theory,” *SciPost Phys.* **10** no. 1, (2021) 003, [arXiv:2004.06115](#) [`cond-mat.str-el`].
- [19] P. Gorantla, H. T. Lam, N. Seiberg, and S.-H. Shao, “More Exotic Field Theories in 3+1 Dimensions,” *SciPost Phys.* **9** (2020) 073, [arXiv:2007.04904](#) [`cond-mat.str-el`].
- [20] P. Gorantla, H. T. Lam, N. Seiberg, and S.-H. Shao, “Low-energy limit of some exotic lattice theories and UV/IR mixing,” *Phys. Rev. B* **104** no. 23, (2021) 235116, [arXiv:2108.00020](#) [`cond-mat.str-el`].
- [21] F. J. Burnell, T. Devakul, P. Gorantla, H. T. Lam, and S.-H. Shao, “Anomaly inflow for subsystem symmetries,” *Phys. Rev. B* **106** no. 8, (2022) 085113, [arXiv:2110.09529](#) [`cond-mat.str-el`].
- [22] H. Geng, S. Kachru, A. Karch, R. Nally, and B. C. Rayhaun, “Fractons and Exotic Symmetries from Branes,” *Fortsch. Phys.* **69** no. 11-12, (2021) 2100133, [arXiv:2108.08322](#) [`hep-th`].
- [23] K. Slagle, D. Aasen, and D. Williamson, “Foliated Field Theory and String-Membrane-Net Condensation Picture of Fracton Order,” *SciPost Phys.* **6** no. 4, (2019) 043, [arXiv:1812.01613](#) [`cond-mat.str-el`].
- [24] K. Slagle, “Foliated Quantum Field Theory of Fracton Order,” *Phys. Rev. Lett.* **126** no. 10, (2021) 101603, [arXiv:2008.03852](#) [`hep-th`].
- [25] P.-S. Hsin and K. Slagle, “Comments on foliated gauge theories and dualities in 3+1d,” *SciPost Phys.* **11** no. 2, (2021) 032, [arXiv:2105.09363](#) [`cond-mat.str-el`].
- [26] Y. You, T. Devakul, S. L. Sondhi, and F. J. Burnell, “Fractonic Chern-Simons and BF theories,” *Phys. Rev. Res.* **2** no. 2, (2020) 023249, [arXiv:1904.11530](#)

- [cond-mat.str-el].
- [27] S. Yamaguchi, “Supersymmetric quantum field theory with exotic symmetry in 3+1 dimensions and fermionic fracton phases,” *PTEP* **2021** no. 6, (2021) 063B04, [arXiv:2102.04768 \[hep-th\]](#).
- [28] S. Yamaguchi, “Gapless edge modes in (4+1)-dimensional topologically massive tensor gauge theory and anomaly inflow for subsystem symmetry,” *PTEP* **2022** no. 3, (2022) 033B08, [arXiv:2110.12861 \[hep-th\]](#).
- [29] H. Katsura and Y. Nakayama, “Spontaneously broken supersymmetric fracton phases with fermionic subsystem symmetries,” *JHEP* **08** (2022) 072, [arXiv:2204.01924 \[hep-th\]](#).
- [30] M. Honda and T. Nakanishi, “Scalar, fermionic and supersymmetric field theories with subsystem symmetries in d+1 dimensions,” [arXiv:2212.13006 \[hep-th\]](#).
- [31] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, “Generalized Global Symmetries,” *JHEP* **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 \[hep-th\]](#).
- [32] W. Shirley, K. Slagle, and X. Chen, “Fractional excitations in foliated fracton phases,” *Annals Phys.* **410** (2019) 167922, [arXiv:1806.08625 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [33] W. Shirley, K. Slagle, and X. Chen, “Foliated fracton order from gauging subsystem symmetries,” *SciPost Phys.* **6** no. 4, (2019) 041, [arXiv:1806.08679 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [34] A. Y. Kitaev, “Fault tolerant quantum computation by anyons,” *Annals Phys.* **303** (2003) 2–30, [arXiv:quant-ph/9707021](#).
- [35] M. Pretko, “Subdimensional Particle Structure of Higher Rank U(1) Spin Liquids,” *Phys. Rev. B* **95** no. 11, (2017) 115139, [arXiv:1604.05329 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [36] J. M. Maldacena, G. W. Moore, and N. Seiberg, “D-brane charges in five-brane backgrounds,” *JHEP* **10** (2001) 005, [arXiv:hep-th/0108152](#).
- [37] T. Banks and N. Seiberg, “Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 084019, [arXiv:1011.5120 \[hep-th\]](#).
- [38] A. Kapustin and N. Seiberg, “Coupling a QFT to a TQFT and Duality,” *JHEP* **04** (2014) 001, [arXiv:1401.0740 \[hep-th\]](#).
- [39] S. Gukov and A. Kapustin, “Topological Quantum Field Theory, Nonlocal Operators, and Gapped Phases of Gauge Theories,” [arXiv:1307.4793 \[hep-th\]](#).
- [40] D. A. Johnston, M. Mueller, and W. Janke, “Plaquette Ising models, degeneracy and scaling,” *Eur. Phys. J. ST* **226** no. 4, (2017) 749–764, [arXiv:1612.00060 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [41] L. Kong and X.-G. Wen, “Braided fusion categories, gravitational anomalies, and the mathematical framework for topological orders in any dimensions,” [arXiv:1405.5858 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [42] T. Johnson-Freyd, “On the Classification of Topological Orders,” *Commun. Math.*

- Phys.* **393** no. 2, (2022) 989–1033, [arXiv:2003.06663](#) [[math.CT](#)].
- [43] P. Gorantla, H. T. Lam, N. Seiberg, and S.-H. Shao, “Global dipole symmetry, compact Lifshitz theory, tensor gauge theory, and fractons,” *Phys. Rev. B* **106** no. 4, (2022) 045112, [arXiv:2201.10589](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [44] B. Yoshida, “Exotic topological order in fractal spin liquids,” *Phys. Rev. B* **88** no. 12, (2013) 125122, [arXiv:1302.6248](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [45] Y. You and F. von Oppen, “Majorana Quantum Lego, a Route Towards Fracton Matter,” *Phys. Rev. Research*. **1** (2019) 013011, [arXiv:1812.06091](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [46] A. Paramekanti, L. Balents, and M. P. A. Fisher, “Ring exchange, the exciton bose liquid, and bosonization in two dimensions,” *Phys. Rev. B* **66** (Aug, 2002) 054526. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.054526>.
- [47] I. Moerdijk and J. Mrcun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [48] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 3 ed., 2011.
- [49] G. 't Hooft, “Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking,” *NATO Sci. Ser. B* **59** (1980) 135–157.
- [50] C. G. Callan, Jr. and J. A. Harvey, “Anomalies and Fermion Zero Modes on Strings and Domain Walls,” *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 427–436.
- [51] Y. You, T. Devakul, F. J. Burnell, and S. L. Sondhi, “Subsystem symmetry protected topological order,” *Phys. Rev. B* **98** no. 3, (2018) 035112, [arXiv:1803.02369](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [52] T. Devakul, D. J. Williamson, and Y. You, “Classification of subsystem symmetry-protected topological phases,” *Phys. Rev. B* **98** no. 23, (2018) 235121, [arXiv:1808.05300](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [53] W. Cao, M. Yamazaki, and Y. Zheng, “Boson-fermion duality with subsystem symmetry,” *Phys. Rev. B* **106** no. 7, (2022) 075150, [arXiv:2206.02727](#) [[cond-mat.str-el](#)].
- [54] C. Córdova, D. S. Freed, H. T. Lam, and N. Seiberg, “Anomalies in the Space of Coupling Constants and Their Dynamical Applications I,” *SciPost Phys.* **8** no. 1, (2020) 001, [arXiv:1905.09315](#) [[hep-th](#)].