

トポロジカル欠損による カラー閉じ込め —最大可換ゲージにおける 残留局所ゲージ対称性の回復

福島直樹 (千葉大・理)

共同研究: 近藤慶一 (千葉大・理)

N. Fukushima and K.-I. Kondo, 2023, [arXiv:2304.14008 [hep-th]]

- クォーク閉じ込めは，磁気単極子と反単極子の凝縮が起こる双対超伝導描像に基づいて，良く理解されている。
 - グルーオン閉じ込めは，この双対超伝導描像ではあまり理解されていない。
- 九後-小嶋カラー閉じ込め判定基準(1979)を思い出す。
- 九後-小嶋カラー閉じ込め判定基準(KO基準)が満たされるならば，全てのカラーを持った粒子は観測されない。
 - KO基準はローレンスゲージ $\partial^\mu \mathcal{A}_\mu = 0$ のみで導かれ，明らかにゲージに依存。
- 他のゲージ固定条件へ直接適用することはできない。

- ゲージ固定後に残る対称性として**残留局所ゲージ対称性**を考えられる。
- これは摂動的真空では”自発的”に破れているが、これに伴う**無質量NG極が現れない条件**を作ることができる。
 - **真の真空では残留局所ゲージ対称性が回復する。**
- KO基準は、ローレンスゲージにおいては、ゲージ変換関数 $\omega(x)$ が座標 x に線形な**残留局所ゲージ対称性の回復条件**としても得られる。(畑(1982))
($\delta_\omega A_\mu(x) = \partial_\mu \omega(x)$ より ω は $\partial^\mu \partial_\mu \omega(x) = 0$ を満たすべきである)
- 残留局所ゲージ対称性の回復条件は、**トポロジカル配位**を含んだより一般のゲージ変換にも拡張可能である。(近藤・福島(2022))
- **最大可換ゲージ**においても回復を実現でき、閉じ込めの理解も可能。
 - 本講演では、**運動量空間の視点から**”可換”ゲージ理論を考え、対称性の回復における**トポロジカル配位の影響**を調べる。

- “可換”ゲージ理論における対称性の回復条件
- 経路積分に寄与するトポロジカル配位
- 回復条件に関する一般的考察
- 回復条件の実際の計算
- まとめ

- 不定計量状態空間 $\mathcal{V}$ 上での明白にローレンツ共変な演算子形式において、(冪零)BRST対称性の存在を仮定する。
- $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ は準正定値計量 $\langle \text{phys} | \text{phys} \rangle \geq 0$ を持った不定計量空間の部分空間、物理的状态空間であるとする。 Q_B をBRSTチャージとして

$$\mathcal{V}_{\text{phys}} = \{ |\text{phys}\rangle \in \mathcal{V}; Q_B |\text{phys}\rangle = 0 \} \subset \mathcal{V} \quad (1)$$

- リー代数値量に対角カルタン成分と残りの非対角成分に分ける。
- 例えばリー代数 $su(N)$ の生成子 T_A ($A = 1, \dots, N^2 - 1$)によって書けるゲージ場 $\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu^A(x) T_A$ は

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu^A(x) T_A = a_\mu^j(x) H_j + A_\mu^a(x) T_a \quad (2)$$

と分解される。 H_j はカルタン部分代数の生成子で、 T_a は残りの生成子である。

- 添字 $j, k, l, \dots$ は対角成分をラベルし、添字 $a, b, c, \dots$ は非対角成分をラベルする。

- ゲージ固定条件として最大可換ゲージを選ぶ。

$$\left(\mathcal{D}^\mu[a]A_\mu(x)\right)^a := \partial^\mu A_\mu^a(x) + gf^{ajb}a^{\mu j}(x)A_\mu^b(x) = 0 \quad (3)$$

- MAゲージは対角成分を固定しない。対角成分にはさらにローレンスゲージを課す。

$$\partial^\mu a_\mu^j = 0 \quad (4)$$

- 最大可換ゲージのラグランジアンは以下である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{GF+FP}} \\ \mathcal{L}_{\text{inv}} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^A\mathcal{F}^{\mu\nu A} + \mathcal{L}_{\text{matter}}(\psi, D_\mu\psi) \\ \mathcal{L}_{\text{GF+}} &= -i\delta_B\left\{\bar{C}^a\left(\mathcal{D}^\mu[a]A_\mu + \frac{\alpha}{2}B\right)^a\right\} - i\delta_B\left\{\bar{c}^j\left(\partial^\mu a_\mu + \frac{\beta}{2}b\right)^j\right\} \end{aligned} \quad (5)$$

- リー代数値変換関数 $\omega(x)$ による局所ゲージ変換を考える。

$$\begin{aligned}\delta^\omega \mathcal{A}_\mu(x) &= \mathcal{D}_\mu \omega(x) := \partial_\mu \omega(x) + g \mathcal{A}_\mu(x) \times \omega(x), \\ \delta^\omega \varphi(x) &= ig \omega(x) \varphi(x), \quad \delta^\omega \mathcal{B}(x) = g \mathcal{B}(x) \times \omega(x), \\ \delta^\omega \mathcal{C}(x) &= g \mathcal{C}(x) \times \omega(x), \quad \delta^\omega \bar{\mathcal{C}}(x) = g \bar{\mathcal{C}}(x) \times \omega(x)\end{aligned}\tag{6}$$

残留ゲージ対称性なので, $\omega^j(x)$ はラプラス方程式を満たすべきである。

- 局所ゲージ変換(6)に伴うネーターカレント $\mathcal{J}_\omega^\mu$ が計算でき, その発散は変換(6)の下でのラグランジアン密度の変化に等しい。

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{J}_\omega^\mu &= \delta^\omega \mathcal{L} = \delta^\omega \mathcal{L}_{\text{GF+FP}} \\ &= i\delta_B \partial_\mu \bar{c}^j \partial^\mu \omega^j + i\delta_B \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu [\mathcal{A}] \bar{\mathcal{C}})^a \omega^a + i\delta_B (\mathcal{D}_\mu [\mathcal{A}] \bar{\mathcal{C}})^a \partial^\mu \omega^a\end{aligned}\tag{7}$$

→ 局所ゲージカレント $\mathcal{J}_\omega^\mu$ は(BRST変換 δ_B exactで)物理的部分空間で保存される。(近藤・福島(2022))

§ ”可換”ゲージ理論における対称性の回復条件

8/18

- 以下, 可換部分(対角成分)に限定して考える。
- 対称性の回復条件は無質量NG極が現れない条件として書け, 場 $\Phi^\ell(y) = \Phi_1^{\ell_1}(y_1) \cdots \Phi_n^{\ell_n}(y_n)$ のセクターでは, 以下のWard-高橋関係式を見れば良い。

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{p \rightarrow 0} i \int d^D x e^{ipx} \partial_\mu^x \langle J_\omega^\mu(x) \Phi^\ell(y) \rangle \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{a=1}^n e^{ipy_a} \left\langle \Phi_1^{\ell_1}(y_1) \cdots \delta^\omega \Phi_a^{\ell_a}(y_a) \cdots \Phi_n^{\ell_n}(y_n) \right\rangle + i \int d^D x e^{ipx} \langle \partial_\mu^x J_\omega^\mu(x) \Phi^\ell(y) \rangle
 \end{aligned} \tag{8}$$

- $\langle \delta_B F \rangle = 0$ やSchwinger-Dyson方程式 $\int d\mu \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} e^{iS} F = 0$ を用いると, (5)より

$$\begin{aligned}
 i \langle \partial_\mu^x J_\omega^\mu(x) \Phi^\ell(y) \rangle &= -\partial^\mu \omega^j(x) \left\langle \delta_B \left(\partial_\mu \bar{c}^j(x) \right) \Phi^\ell(y) \right\rangle = -\partial^\mu \omega^j(x) \langle \partial_\mu \bar{c}^j(x) \delta_B \Phi^\ell(y) \rangle \\
 &= -\partial^\mu \omega^j(x) \left[\frac{\partial_\mu^x \partial_\nu^x}{\partial_x^2} \langle \partial^\nu \bar{c}^j(x) \delta_B \Phi^\ell(y) \rangle + \left(g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu^x \partial_\nu^x}{\partial_x^2} \right) \langle \partial^\nu \bar{c}^j(x) \delta_B \Phi^\ell(y) \rangle \right] \\
 &= \partial^\mu \omega^j(x) \frac{\partial_\mu^x}{\partial_x^2} \left\langle \frac{\delta}{\delta c^j(x)} \delta_B \Phi^\ell(y) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{9}$$

→

$$\boxed{ \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{a=1}^n e^{ipy_a} \left\langle \Phi_1^{\ell_1}(y_1) \cdots \delta^\omega \Phi_a^{\ell_a}(y_a) \cdots \Phi_n^{\ell_n}(y_n) \right\rangle + i \int d^D x e^{ipx} \partial^\mu \omega^j(x) \frac{\partial_\mu^x}{\partial_x^2} \left\langle \frac{\delta}{\delta c^j(x)} \delta_B \Phi^\ell(y) \right\rangle } \tag{10}$$

- ゲージ場 n 粒子セクター: $\Phi(y) = a_{\rho_1}^{\ell_1}(y_1) \cdots a_{\rho_n}^{\ell_n}(y_n)$ に対して

$$0 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{a=1}^n \int d^D x e^{ipx} \partial^\mu \omega^{\ell_a}(x) \left(g_{\mu\rho_a} - \frac{\partial_\mu^x \partial_{\rho_a}^x}{\partial_x^2} \right) \delta^D(x - y_a) \\ \times \left\langle a_{\rho_1}^{\ell_1}(y_1) \cdots a_{\rho_{a-1}}^{\ell_{a-1}}(y_{a-1}) a_{\rho_{a+1}}^{\ell_{a+1}}(y_{a+1}) \cdots a_{\rho_n}^{\ell_n}(y_n) \right\rangle \quad (11)$$

- クォーク-反クォーク n 対: $\Phi(y) = \psi(y_1) \cdots \psi(y_n) \bar{\psi}(z_1) \cdots \bar{\psi}(z_n)$ に対して

$$0 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{a=1}^n \int d^D x e^{ipx} \left(\omega^j(x) + \partial^\mu \omega^j(x) \frac{\partial_\mu^x}{\partial_x^2} \right) (\delta^D(x - y_a) - \delta^D(x - z_a)) \langle \Phi \rangle \quad (12)$$

トポロジカル配位の運動量表示

- 対称性の回復とトポロジカル配位の影響を具体的に見るために、 $SU(2)$ で以下の1つの欠陥を持ったトポロジカル配位を採用する。 Q はトポロジカルチャージに対応する。

$$\partial_\mu \omega^j(x) = Q \frac{\eta_{\mu\nu}^j x^\nu}{x^2} h(x^2) \quad (Q \propto g^{-1}, j = 3, \mu, \nu = 1, 2, \dots, D) \quad (13)$$

- $h(x^2) \equiv 1$ のとき、(13)は、
 $D = 2$ のAbrikosov-Nielsen-Olesenボルテックス、
 $D = 3$ のWu-Yangモノポール、
 $D = 4$ のAlfaro-Fubini-Furlanメロン などを含む。

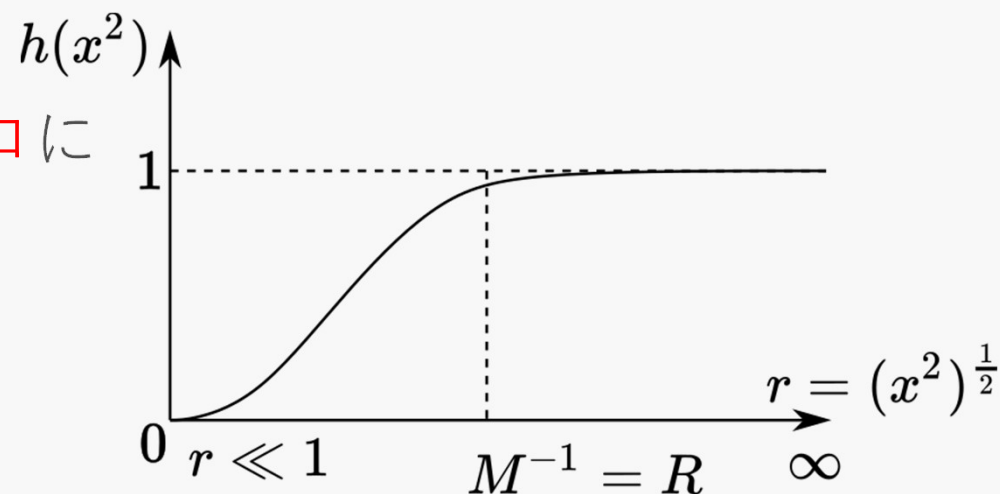
作用の発散(UV発散)

- $h(x^2) \equiv 1$ のとき, トポロジカル配位(13)は $x \rightarrow 0$ で
ユークリッド作用 S_E を発散させてしまう。

→ 経路積分に効くには, $x \rightarrow 0$ で適切に $h(x^2) \rightarrow 0$ となる必要がある。

$$e^{-S_E} > 0 \Leftarrow S_E < \infty \quad (14)$$

- S_E を有限にするには
 $h(x^2)$ は $r \ll 1$ で $r^{2\delta}$ ($\delta > 1/4$) 程度でゼロに向かい,
 $r \gg 1$ では急速に1に向かう
($D = 2$: 近藤(2018),
 $D = 3$: 西野 他(2018))



対称性の回復とトポロジカル配位

- 簡単のため, $SU(2)$ で, ゲージ場1粒子セクター $\Phi(y) = a_\lambda^j(y)$ に限定して考える。

$$I_\lambda := \lim_{p \rightarrow 0} \int d^D x \, e^{ip(x-y)} \partial^\mu \omega^j(x) \left(g_{\mu\lambda} - \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\partial^2} \right) \delta^D(x-y) \quad (15)$$

- 前論文(近藤・福島(2022))では, $h(x^2) \equiv 1$ として”可換”ゲージ理論でも対称性の回復が起こること $I_\lambda = 0$ を示した。

- フーリエ変換

$$\partial_\mu \widetilde{\omega}^j(q) := \int d^D x \, e^{iqx} \partial_\mu \omega^j(x)$$

を用いると

$$I_\lambda = \lim_{p \rightarrow 0} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-i(p-k)y} \partial_\mu \widetilde{\omega}^j(p-k) \left(g_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right), \quad (16)$$

- 並進対称性から $y = 0$ とすると

$$I_\lambda = \lim_{p \rightarrow 0} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \partial_\mu \widetilde{\omega}^j(p-k) \left(g_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right) \quad (17)$$

2つの領域

- $q := p - k$ と置く

$$\widetilde{\partial_\mu \omega^j}(q) := \int d^D x e^{iqx} \partial_\mu \omega^j(x), I_\lambda = \lim_{p \rightarrow 0} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{\partial_\mu \omega^j}(q) \left(g_{\mu\lambda} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right) \quad (17')$$

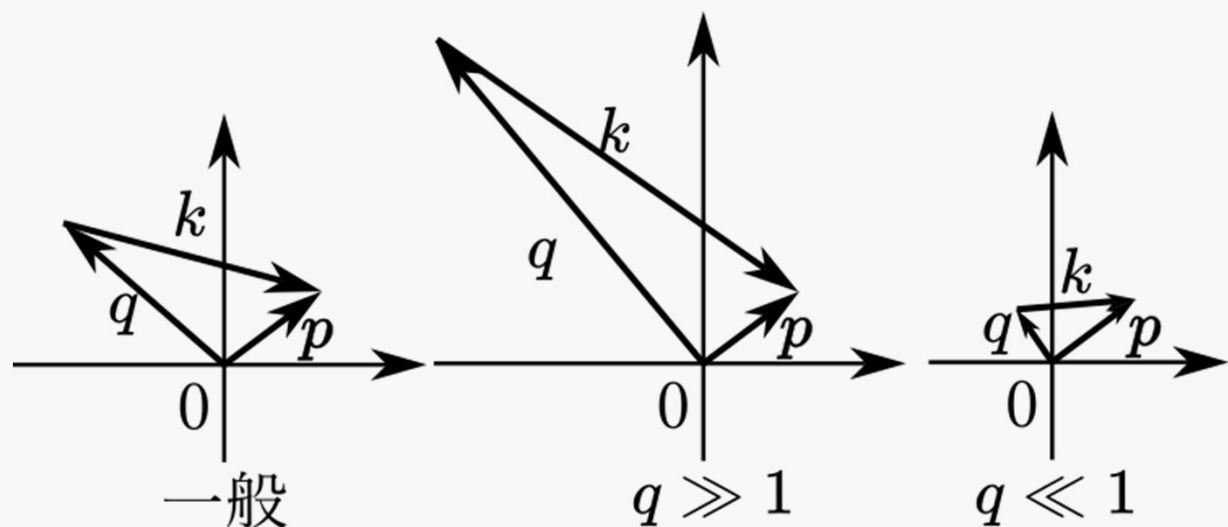
- p を $p \ll 1$ に固定して考える。

- $r = (x^2)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \Rightarrow q \gg 1 \Rightarrow k \gg 1$

→ UV領域(k について)

- $r \gg 1 \Rightarrow q \ll 1 \Rightarrow k \simeq p \rightarrow 0$

→ IR領域(k について)



§ 回復条件に関する一般的考察

14/18

- $h(x^2) \equiv 1$ では, (13)より

$$\widetilde{\partial_\mu \omega^j}(q) := iQ C_D \eta^{j\mu\nu} \frac{q_\nu}{|q|^D}, \quad C_D := 2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$
(18)

- $r \ll 1$ では, $r^{2\delta} (\delta > 1/4)$ を掛けて補正

→ $q \gg 1$ では, $\widetilde{\partial_\mu \omega}(q)$ を $q^{2\delta}$ で割ることに相当する

$$\widetilde{\partial_\mu \omega^j}(q) \sim iQ C_D \eta^{j\mu\nu} \frac{q_\nu}{|q|^{D+2\delta}} \quad (\delta \rightarrow 1)$$
(18')

- これを $\widetilde{\partial_\mu \omega}(q)$ として採用して対称性の回復を議論する。

$$I_\lambda = -iQ \left(\frac{D}{8} + \frac{\delta}{4}\right) \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(1-\delta)\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}+\delta+1)\Gamma(\frac{D}{2}-\delta+1)} \lim_{p \rightarrow 0} \eta_{\lambda\nu}^j p^\nu (p^2)^{-\delta}$$
(19)

- このときUV領域 $k \gg k_R$ では, $p \ll k$ であるから k 積分の前に $p \rightarrow 0$ 極限を取れて,

$$I_\lambda \rightarrow \boxed{-i \frac{Q C_D}{2\delta (4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \lim_{p \rightarrow 0} \eta_{\lambda\nu}^j p^\nu \frac{1}{k_R^{2\delta}}}$$
(19')

→ δ は $\delta > 1/4$ 程度と見てUV発散を避ける

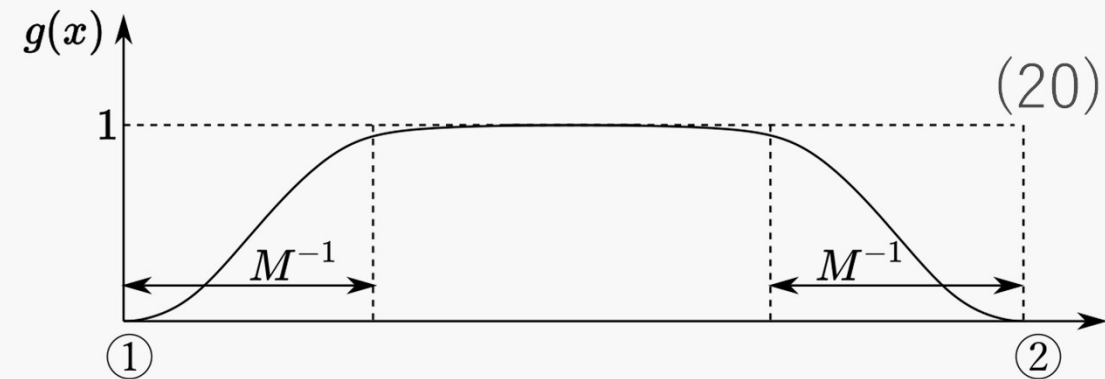
§ 回復条件の実際の計算

15/18

- $q \ll 1$ では $r \gg 1$ に対応するため, $\delta \rightarrow 0$
- 1つのトポロジカル欠陥だけではIR発散は避けられない。
- 複数のトポロジカル欠陥を持つ配位を導入する。

$$\partial_\mu \omega^j(x) = \sum_s^n Q_s \frac{\eta_{\mu\nu}^j (x - x_s)^\nu}{|x - x_s|^2} g(x - x_s) \quad (Q_s \propto g^{-1}, \quad j = 3, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, D)$$

- トポロジカル欠陥同士を十分離すと,
ある欠陥①のIR領域は
他の欠陥②のUV領域にあたる。



→ IR発散の問題はなくなる。

- $D = 3$ では、複数のモノポールから成るトポロジカル欠陥の配位
→ Polyakov(1977)によれば、モノポールプラズマの効果により Debye screeningが起きる
- ゲージ場はMassiveになる。
- $h(x^2)$ の補正の、次元を持ったスケール $M^{-1} = R$ の出現の起源 ($D = 4$ はCallan-Dashen-Gross(1978))
- 複数のモノポールを導入することで、モノポールの凝縮を議論できるようになり、通常期待されているクォークの閉じ込めの描像と合致する。

- “可換”ゲージ(低エネルギー有効場)理論において、一般の多粒子状態、特に、ゲージ場 n 粒子セクターやクォーク-反クォーク n 対に関して対称性の回復条件を書き下した。
- 特に、ゲージ場1粒子セクターについて、運動量空間の視点から、対称性の回復条件の詳細な計算を行った。
- これまで扱ってきたトポロジカル配位は、対称性の回復条件に対し、次元や運動量に依らない発散を生む。
- トポロジカル配位を導入した対称性の回復条件には、IR発散とUV発散の2つの発散がある。
- UV発散に関してはユークリッド作用の発散と関連付けられ、トポロジカル配位を経路積分に効くよう補正することで避けられると推測された。
- IR発散に関しては、複数のトポロジカル欠陥を(十分離して)導入すると、IR領域は他の欠陥のUV領域にあたるため、IR発散は複数のトポロジカル欠陥の導入で避けられると推測された。
- これらはトポロジカル配位が、ユークリッド作用を有限にして経路積分に寄与すると共に、それらの真空凝縮が生じることで閉じ込めが起こることと整合する。

今後の課題

- ゴースト-ゲージ場セクターなど，種類の異なる場のセクターについても対称性の回復条件を調べ，異なる場同士の相互作用についても考慮すべきである。
- 本講演は計算により対称性の回復を示したのではなく，経路積分に寄与するトポロジカル配位を考えた場合の対称性の回復についての物理的描像を示したが，今回の描像に基づき，任意次元 D のトポロジカル欠陥の凝縮について議論する必要がある。