

# スピンネットワークに基づく ハミルトニアン格子ヤン-ミルズ理論 の定式化

早田智也  
慶應義塾大学

共同研究者: 日高義将 (KEK)

文献: TH-Hidaka, arXiv:2305.05950 [hep-lat], arXiv:2306.12324 [hep-lat]

# 目標

$$i\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$$

QCD(YM)の時間発展を解きたい!

# 形式的/技術的な困難

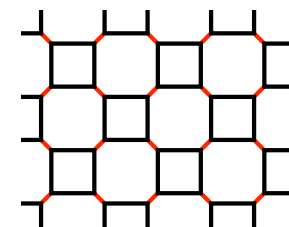
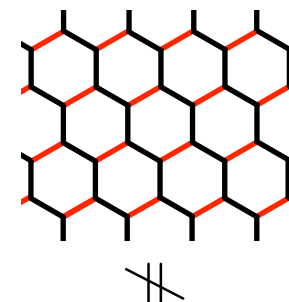
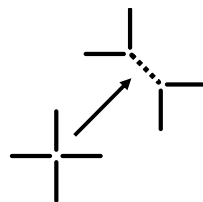
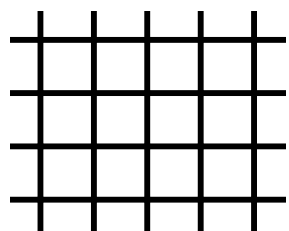
○ゲージ場のヒルベルト空間(ゲージ群)を有限自由度で近似する



○ユニタリ性の問題

- ・リンク変数 (演算子) のユニタリ性
- ・ヒルベルト空間のユニタリ同値性

$$U_a \sim \hat{S}^-$$
$$U_a U_a^\dagger \neq 1$$



○実装の問題

量子群に基づく定式化を提案する！

# SU(N)<sub>k</sub>とグラフの変形ルールI

$d_a$  量子次元

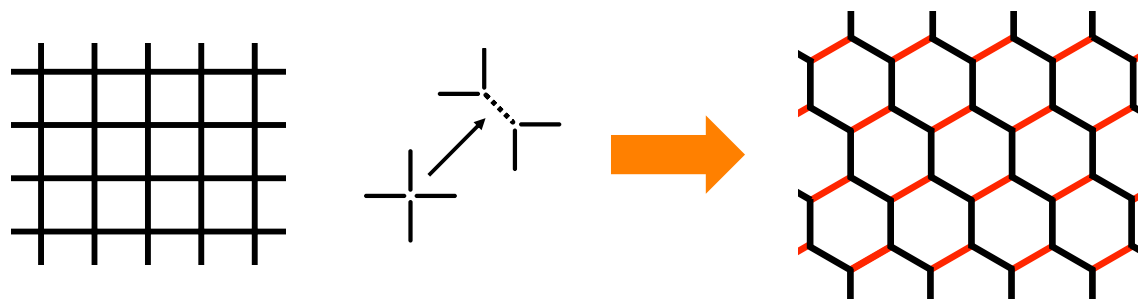
○ Wilson line

$$\sqrt{d_a} U_a = \begin{array}{c} | \\ \hline \uparrow a \\ \hline | \end{array}$$

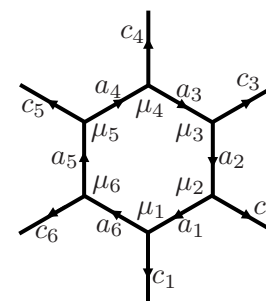
$a = (p_a, q_a, \dots)$  Dynkin index

○ 状態のグラフ表現 (2+1次元のYang-Mills理論)

重複度



$$\prod_{i=1}^6 |a_i\rangle |c_i\rangle |\mu_i\rangle =$$



・ 3点頂点にGauss law (singlet条件)を課す

# SU(N)<sub>k</sub> とグラフの変形ルールII

○ Wilson line

$$\sqrt{d_a} U_a = \begin{array}{c} | \\ \hline \uparrow \\ | \end{array} a$$

$a = (p_a, q_a, \dots)$  Dynkin index

$d_a$  量子次元

Fusion rules

$$a \times b = \sum_c \underline{N_{ab}^c} c$$

○ 変形ルール

$$\begin{array}{c} c' \\ \uparrow \mu' \\ \text{---} \mu \text{---} \\ \uparrow c \end{array} \begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array} = \delta_c^{c'} \delta_\mu^{\mu'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} \begin{array}{c} | \\ \hline \uparrow \\ | \end{array} c$$

$$\begin{array}{c} a \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} b \\ \uparrow \end{array} = \sum_{c, \mu} \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \mu \text{---} \\ \uparrow c \\ \text{---} \mu \text{---} \\ a \quad b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \text{---} \mu \text{---} \text{---} \nu \text{---} \\ \uparrow d \end{array} = \sum_{f, \rho, \sigma} \underline{[F_d^{abc}]} (e, \mu, \nu) (d, \rho, \sigma) \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \text{---} \sigma \text{---} \text{---} f \text{---} \rho \text{---} \\ \uparrow d \end{array}$$

# $SU(N)_k$ とグラフの変形ルールIII

## ○ ユニタリ性

$$[(F_d^{abc})^{-1}]_{(e,\mu,\nu)(d,\rho,\sigma)} = [(F_d^{abc})^\dagger]_{(e,\mu,\nu)(d,\rho,\sigma)} = [F_d^{abc}]_{(d,\rho,\sigma)(e,\mu,\nu)}^*$$

## ○ pentagon方程式

$$\begin{aligned} \sum_{\delta} [F_e^{fcd}]_{(g,\beta,\gamma)(l,\nu,\delta)} [F_e^{abl}]_{(f,\alpha,\delta)(k,\mu,\lambda)} \\ = \sum_{h,\sigma,\psi,\rho} [F_g^{abc}]_{(f,\alpha,\beta)(h,\psi,\sigma)} [F_e^{ahd}]_{(g,\sigma,\gamma)(k,\rho,\lambda)} [F_k^{bcd}]_{(h,\psi,\rho)(l,\nu,\mu)} \end{aligned}$$

- ・ ‘格子間’のユニタリ同値性を保証する

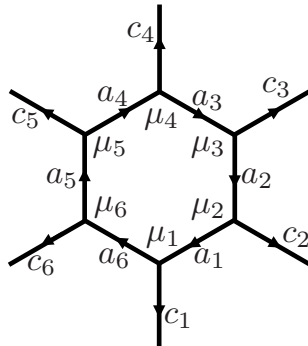
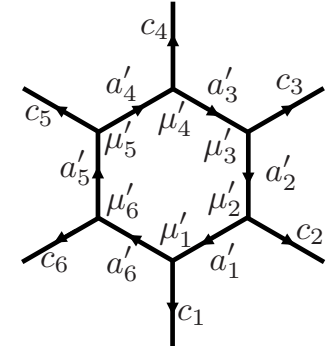
# 量子群に基づく格子ゲージ理論の定式化

○ Kogut-Susskindハミルトニアン

$$H = \sum_{\boldsymbol{x}, \mu} \frac{1}{2} E^{a^2}(\boldsymbol{x}, \mu) - \frac{K}{2} \sum_{p \in P} (\text{tr} U_p + \text{tr} U_p^\dagger)$$

○ 状態への作用(ハニカム格子を採用)

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]

$$\text{tr} U_p = \sum_{\{a'_i, \mu'_i\}} \prod_{i=1}^6 [F_{a'_i}^{c_i a_{i-1} d}]_{(a_i, \mu_i, \mu'_{i+1}), (a'_{i-1}, \mu'_{i-1}, \mu'_i)} (E^a(x, \mu))^2 \uparrow a = C_2(a) \uparrow a$$



# 平均場近似

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]

## ○ 変分波動関数

$$|\Psi\rangle = \prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f} \psi(a_f) \text{tr} U_{a_f}(f) |\Psi_0\rangle$$

## ○ 状態への作用

$$\text{tr} U_{b_f}(f) |\Psi_0\rangle = b_f \circlearrowleft$$

## ○ グラフ(fusion rulesだけ)を使って期待値を計算できる

# 平均場近似

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]

## ○有効ハミルトニアン

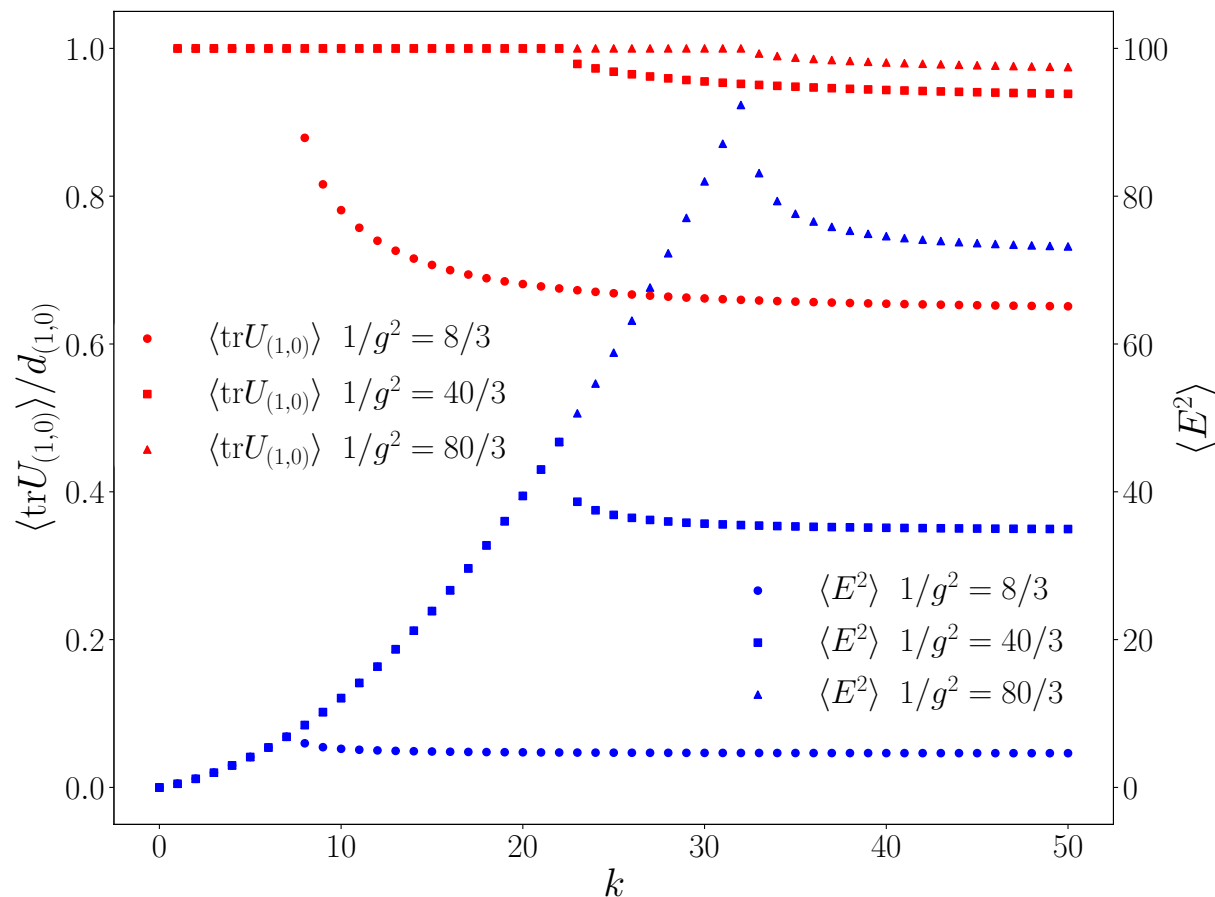
$$\mathcal{H} = \sum_{a,b,c} C_2(c) N_{\bar{a}b}^c \frac{d_c}{d_a d_b} |\psi(a)|^2 |\psi(b)|^2 - \frac{K}{2} \sum_{a,b} \psi^*(a) \left( M_{ab} + M_{ab}^\dagger \right) \psi(b)$$

## ○ 時間依存Ginzburg-Landau方程式 $M_{ab} = N_{(1,0)b}^a$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \psi(\tau, a) = & - \sum_{b,c} (C_2(c) N_{\bar{a}b}^c \frac{d_c}{d_{\bar{a}} d_b} |\psi(\tau, b)|^2 \psi(\tau, a) + C_2(c) N_{\bar{b}a}^c \frac{d_c}{d_a d_{\bar{b}}} |\psi(\tau, b)|^2) \\ & + \frac{K}{2} \sum_{a,b} \left( M_{ab} + M_{ab}^\dagger \right) \psi(\tau, b) - \Lambda \left( \sum_b |\psi(\tau, b)|^2 - 1 \right) \psi(\tau, a) \end{aligned}$$

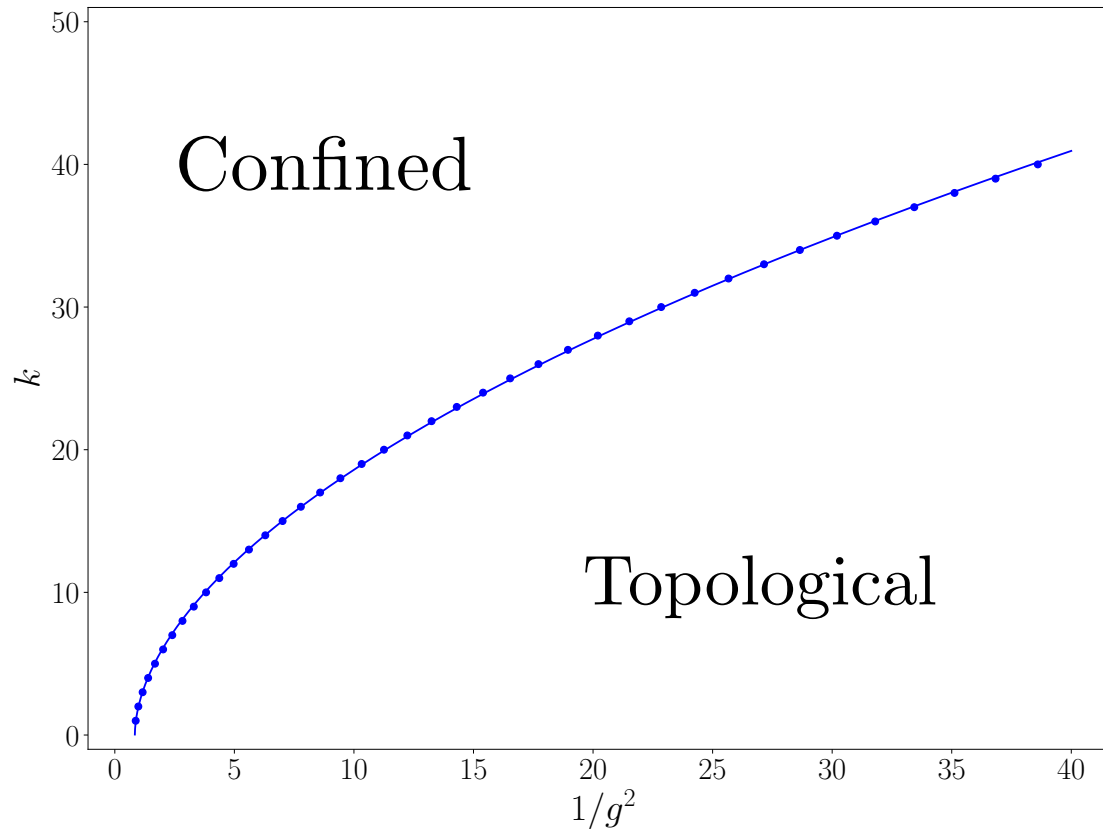
## ○ 虚時間発展を解いて基底状態を調べた

# Cutoff依存性の検証



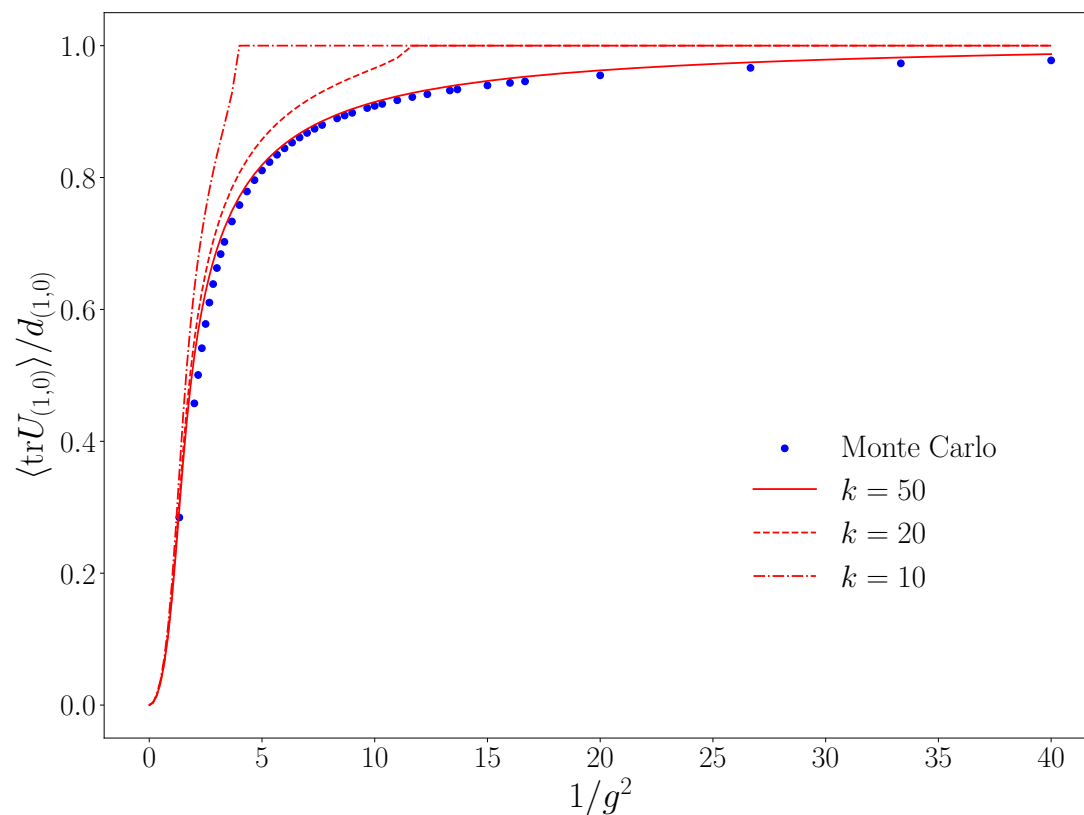
- Cutoffを臨界値より十分大きくとらなければならない

# 相図



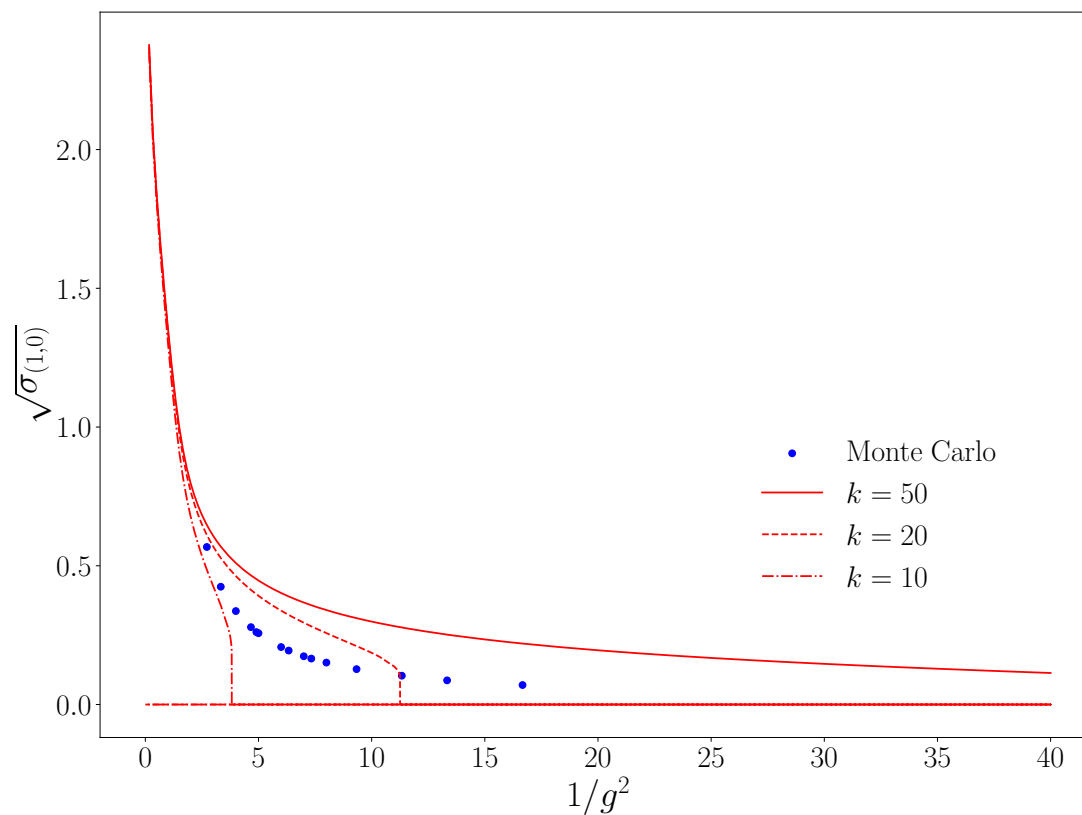
- ・ ゲージ群の有限自由度による近似に伴う人工的な相転移
- ・ 外挿時のcutoff依存性に気を付ける必要がある

# モンテカルロ計算との比較



- cutoffを大きくとればモンテカルロの結果に近づく
- 平均場が定量的にも使えることが分かった

# 張力の結合定数依存性



- 面積則を示せたが定量的には不十分
- 平均場の限界 (Wilson loop同士が相関していない)

# まとめ

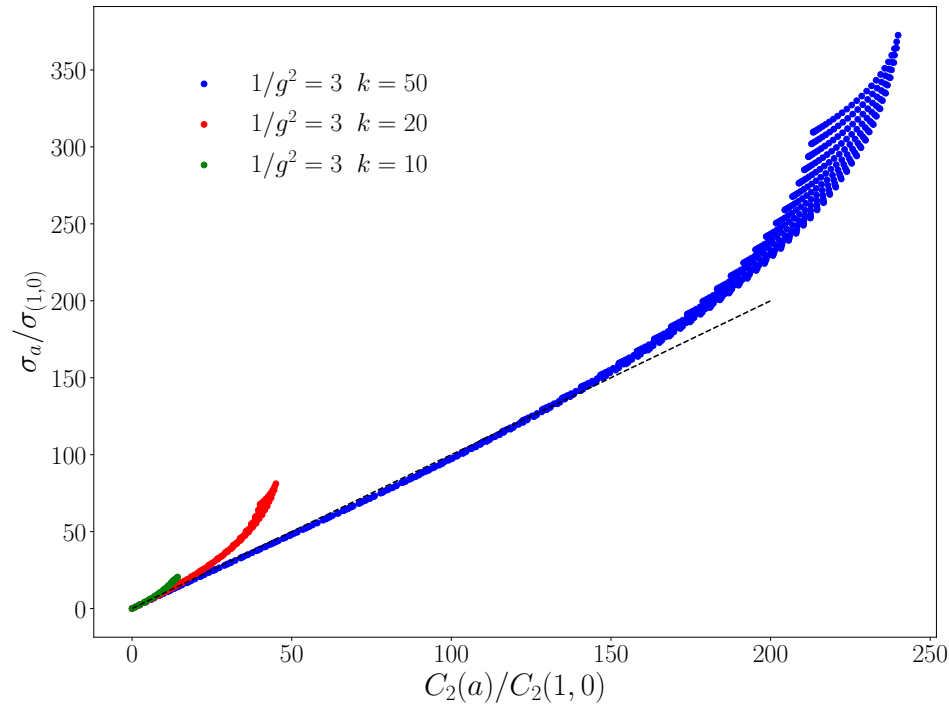
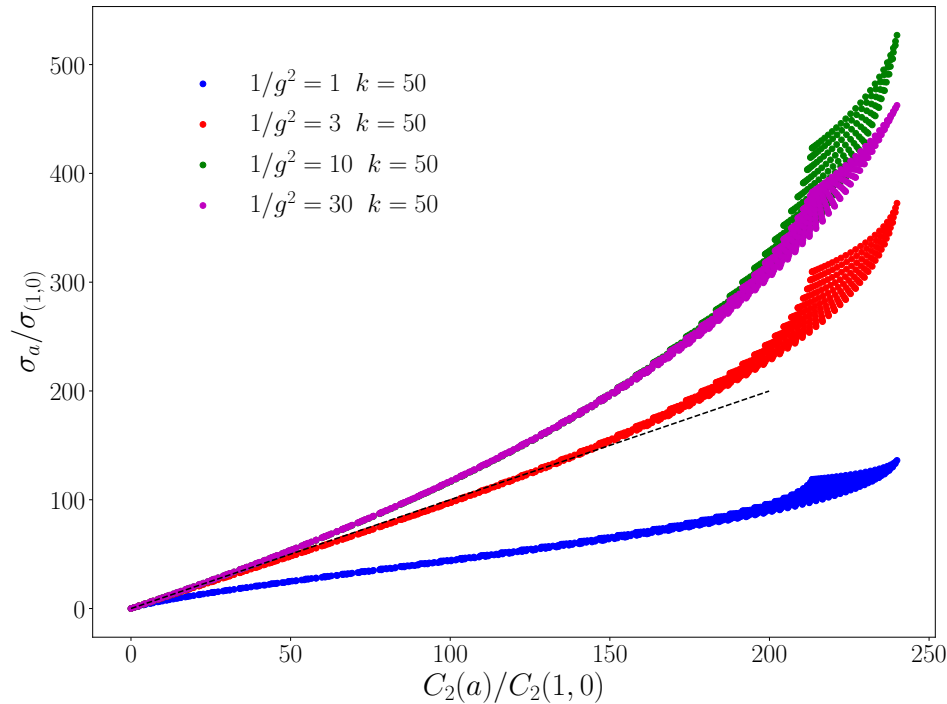
## ○ 量子群に基づく定式化を整備した

- ・ Wilson loop = ユニタリ演算子
- ・ Yang-Mills理論の効率的な実装 → F moveの効率的な実装
- ・ 平均場近似を用いたcutoff依存性の解析

## ○ 今後の展望

- ・ 平均場近似の改善
- ・ 量子計算機/テンソルネットワークを用いた計算の実装
- ・ 時間依存平均場近似による非平衡状態の計算
- ・ 3+1次元への拡張
- ・ 格子量子群ゲージ理論の性質の理解
- ・ フェルミオン

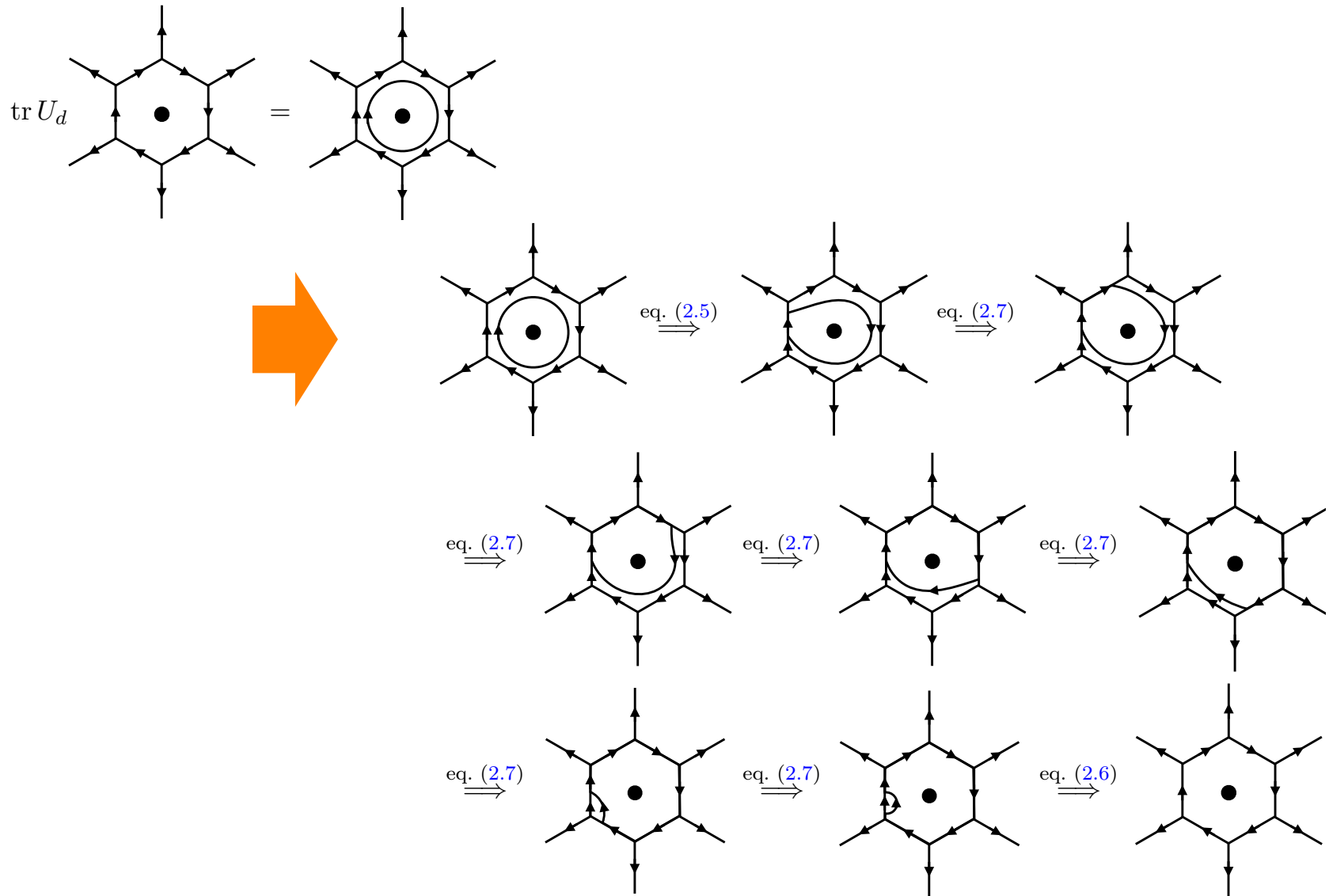
# Casimir scalingの検証



- ・ 弱結合/強結合極限から離れた状態
- ・ cutoff依存性が見えない表現

$$\sigma_a \propto C_2(a)$$

# Wilson loopの計算 I



# Wilson loopの計算 II

$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle$$

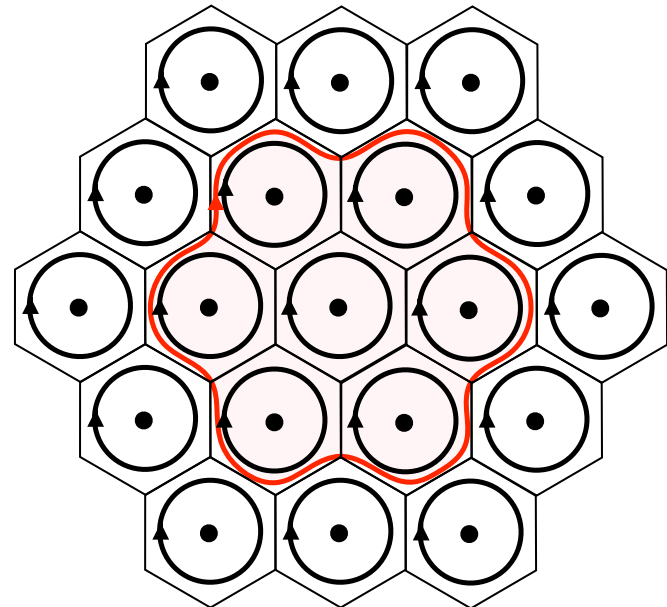
$$= \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \left( \prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f, b_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) \text{tr } U_{\bar{a}_f}(f) \text{tr } U_{b_f}(f) \right) | \Psi_0 \rangle$$

$$\text{tr } U_{b_f}(f) | \Psi_0 \rangle = b_f \circlearrowleft$$

$$= \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \left( \prod_{f' \in \mathcal{F}} \psi^*(a_{f'}) \psi(b_{f'}) N_{\bar{a}_{f'} b_{f'}}^{c_{f'}} \right) \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle$$

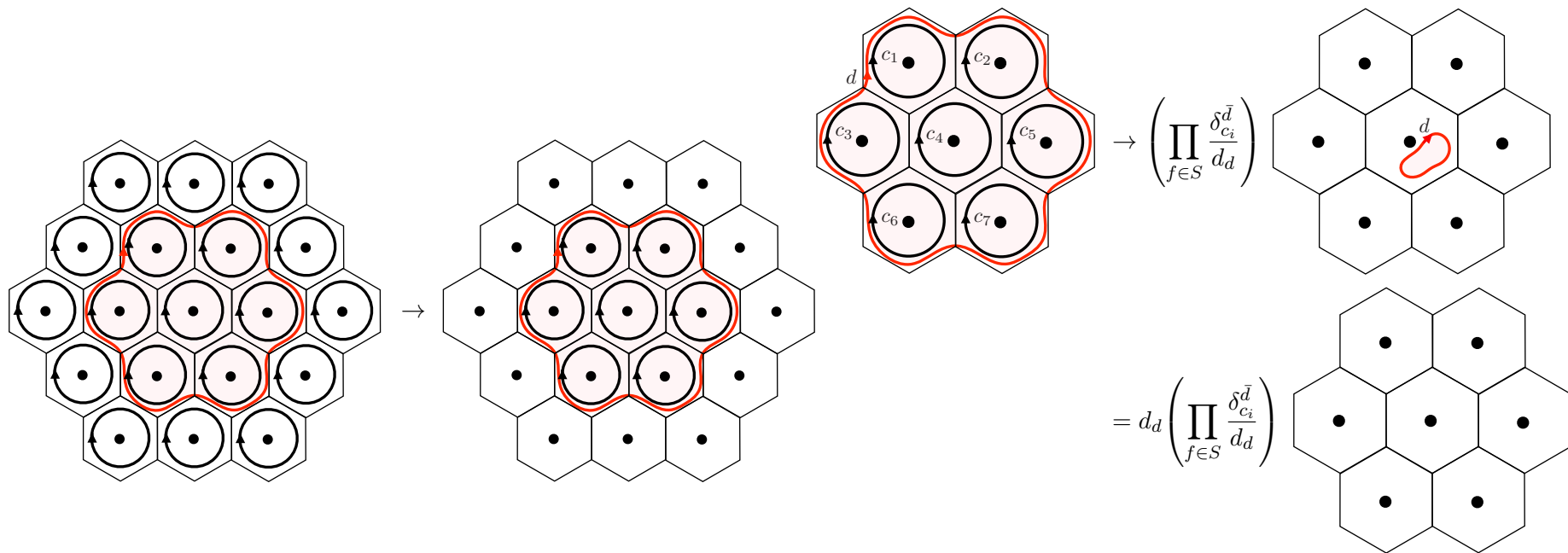
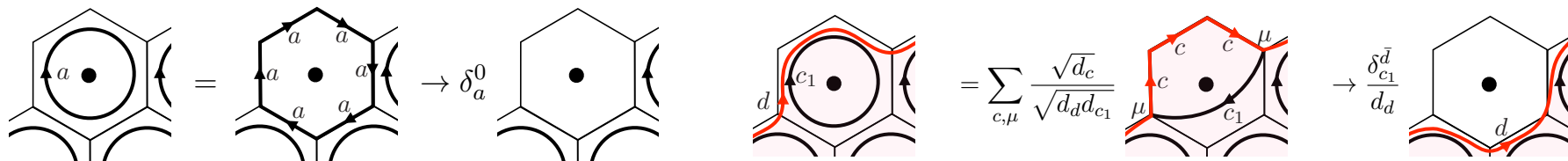


$$U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle =$$



$|\Psi_0\rangle$  と内積をとる

# Wilson loopの計算 III



内側のWilson loopの数を数える

# Wilson loopの計算 IV

$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle$$

$$= \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \left( \prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f, b_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) \text{tr } U_{\bar{a}_f}(f) \text{tr } U_{b_f}(f) \right) | \Psi_0 \rangle$$

$$\text{tr } U_{b_f}(f) | \Psi_0 \rangle = b_f \circlearrowleft$$

$$= \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \left( \prod_{f' \in \mathcal{F}} \psi^*(a_{f'}) \psi(b_{f'}) N_{\bar{a}_{f'} b_{f'}}^{c_{f'}} \right) \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle$$



$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle = d_d \prod_{f \in S} \sum_{a_f, b_f, c_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) N_{\bar{a}_f b_f}^{c_f} \frac{\delta_{c_f}^{\bar{d}}}{d_d}$$

$$= d_d \left( \frac{\sum_{a,b} N_{db}^a \psi^*(a) \psi(b)}{d_d} \right)^{|S|}$$

$$= d_d \exp(-|S| \sigma_d)$$

$$\sigma_d := \ln \frac{d_d}{\sum_{a,b} N_{db}^a \psi^*(a) \psi(b)}$$