

格子理論におけるAtiyah-Singer指数の数学的定式化



深谷英則 (大阪大学)

青木匠門(阪大)、古田幹雄 (東大)、松尾信一郎 (名古屋大)、大野木哲也 (阪大)、山口哲 (阪大)、山下真由子 (京大) の各氏との共同研究に基づく



物理屋でもわかる指数定理プロジェクト

- 物理屋フレンドリなAtiyah-Patodi-Singer (APS) 指数の定式化 [F, Onogi, Yamaguchi 2017]
- 物理屋フレンドリなAPS指数 (Atiyah-Singer 指数も含む) の定式化の数学的証明 [F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2019]
- 格子ゲージ理論への応用 [F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 2019]
- 奇数次元 Mod-two APS 指数への応用 [F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]

物理屋でもわかる指数定理のご利益

もともとの指数の定義

=質量ゼロのDirac演算子のカイラルなゼロ固有値の個数:

$$\text{Tr} \gamma_5^{\text{reg.}} = n_+ - n_-$$

境界付き多様体の場合は非局所的な境界条件が必要。

物理屋フレンドリな定式化では

* 質量項を加えたDirac演算子で定式化: $\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D + m))$
カイラル対称性が不要。

* 境界付き多様体の場合もその外側をキャップして
閉多様体上の指数として統一的に扱える。

境界条件が不要。

格子理論への応用

Nielsen-Ninomiyaの定理 [1981]

フェルミオンダブリング=非物理的自由度の存在を避けるためにはカイラル対称性を破る必要がある。

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 \neq 0$$

物理屋フレンドリな定式化では

* 質量項を加えたDirac演算子で定式化: $\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D + m))$
カイラル対称性が不要。

こっちを格子理論で定式化すればいいのでは？

数学的動機

格子理論の指数先行研究[Hasenfranz 1998, Neuberger 1998]

Ginsparg-Wilson 関係式

$$\gamma_5 D_{\text{ov}} + D_{\text{ov}} \gamma_5 = a D_{\text{ov}} \gamma_5 D_{\text{ov}}$$

を満たすDirac演算子で index を定義できる。

$$\text{Ind} D_{\text{ov}} = n_+ - n_-$$

古田さん: 「有限次元のベクトル空間で指数が定義できるなんてすごい！ぜひ数学的にきちんと理解したい。」 = 数学的動機

連続理論の $\frac{1}{2} \eta(\gamma_5 (D + m))$

よりもその格子版の
ほうが**数学的に面白い**。

私たちの目標

まずは平坦な $2n$ 次元トーラスで、連続理論の指数と一致するDirac演算子を有限格子間隔で構成できることを数学的に証明する。 = this talk.

先行研究[Kubota2020, Yamashita 2020]

Outlook:

APS指数への拡張

Mod-two versionへの拡張

Domain-wall fermionを使ったCurved space への応用

etc.

Contents

✓ 1. Introduction

物理屋フレンドリなAS指数を格子理論で構成したい。

2. Spectral flow = 基本的なアイデア

3. 数学的準備

4. 主定理とその証明

5. 先行研究との比較

6. まとめ

連続理論 $H(m) = \gamma_5(D + m)$ の固有値

For $D\phi = 0$, $H(m)\phi = \gamma_5 m\phi = \underbrace{\pm}_{\text{chirality}} m\phi$.

For $D\phi \neq 0$, $\{H(m), D\} = 0$.

なのでどの固有値

$$H(m)\phi_{\lambda_m} = \lambda_m\phi_{\lambda_m}$$

も符号の反転ペア

$$H(m)D\phi_{\lambda_m} = -\lambda_m D\phi_{\lambda_m}$$

を持つ。

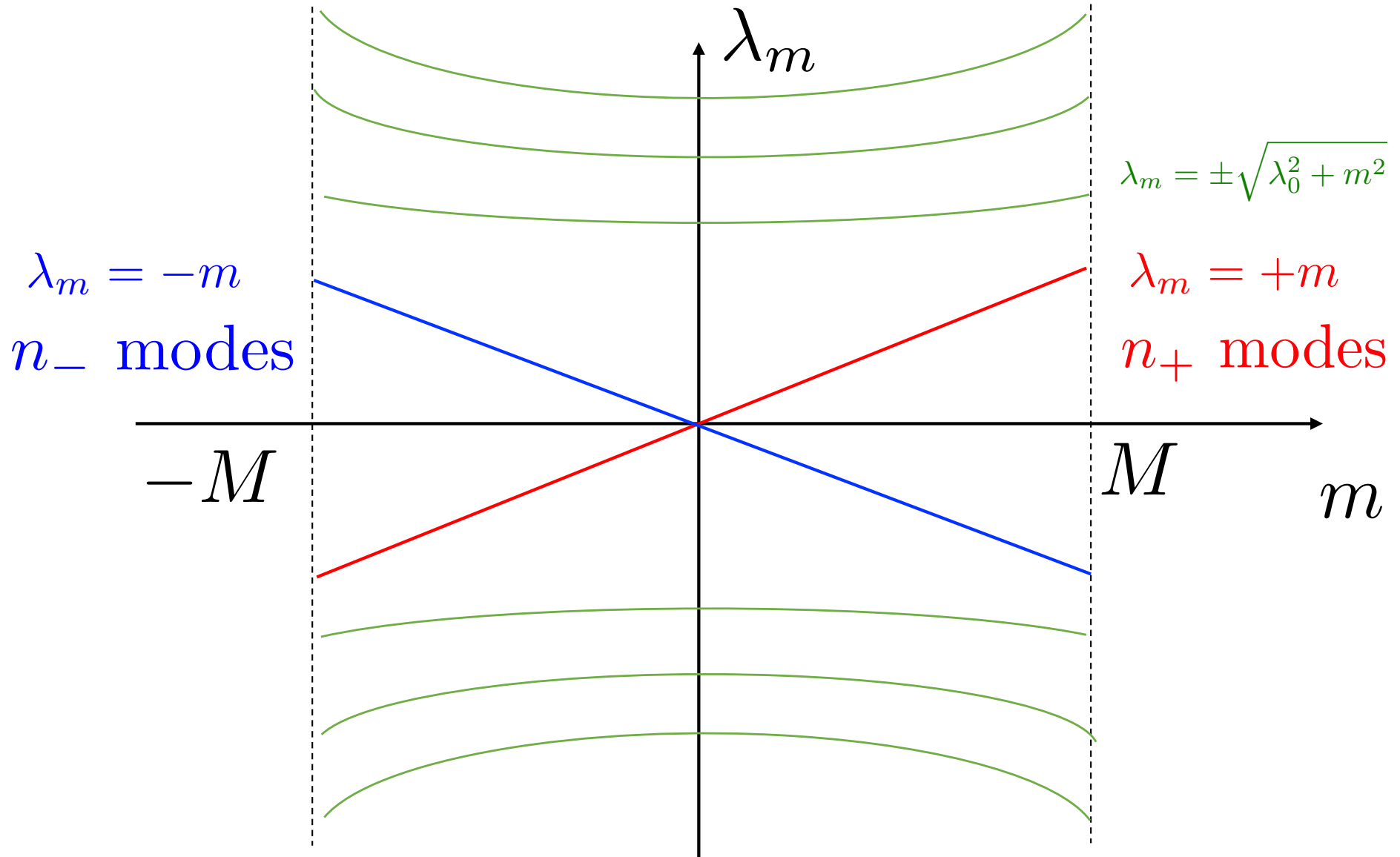
また、 $H(m)^2 = -D^2 + m^2$

より固有値は質量ゼロのときの固有値を用いて

$$\lambda_m = \pm \sqrt{\lambda_0^2 + m^2}$$

となる。

Spectrum of $H(m) = \gamma_5(D + m)$



Spectral flow = AS 指数 = η 不変量

n_+ = 負から正になった固有値の数

n_- = 正から負になった固有値の数

$$n_+ - n_- = \text{spectral flow of } H(m) \quad m \in [-M, M]$$

エータ不変量とも等価:

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{\text{reg}} - \sum_{\lambda < 0}^{\text{reg}}$$

固有値が一つ(負から正へ/正から負へ)横切ると
 $\eta(H(m))$ は 2 ずつ増/減。

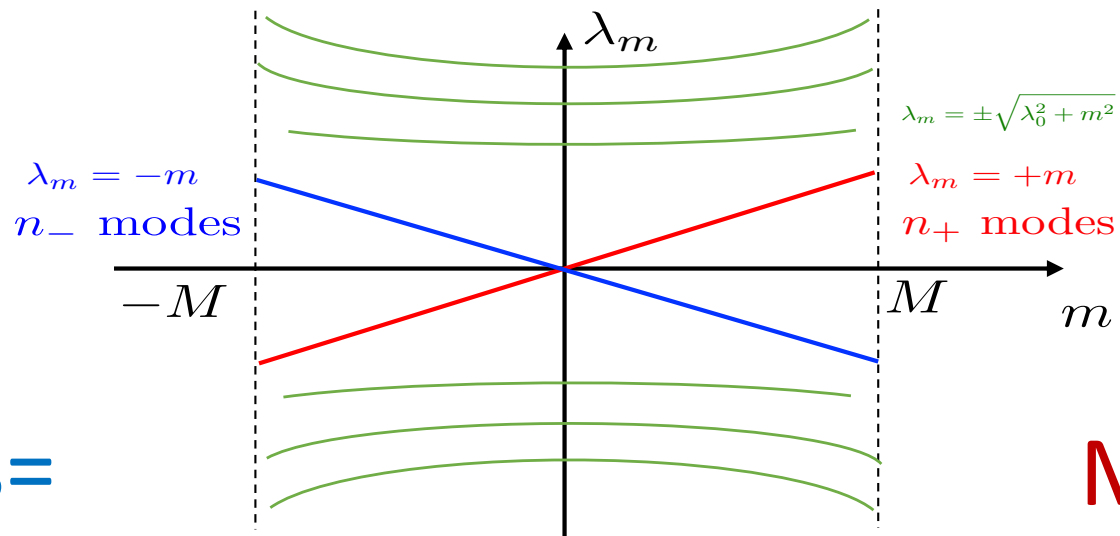
物理屋フレンド
りな指数

$$\frac{1}{2}\eta(H(M)) - \frac{1}{2}\eta(H(-M)) = n_+ - n_-.$$

(APS版にも拡張可能)

Pauli-Villars subtraction

K理論の suspension 同型



Massless=
点で数える

Massive=
線で数える

$$K^0(\text{point}) \simeq K^1(I, \partial I)$$

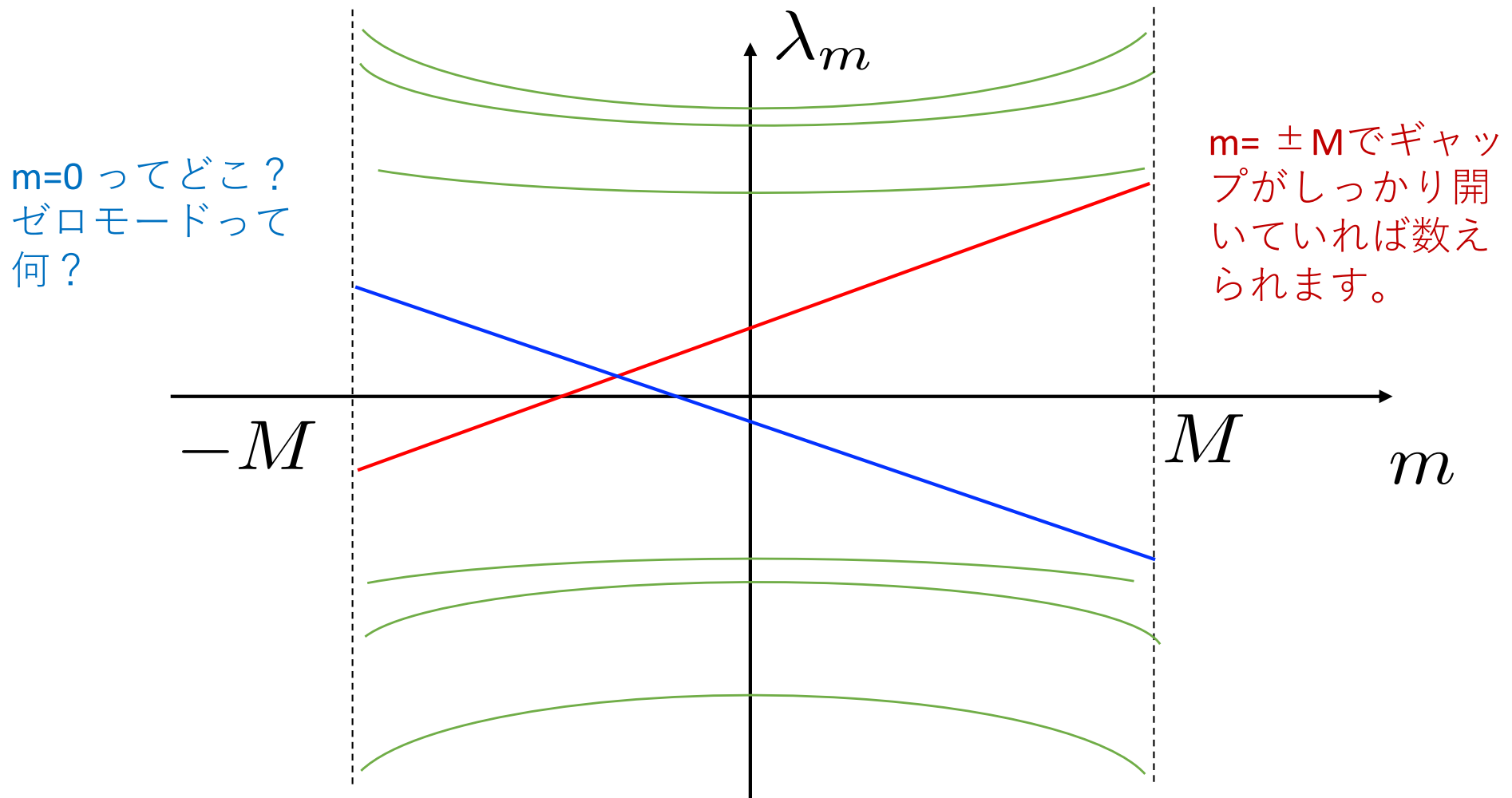
point line

With chirality operator

Without chirality operator

結果は一致する。

格子正則化などでカイラル対称性が破れてしまっても、点(massless)では数えられなくても、線(massive)では数えられるはず。



Our mathematical goal

2n 次元トーラス上で連続理論の massive Dirac 演算子とゲージ場が与えられたとき、物理屋フレンドリな指数=spectral flow が等しくなる有限格子の massive Dirac 演算子の存在を示す。

Contents

✓ 1. Introduction

物理屋フレンドリなAS指数を格子理論で構成したい。

✓ 2. Spectral flow

Massless=点で数えるよりもmassive=線で数えるほうが楽。

3. 数学的準備

4. 主定理とその証明

5. 先行研究との比較

6. まとめ

連続理論のDirac 演算子

E : 複素ベクトル束

底空間 M : $2n$ 次元平坦なトーラス T^{2n}

ファイバー F : rank r の Hermite 計量を持つベクトル空間

接続: ゲージ場 A_i で定義される平行移動

D : E の切断に作用する Dirac 演算子

$$D = \gamma_i (\partial_i + A_i)$$

カイラリティ (Z_2 grading) 演算子: $\gamma = i^n \prod_i \gamma_i$

$$\{\gamma, D\} = 0, \{\gamma, \gamma_i\} = 0.$$

格子理論のWilson Dirac 演算子

底空間: $2n$ 次元平坦なトーラス T^{2n} を格子間隔 a の
正方格子で粗視化。ファイバーはそのまま。

全空間を E^a と書き、区別する。

リンク変数: $U_k(\mathbf{x}) = P \exp \left[i \int_0^a A_k(\mathbf{x}') dl \right],$

$$D_W = \sum_i \left[\gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{a}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right]$$

$$a \nabla_i^f \psi(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - \psi(\mathbf{x}) \quad \text{Wilson term}$$

$$a \nabla_i^b \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - U_i^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$$

Elliptic estimate

連続理論 For any $\phi \in \Gamma(E)$ and i ,

$$\|D_i \phi\|^2 \leq c(\|\phi\|^2 + \|D\phi\|^2)$$

となる constant c が存在するはずである。

個々の共変微分が大きい時、 D も必ず大きい。

格子理論では非自明。

$$\|\nabla_i^f \phi\|^2 \leq c(\|\phi\|^2 + \|D_W \phi\|^2)$$

波数が大きいのに D_W が小さい固有値を持つダブラーがあると成り立たない。

-> Wilson 項が数学的にも重要な役割

$K^1(I, \partial I)$ の定義

Hilbert 束を考える。

底空間 $I =$ 質量 m の動く区間 $[-M, M]$

その境界 ∂I は $\pm M$ の 2 点。

ファイバー $H =$ Dirac 演算子の作用する Hilbert space

D_m : 質量 m でラベルされる massive Dirac 演算子の 1-parameter family.

ただし $D_{\pm M}$ はゼロ固有値を持たない。

群の要素を $\{H, D_m\}$ の同値類をとったものとする。

同値 = Spectral flow が等しい。

$K^1(I, \partial I)$ の定義

群の演算

$$\{(H^1, D_m^1)\} \pm \{(H^2, D_m^2)\} = \{(H^1 \oplus H^2, \begin{pmatrix} D_m^1 & \\ & \pm D_m^2 \end{pmatrix})\}$$

単位元 $\{H, D_m\} | \text{Spec.flow}=0$

示すべきこと: $\{(H^{\text{cont.}}, \gamma(D + m))\}$

と $\{(H^{\text{lat.}}, \gamma(D_W + m))\}$ (有限次元)

について、差をとり、

合成&摂動を加えた $\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D + m) & f_a \\ f_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$

のSpectral flow がゼロになる。

f_a の構成

$$f_a : H^{\text{lat.}} \rightarrow H^{\text{cont.}}$$

有限次元の格子点上のベクトルから無限次元の continuous x 上のベクトルを内挿して作る必要がある。

$$f_a \phi^{\text{lat.}}(x) = \sum_{l \in C_x} \beta(x-l) P(x-l) \phi^{\text{lat.}}(l)$$

C_x : x を含む格子の hyper cube. l : 格子点の座標

$$P(x-l) = P \exp \left[i \int_l^x dx'^i A_i(x') \right] \quad \text{Wilson line.}$$

$\beta(x-l)$: $x=l$ で 1. 単位格子間隔離れると線形にゼロになる weight function s.t. $\sum_{l \in C_x} \beta_l(x) = 1$. **1の分割。**

f_a^* の構成

$$f_a^* : H^{\text{cont.}} \rightarrow H^{\text{lat.}}$$

$$\text{は } f_a^* \phi^{\text{cont.}}(l) = \int_{y \in C_l} dy \beta(l-y) P(l-y) \phi^{\text{cont.}}(y)$$

とすればよい。

注) $f_a^* f_a$ は元に戻らず、nearest-neighbor sites の情報が含まれるので non-local (Wilson line がくっついているので gauge 共変性は無事。)

$f_a f_a^*$ の連続極限が満たす性質

1. 任意の $\phi^{\text{lat.}}$ について

$\lim_{a \rightarrow 0} f_a \phi^{\text{lat.}}$ はある $\phi_0^{\text{cont.}} \in L_1^2$ に弱収束する。

注) L_1^2 は一回微分まで2乗可積分な $H^{\text{cont.}}$ の部分空間

2. $\lim_{a \rightarrow 0} f_a \gamma(D_W + m) \phi^{\text{lat.}}$ は $\gamma(D + m) \phi_0^{\text{cont.}} \in L^2$

に弱収束する。

3. $\|f_a^* f_a \phi^{\text{lat.}} - \phi^{\text{lat.}}\|_{L^2}^2 < ca^2 \|\phi^{\text{lat.}}\|_{L_1^2}^2$

となる c が存在。

4. 任意の $\phi^{\text{cont.}} \in L_1^2$ について $\lim_{a \rightarrow 0} f_a f_a^* \phi^{\text{cont.}}$

はある $\phi_0^{\text{cont.}} \in L_1^2$ に弱収束する。かつ

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a f_a^* \phi_0^{\text{cont.}} = \phi_0^{\text{cont.}}$$

弱収束と強収束

あるベクトル空間の点列 v_j が v_∞ に弱収束するとは、任意の w に対して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle (v_j - v_\infty), w \rangle = 0.$$

注) $\lim_{j \rightarrow \infty} (v_j - v_\infty)(x) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e^{ikx}$ でも成り立ってしまう。

強収束は $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v_\infty\|^2 = 0.$

Rellich の定理

L^2_1 弱収束ならば L^2 強収束である。

Contents

✓ 1. Introduction

物理屋フレンドリなAS指数を格子理論で構成したい。

✓ 2. Spectral flow

Massless=点で数えるよりもmassive=線で数えるほうが楽。

✓ 3. 数学的準備

K群の元として合成されたDirac演算子がgapを持てば完成。

4. 主定理とその証明

5. 先行研究との比較

6. まとめ

主定理

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D + m) & t f_a \\ t f_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$$

が $m \in [-M, M]$, $t \in (0, 1]$
の範囲のいたるところで可逆となる有限の格子間隔
が存在する。[Spec.flow=0の十分条件]

$\Rightarrow \gamma(D + m), \gamma(D_W + m)$ のspec.flowが一致。

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \eta(\gamma(D - M))^{\text{PV reg.}} = \frac{1}{2} \eta(\gamma(D_W - M))$$

物理屋フレンドリな指数が有限格子間隔で一致。

証明の方針=背理法

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \gamma(D + m) & t f_a \\ t f_a^* & -\gamma(D_W + m) \end{pmatrix}$$

がどれだけ格子間隔を小さくしてもゼロ固有値を持つとして矛盾を導く。

⇒ 格子間隔の(単調に減少させる)列 $\{a_j\}$

に対し、
$$\begin{pmatrix} \gamma(D + m_j) & t_j f_{a_j} \\ t_j f_{a_j}^* & -\gamma(D_W^{a_j} + m_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = 0$$

が存在し続ける。

弱極限

$$\text{左から} \begin{pmatrix} 1 \\ f_{a_j} \end{pmatrix}$$

をかけて連続極限をとると、fの性質1-4より

$$\begin{pmatrix} \gamma(D + m_\infty) & t_\infty \\ t_\infty & -\gamma(D + m_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} = 0$$

が得られる。

$$\hat{D}_\infty^2 = D^2 + m_\infty^2 + t_\infty^2$$

$$\text{なので } m_\infty = t_\infty = 0.$$

u_∞, v_∞ は、

L_1^2 弱収束

L^2 強収束

(Rellichの定理)

$m \in [-M, M], t \in (0, 1]$ の仮定と矛盾。

Contents

✓ 1. Introduction

物理屋フレンドリなAS指数を格子理論で構成したい。

✓ 2. Spectral flow

Massless=点で数えるよりもmassive=線で数えるほうが楽。

✓ 3. 数学的準備

K群の元として合成されたDirac演算子がgapを持てば完成。

✓ 4. 主定理とその証明

合成されたDirac演算子がgapを持つことを背理法で証明。

5. 先行研究との比較

6. まとめ

格子ゲージ理論におけるカイラル対称性

Nielsen-Ninomiyaの定理 [1981]

$\gamma_5 D + D \gamma_5 = 0$, のときフェルミオンダブリング。

Ginsparg-Wilson 関係式 [1982]

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D. \quad a : \text{lattice spacing}$$

ならばNN定理を回避可能。

オーバーラップDirac演算子 [Neuberger, 1998]

$$D_{ov} = \frac{1}{a} \left(1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right) \quad H_W = \gamma_5 (D_W - M). \quad M = 1/a.$$

周期的格子(T^4)でカイラル対称性を実現!

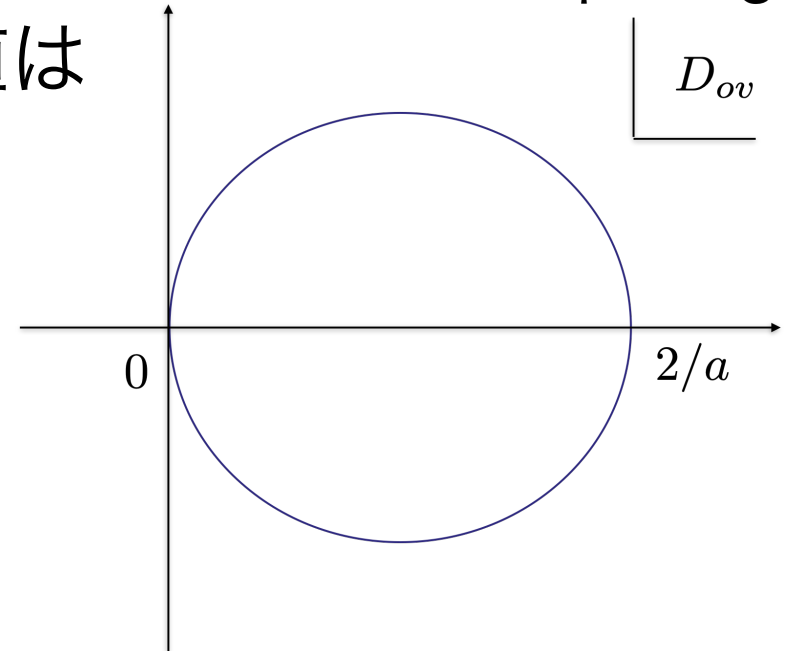
[先行研究] 格子上のAtiyah-Singer 指数

a : lattice spacing

オーバーラップ演算子の固有値は
半径 $1/a$ の円状に分布。

複素固有値は”カイラル”対称性
より

$$\gamma_5 \left(1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right)$$



の±のペアで現れる(トレースに効かない)。
実固有値のうち、 $2/a$ (ダブラーの極) は効かない。

$$\text{Tr} \gamma_5 \left(1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right) = \text{Tr}_{\text{zeros}} \gamma_5.$$

しかしAS指数をよくみると、

$$\text{Ind}(D_{ov}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \gamma_5 \left(1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right) \quad D_{ov} = \frac{1}{a} \left(1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right)$$

$$H_W = \gamma_5 (D_W - M) \quad M = 1/a$$

定義に入れて整理すると、 η 不変量が出てくる！

$$= -\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} = -\frac{1}{2} \eta(\gamma_5 (D_W - M))!$$

注) これで指数が数えられることは Itoh-Iwasaki-Yoshie 1982, で(経験的に)知られていたがその数学的意義は知られていなかった。 Cf.) Adams 2001

つまり、overlap Dirac 演算子の指数と物理屋フレンドリな指数は格子理論で等価。

Contents

✓ 1. Introduction

物理屋フレンドリなAS指数を格子理論で構成したい。

✓ 2. Spectral flow

Massless=点で数えるよりもmassive=線で数えるほうが楽。

✓ 3. 数学的準備

K群の元として合成されたDirac演算子がgapを持てば完成。

✓ 4. 主定理とその証明

合成されたDirac演算子がgapを持つことを背理法で証明。

✓ 5. 先行研究との比較

物理屋フレンドリなAS指数はoverlap Dirac 指数と同じもの

6. まとめ

まとめ

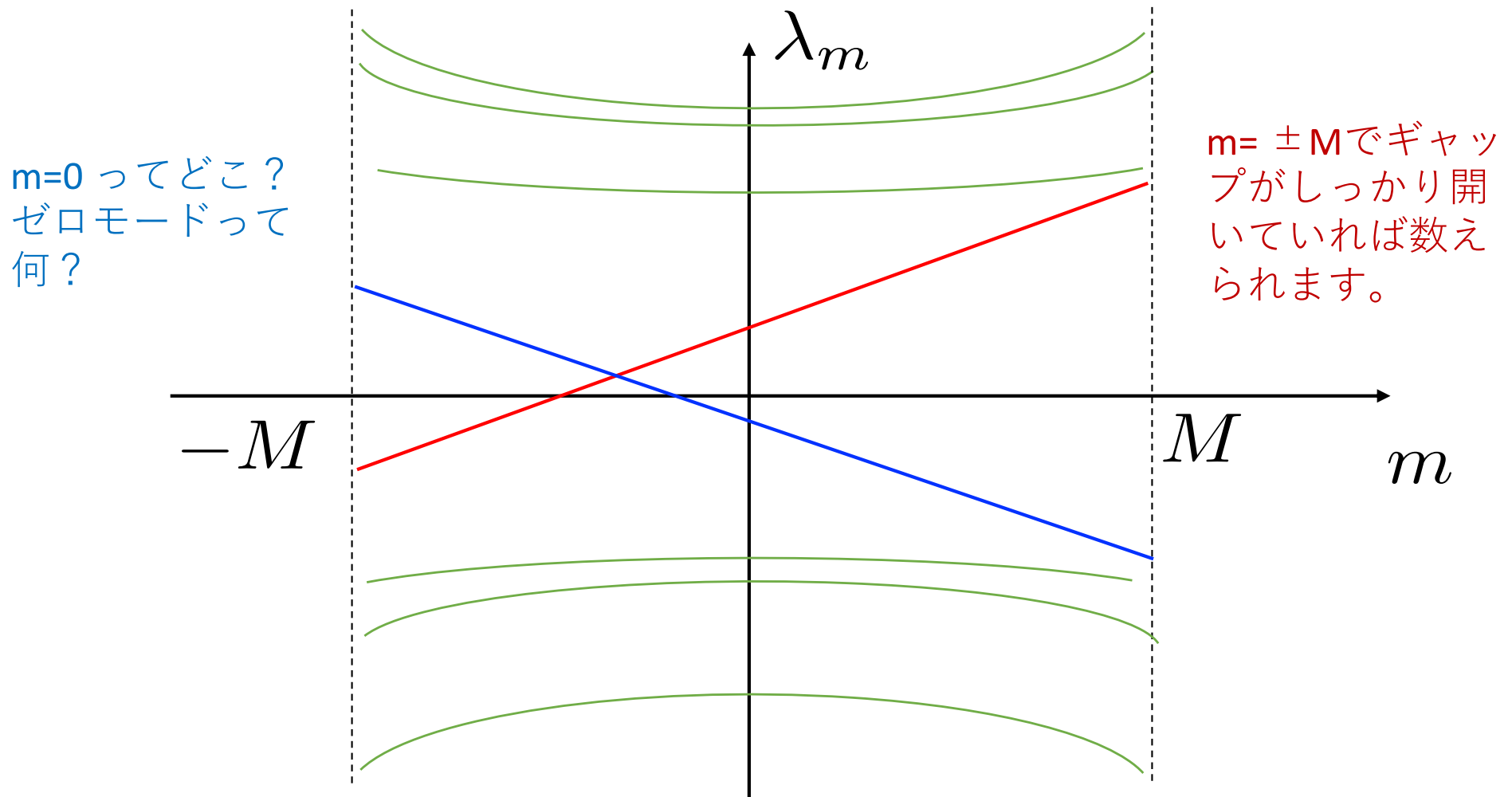
Atiyah-Singerの指数は質量を持つフェルミオン(with PV reg.)でも理解できる:

$$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D - M)) + \frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D + M))$$

2n次元トーラス上の格子理論のWilson Dirac 演算子は有限の格子間隔で連続理論と一致する指数を持つことを数学的に証明。

$$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - M))$$

格子正則化でカイラル対称性が破れてしまっても、点(**massless**)では数えられなくても、線(**massive**)では数えられる。



Backup slides

Out look [線で数える指数]

奇数次元のmod-2 指数(WittenのSU(2)anomaly を説明)も質量を持つDirac演算子を用いて定式化可能。

[F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]

	continuum	lattice	
AS	$\text{Sf}(\gamma_5(D - M))$	$\text{Sf}(\gamma_5(D_W - M))$	◎
APS	$\text{Sf}(\gamma_5(D - \varepsilon M))$	$\text{Sf}(\gamma_5(D_W - \varepsilon M))$	△
mod-two AS	$\text{Sf}' \begin{pmatrix} D - M & \\ & -(D - M)^\dagger \end{pmatrix}$	$\text{Sf}' \begin{pmatrix} D_W - M & \\ & -(D_W - M)^\dagger \end{pmatrix}$	△
mod-two APS	$\text{Sf}' \begin{pmatrix} D - \varepsilon M & \\ & -(D - \varepsilon M)^\dagger \end{pmatrix}$	$\text{Sf}' \begin{pmatrix} D_W - \varepsilon M & \\ & -(D_W - \varepsilon M)^\dagger \end{pmatrix}$	△

Sf' = mod-two spectral flow : counting zero-crossing pairs from PV op.