

Hairy AdS black holes with Robin boundary conditions

石井 貴昭（立教大学）

arXiv: 2304.02267 [hep-th]

共同研究者：原田知広(立教)・片桐拓弥(NBI)・棚橋典大(中央)

2023年8月4日 場の理論と弦理論2023

本研究

漸近global AdS時空で、スカラー場にRobin境界条件を課したホログラフィック超伝導模型を調べる。

模型

$(8\pi G_N=1)$

スカラー質量 $m^2 = -2$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D\phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \right)$$

スカラー場の漸近形： $\phi = \frac{\phi_1}{r} + \frac{\phi_2}{r^2} + \dots$

Robin境界条件： $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0 \rightarrow \zeta = \cot \frac{\phi_1}{\phi_2}$

Global AdS, $\phi \neq 0$ の解

(μ : U(1)化学ポテンシャル)

	$\mu=0$	$\mu>0$
ホライズンない	中性 boson star	荷電 boson star
ホライズンある	中性 hairy BH	荷電 hairy BH

- $\phi=0$ の解 (AdS, RN-AdS BH) もある
- 4パラメータ (μ, T_H, ζ, q) の相構造を調べる

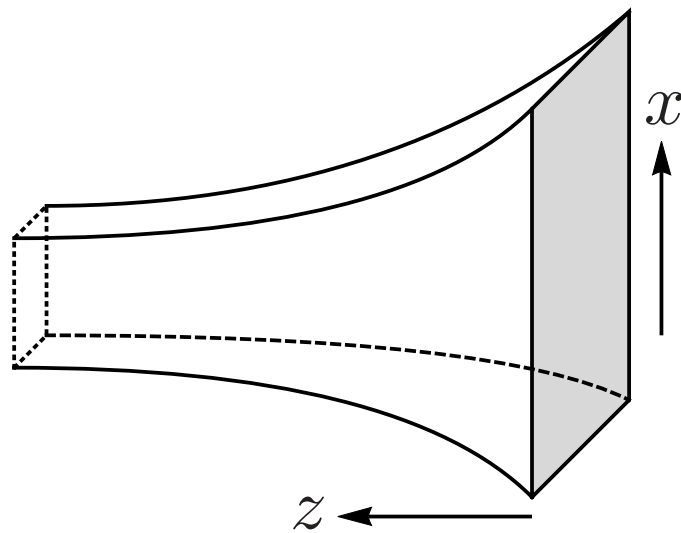
(q : ゲージ結合)

Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果

AdS時空の重力

反ドジッター時空: 負の宇宙項を持つEinstein重力の解



Poincare AdS

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}_2^2)$$

AdS時空

- AdS/CFT対応 [Maldacena]
- 強結合ゲージ理論や強相関系(物性系)への応用
- AdS時空の重力理論自体への興味

ホログラフィック超伝導模型

ホログラフィック超伝導: AdS時空で"ヒッグス機構"によりU(1)ゲージ対称性が破れる。

[Hartnoll-Herzog-Horowitz]

ミニマルな模型 ($8\pi G_N=1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D\phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \right)$$

スカラー質量 $m^2 = -2$

Ansatz ($r=1/z$)

$$ds^2 = - (1 + r^2) f(r) e^{-\chi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{(1 + r^2) f(r)} + r^2 d\mathcal{M}_2^2$$

$$A = A_t(r) dt, \quad \phi = \phi(r)$$

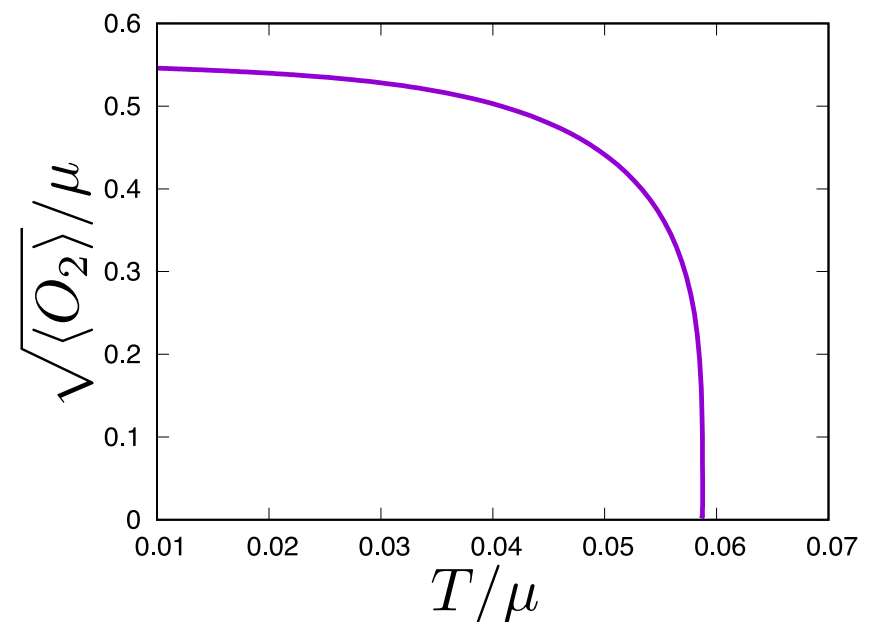
境界条件

AdS/CFT対応の文脈では **Poincare AdS**と**Dirichlet境界条件**を考えることが多い。

- Poincare AdS: $dM_2^2 = dx^2 + dy^2$
- Dirichlet: $\phi = \frac{\phi_1}{r} + \frac{\phi_2}{r^2} + \dots$ ($r \rightarrow \infty$) において $\phi_1 = 0$

結果

- 低温有限密度で $\phi \neq 0$
- 自発的対称性の破れ: $\langle O_2 \rangle \sim \phi_2 \neq 0$
- 解釈: 超伝導(超流動)への相転移



(Probe極限の図)

今回すること

他の種類の境界条件も考えられる。

よく用いられるもの

- 無限遠で **Poincare AdS**
- スカラー場 ϕ は**Dirichlet**境界条件

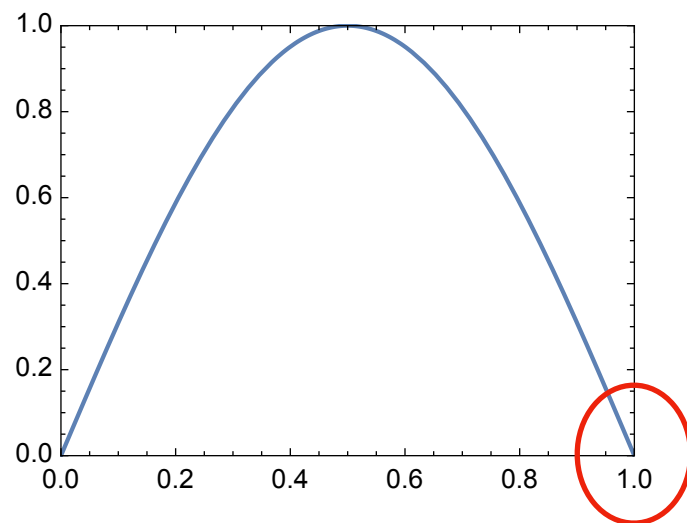
他の選択肢

- Poincare AdS (平面), **global AdS (球面)**, 双曲面
- Dirichlet, Neumann, **Robin**

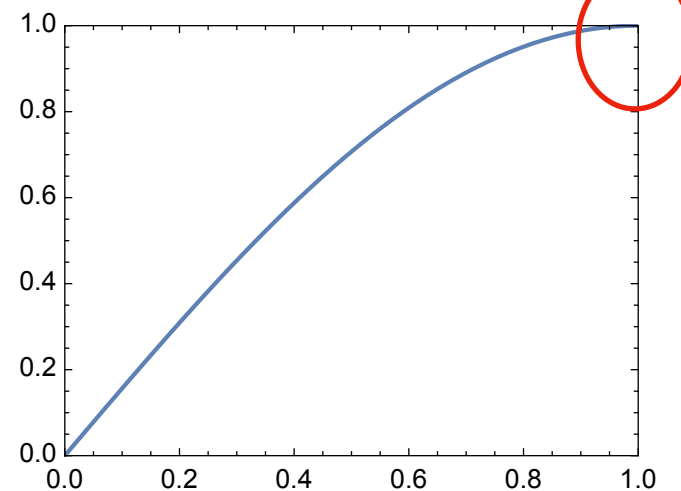
Robin境界条件

Robin境界条件：（平らな空間で $\square\phi = 0$ の場合には）
 ϕ_{bdry} と ϕ'_{bdry} が両方ノンゼロの境界条件のこと。

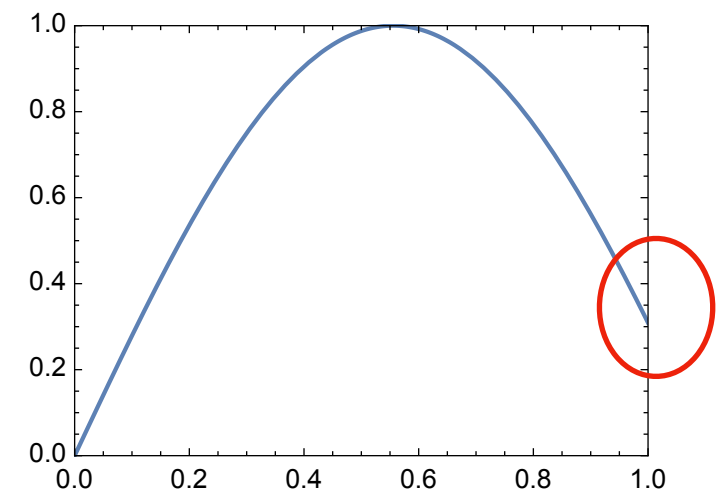
Dirichlet: $\phi_{\text{bdry}} = 0$



Neumann: $\phi'_{\text{bdry}} = 0$



Robin: $\phi'_{\text{bdry}} = \kappa\phi_{\text{bdry}}$



- ただし $\phi'_{\text{bdry}} = \kappa\phi_{\text{bdry}}$ を課すには境界で特殊な効果が必要

※ AdSでは振る舞いが異なる: $\phi = \frac{\phi_1}{r} + \frac{\phi_2}{r^2} + \dots$ ($m^2=-2$)

先行研究

4次元の漸近 global RNAdS で複素スカラー場について
Robin境界条件を課した**摂動**が調べられた。

[Katagiri-Harada, 2006.10301]

- Quasinormal モード $\rightarrow$ (超放射)不安定性がある
- Robin境界条件は荷電してなくても不安定性を起こす。
電荷があると超放射不安定性に分類される。

今回：この不安定性が計量にbackreactionした解を
作って相図を調べる。

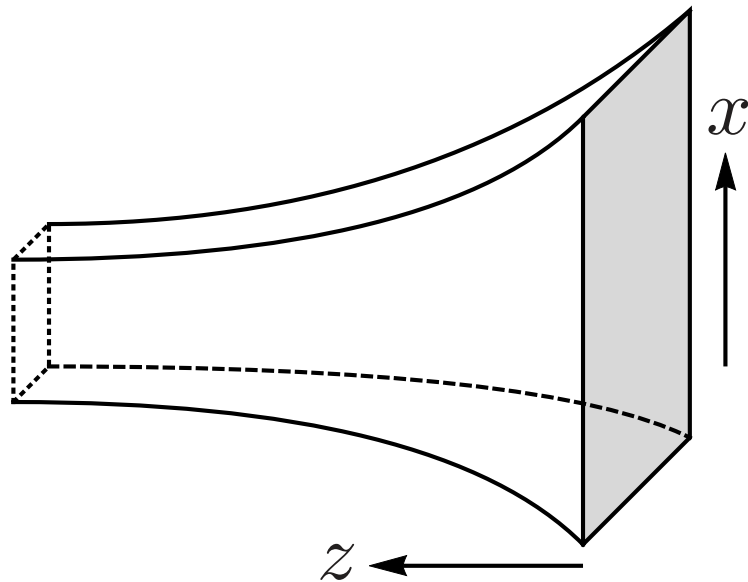
Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果

Poincare / global AdS

AdS時空は無限遠のトポロジーが異なるものがある:

Poincare AdS (平面), **global AdS** (球面) (or 双曲面 etc.)



Poincare AdS

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}_2^2)$$



Global AdS

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-(1+z^2)dt^2 + \frac{dz^2}{1+z^2} + d\Omega_2^2 \right)$$

今回はこれ

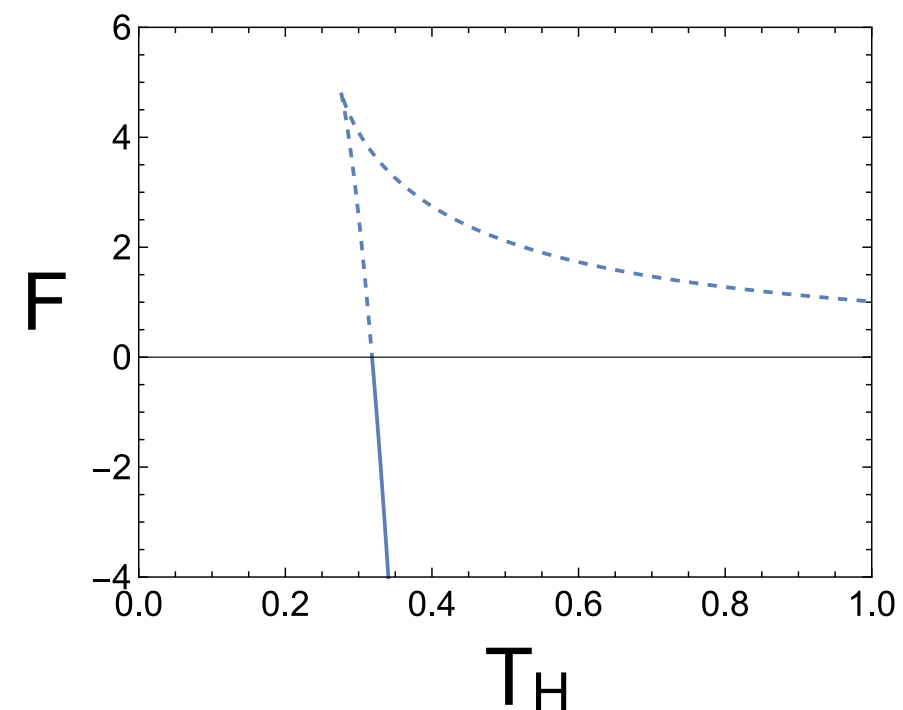
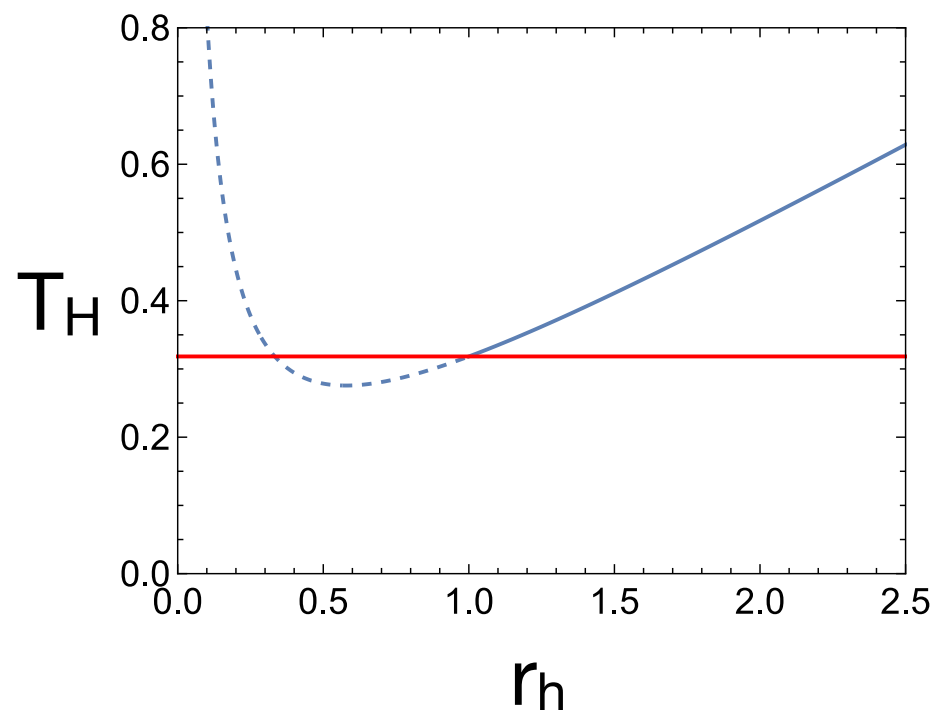
Hawking-Page相転移

Global AdSではブラックホールがある時空・ない時空の熱力学的な一次相転移が議論される。

[Hawking-Page, Witten]

- 自由エネルギーが低い解が物理的に実現される

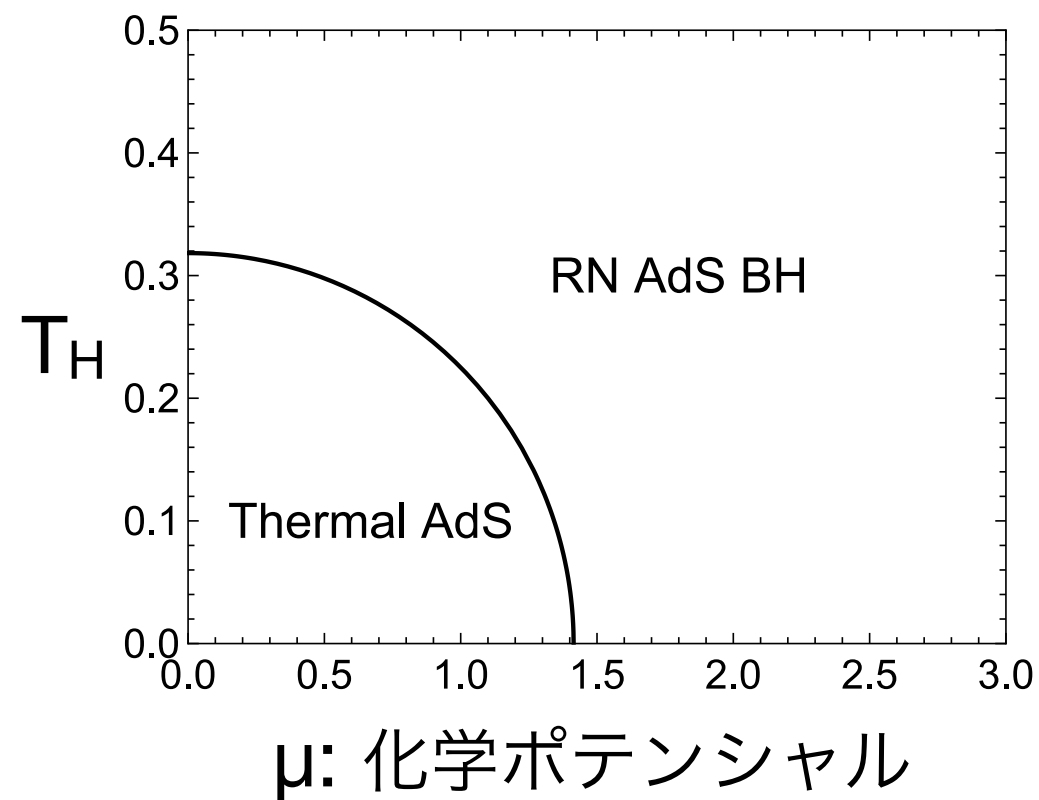
例: thermal AdS vs Schwarzschild AdS BH



荷電ブラックホール

U(1)ゲージ場を導入してグランドカノニカル分布で相図を書く。

[Chamblin-Empanan-Johnson-Myers]



今回: この図に**ロビン境界条件を満たす複素スカラー**を加える

Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果

スカラー場の境界条件

質量が $-9/4 \leq m^2 \leq -5/4$ のとき、無限遠(AdS境界)でスカラー場の境界条件がいろいろ選べる。

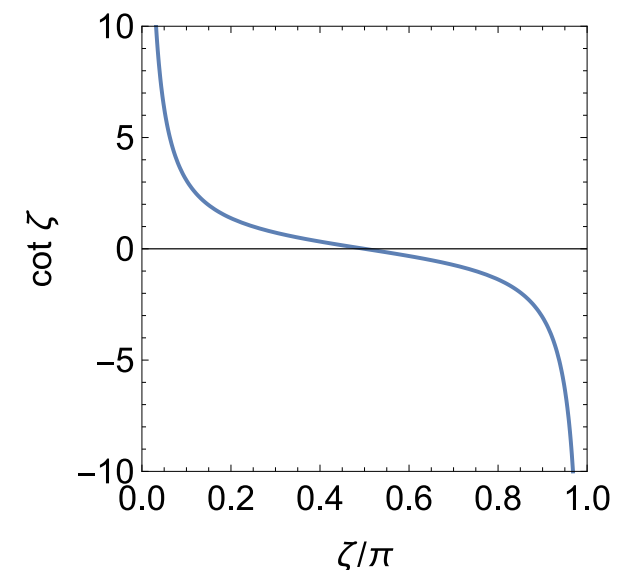
[Witten]

- $r \rightarrow \infty$ でのふるまい: $\phi = \frac{\phi_1}{r} + \frac{\phi_2}{r^2} + \dots$

境界条件

- Dirichlet: $\phi_1=0$ ($\zeta=0$)
- Neumann: $\phi_2=0$ ($\zeta=\pi/2$)
- **Robin: $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0$**

$\cot \zeta = \frac{\phi_2}{\phi_1} \quad (0 \leq \zeta < \pi)$



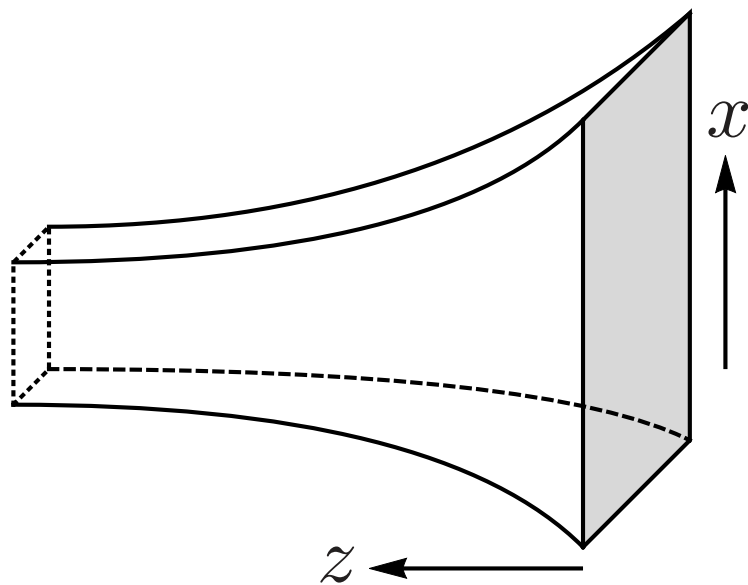
Global AdS, $\phi \neq 0$ の解

	$\mu=0$	$\mu>0$
ホライズンない	中性 boson star	荷電 boson star
ホライズンある	中性 hairy BH	荷電 hairy BH

- これらを $\phi=0$ の解 (AdS, RN-AdS BH) と比較する
- パラメータ4個: (μ, T_H, ζ, q) (q : ゲージ結合)

Boson star

Global AdSで作られるホライズンがないスカラー場 $\neq 0$ の解はboson starと呼ばれる。



Poincare AdS



Global AdS

Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果

ホログラフィックくりこみ

Robin境界条件をスカラー場に課すときも、この処方箋を用いてエネルギーの表式などが求められる。

[e.g. Skenderis]

求める手順

1. Dirichlet: "普通の"ホログラフィックくりこみ
2. Neumann: Dirichletからのルジャンドル変換
3. **Robin: Neumannの拡張**

Dirichlet理論

素朴に $r \rightarrow \infty$ の寄与で発散するon-shell作用について、発散を相殺項(counterterm)でくりこむ

[e.g. Skenderis]

くりこまれた作用

$$S_{\text{ren}}^D = \lim_{\text{cutoff} \rightarrow \infty} (S_{\text{bulk}} + S_{\text{ct}})$$

スカラー場のsourceと期待値

$$\Phi_D = \sqrt{2}\phi_1 = 0, \quad \langle O_2 \rangle = \sqrt{2}\phi_2$$

変分

$$\delta S_{\text{ren}}^D = \int d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} \langle T^{ij} \rangle \delta h_{ij} + \langle J^i \rangle \delta \Psi_i + \langle O_2 \rangle \delta \Phi_D \right)$$

Neumann理論

Dirichlet理論からNeumann理論にルジャンドル変換で移る。

[Witten, Papadimitriou]

ルジャンドル変換

$$S_{\text{ren}}^N = S_{\text{ren}}^D + S_{\text{LT}} \quad S_{\text{LT}} = -2 \int d^3x \sqrt{-h} \phi_1 \phi_2$$

スカラー場のsourceと期待値

$$\Phi_N = -\sqrt{2}\phi_2 = 0, \quad \langle O_1 \rangle = \sqrt{2}\phi_1$$

変分

$$\delta S_{\text{ren}}^N = \int d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} \langle T^{ij} \rangle \delta h_{ij} + \langle J^i \rangle \delta \Psi_i + \langle O_1 \rangle \delta \Phi_N \right)$$

Robin理論 (double trace変形)

Neumann理論をRobinに一般化するには、有限項を加えて変分が整合的になるようにする。

[Witten, Papadimitriou]

有限項を足す

$$\begin{aligned} S_{\text{ren}}^R &= S_{\text{ren}}^N + S_{\text{Dtr}} \\ &= S_{\text{ren}}^D + S_{\text{LT}} + S_{\text{Dtr}} \end{aligned} \quad S_{\text{Dtr}} = \cot \zeta \int d^3x \sqrt{-h} \phi_1^2$$

スカラー場のsourceと期待値

$$\Phi_R = -\sqrt{2} (\phi_2 - \phi_1 \cot \zeta) = 0, \quad \langle O_1 \rangle = \sqrt{2} \phi_1$$

変分

$$\delta S_{\text{ren}}^R = \int d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} \langle T^{ij} \rangle \delta h_{ij} + \langle J^i \rangle \delta \Psi_i + \langle O_1 \rangle \delta \Phi_R \right)$$

グラントポテンシャル

グラントカノニカル分布で、グラントポテンシャルを比較して相構造を決める。

エネルギー

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_{\text{Dtr}} = \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_{\text{LT}} + \mathcal{E}_{\text{Dtr}}$$

$$\mathcal{E}_{D,N,R} = \int d\Omega_2 \langle T_{tt}^{D,N,R} \rangle$$

グラントポテンシャル

$$\Omega_R = \Omega_N + \Omega_{\text{Dtr}} = \Omega_D + \Omega_{\text{LT}} + \Omega_{\text{Dtr}}$$

$$\Omega = \mathcal{E} - T_{\text{H}} \mathcal{S}_{\text{BH}} - \mu \mathcal{Q}$$

Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果

Contents

1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果1: ゲージ場=0

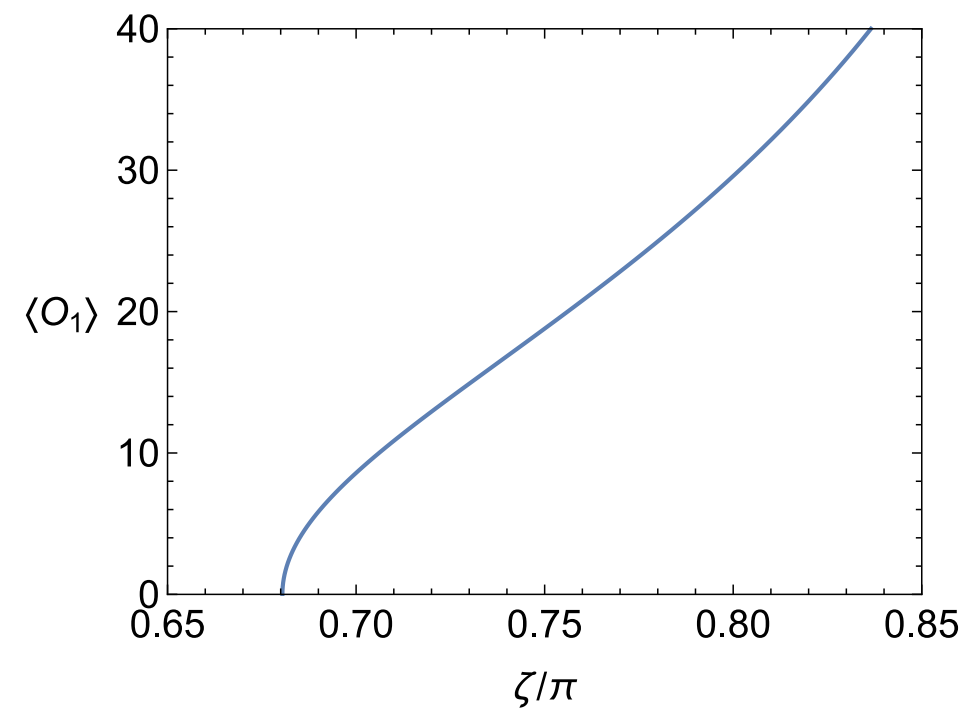
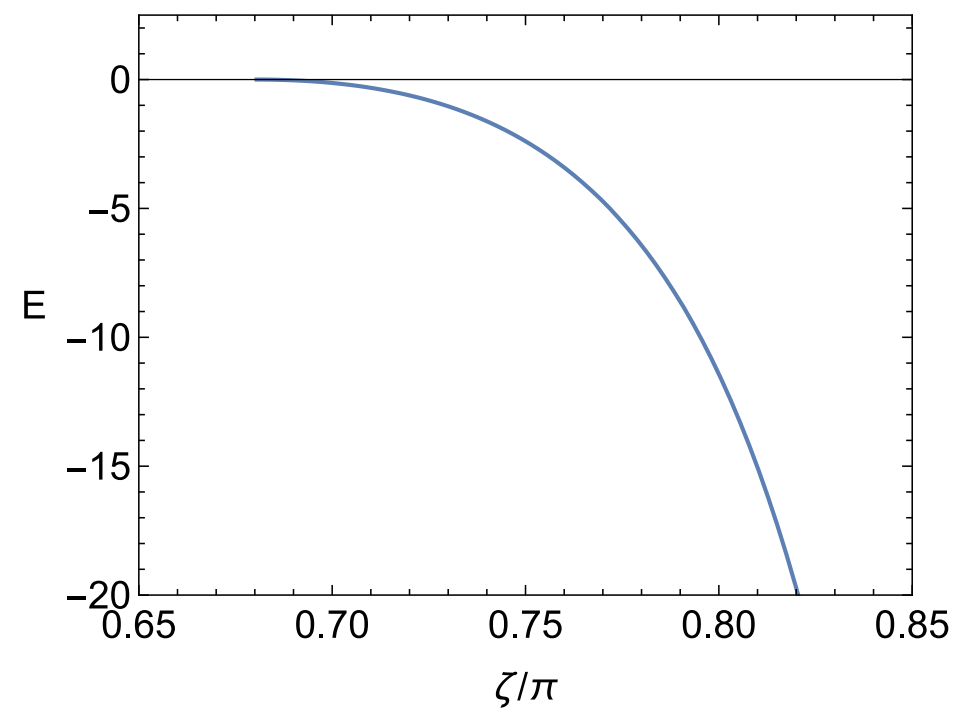
1. ゲージ場がないとき ($\mu=q=0$)

	$\phi=0$	$\phi\neq 0$
ホライズンない	Thermal AdS	Robin boson star
ホライズンある	Schwarzschild AdS BH	Neutral Robin BH

- パラメータ2個: (T_H, ζ)
- このときはRobin境界条件のみの効果で $\phi\neq 0$ となる

中性boson star

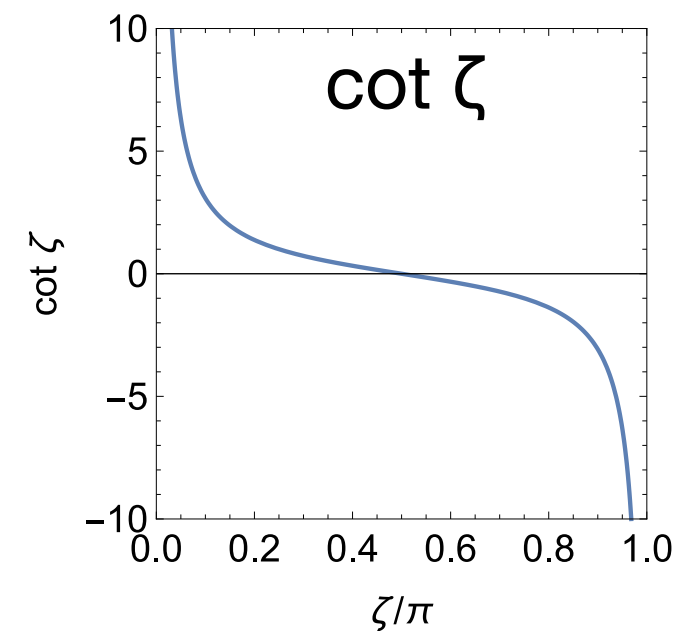
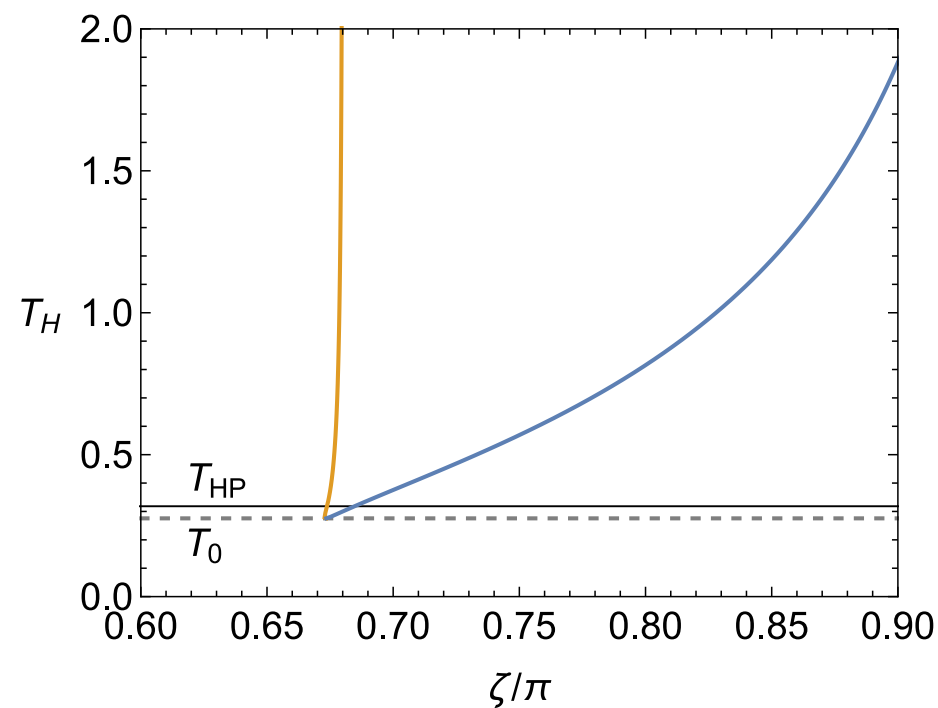
ホライズンがないのでパラメータは ζ だけ(1つだけ)で、 $\zeta/\pi \gtrsim 0.68$ で中性スカラー場が $\phi \neq 0$ になる。



- 左図: Boson starはAdS($\phi=0$)より自由エネルギーが低い
- 右図: Criticalな ζ の値を超えるとスカラー $\neq 0$ となる

Schwarzschild BHの不安定性

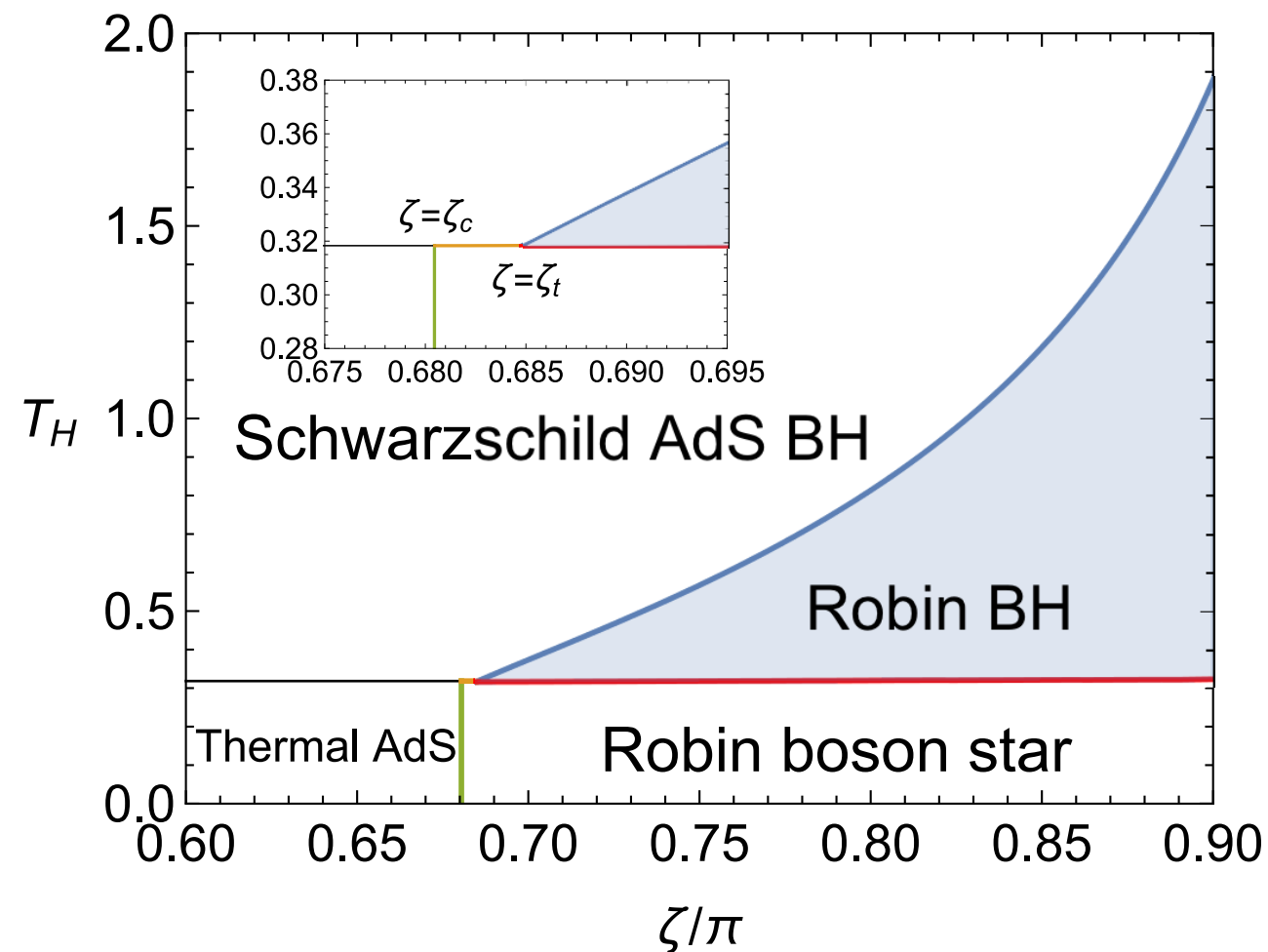
ブラックホールでも同様にRobin境界条件の効果で $\phi \neq 0$ になる ($\zeta/\pi \gtrsim 0.67$)。



- 左図: 不安定性の起点を示す線
- それぞれの線より右側で $\phi \neq 0$ の解が得られる
(オレンジ: small BH領域, 青: large BH 領域)

中性の相図

$\phi=0/\phi\neq 0$ と ホライズンある/ない の $2\times 2=4$ 種類で自由エネルギーを比較して相図を求める。



- 青: $\phi\neq 0$ への2次相転移
- 黄緑: $\phi\neq 0$ への2次相転移
- 赤: Hawking-Page 1次相転移
- オレンジ: Hawking-Page, 1次

Contents

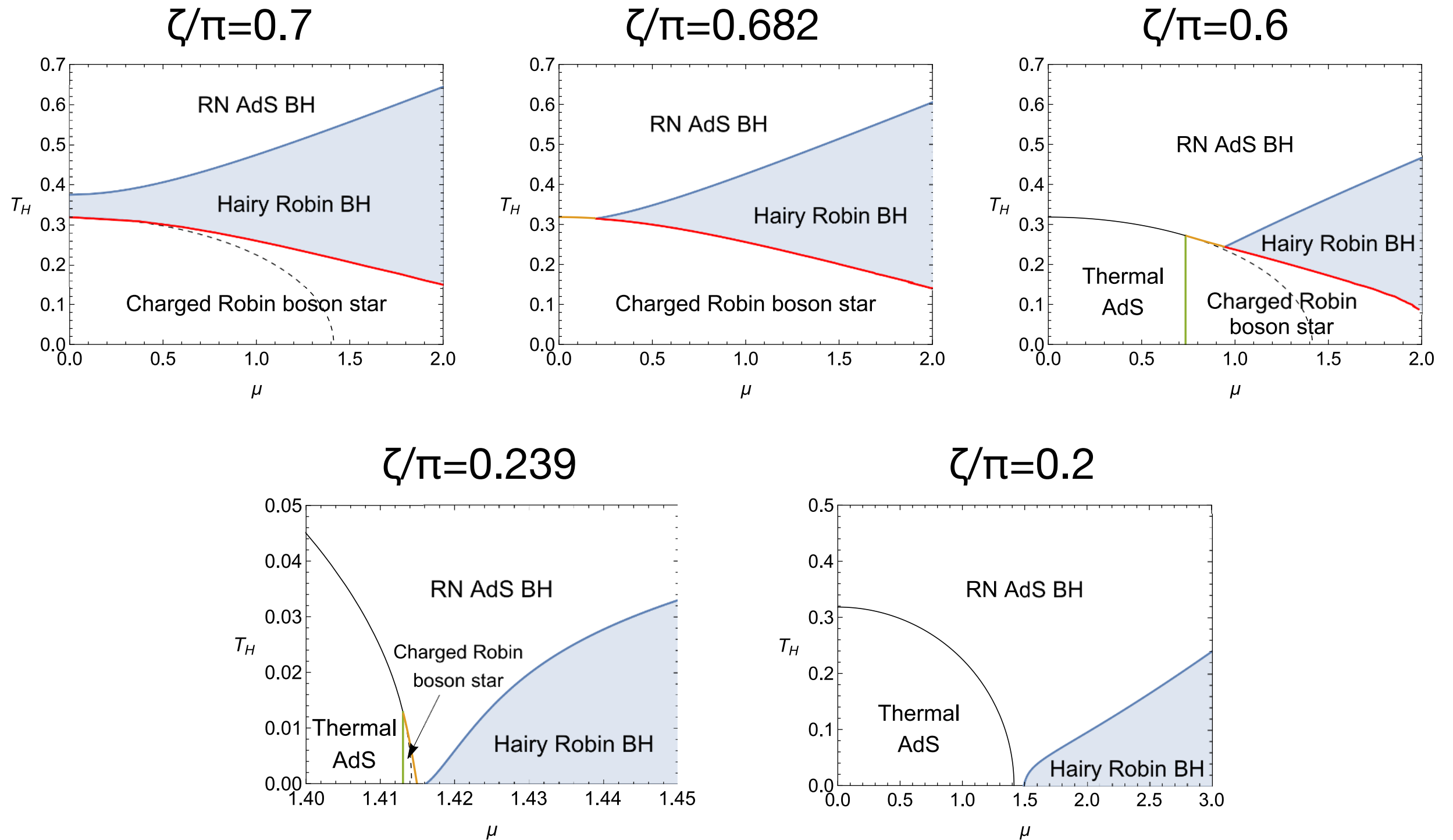
1. イントロダクション
2. Global AdSと熱力学
3. Robin境界条件
4. エネルギー
5. 結果2: ゲージ場 $\neq 0$

2. ゲージ場もあるとき

	$\phi=0$	$\phi\neq 0$
ホライズンない	Thermal AdS	荷電 Robin boson star
ホライズンある	RNAdS BH	荷電 hairy Robin BH

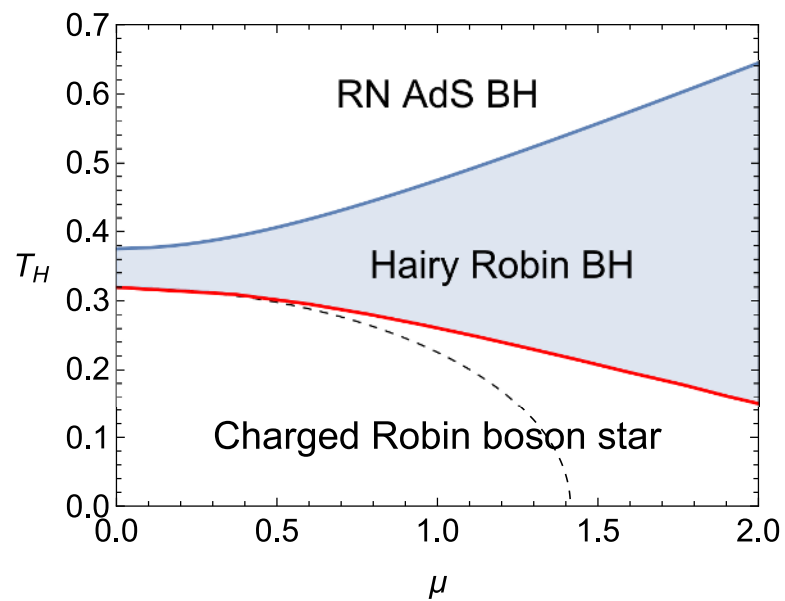
- パラメータ4個: (μ, T_H, ζ, q)
- ζ, q を固定したときの (μ, T_H) -平面での相構造を見せる

相図 (結合定数 $q=1$)

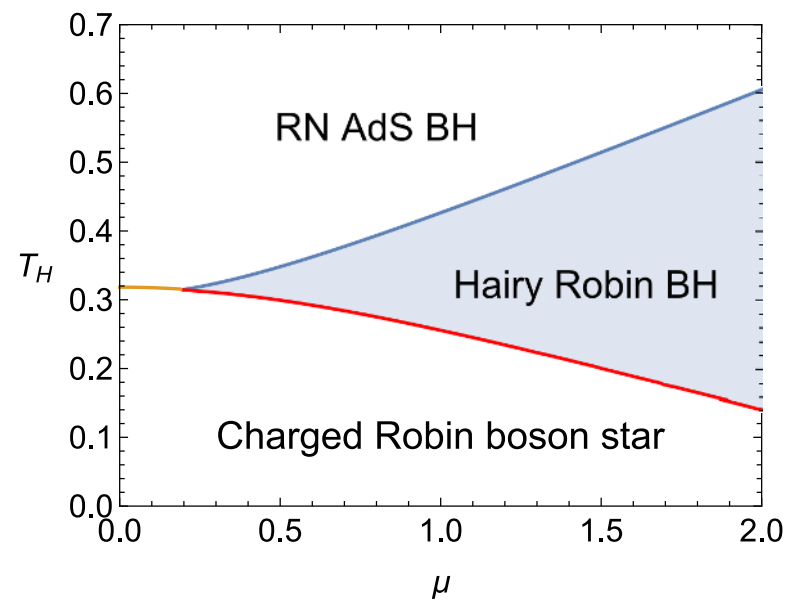


ζが大きい領域

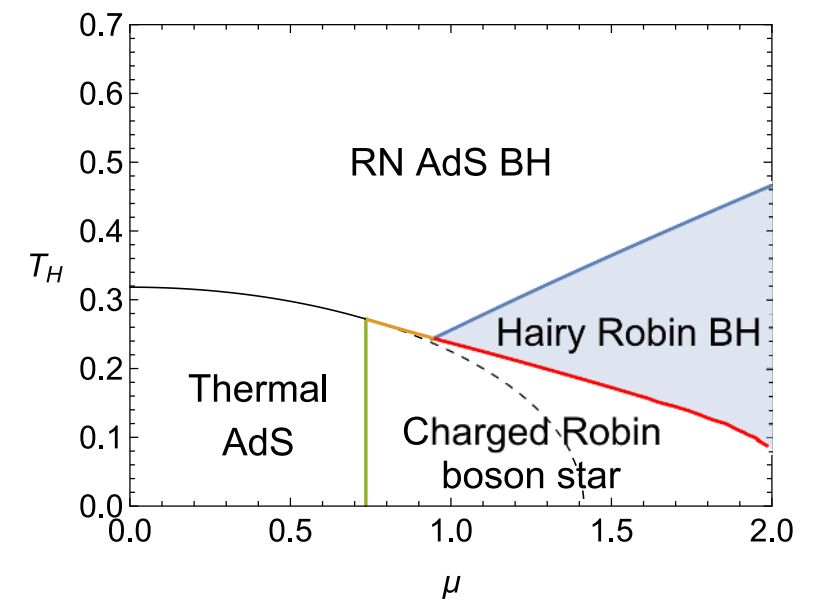
$\zeta/\pi=0.7$



$\zeta/\pi=0.682$

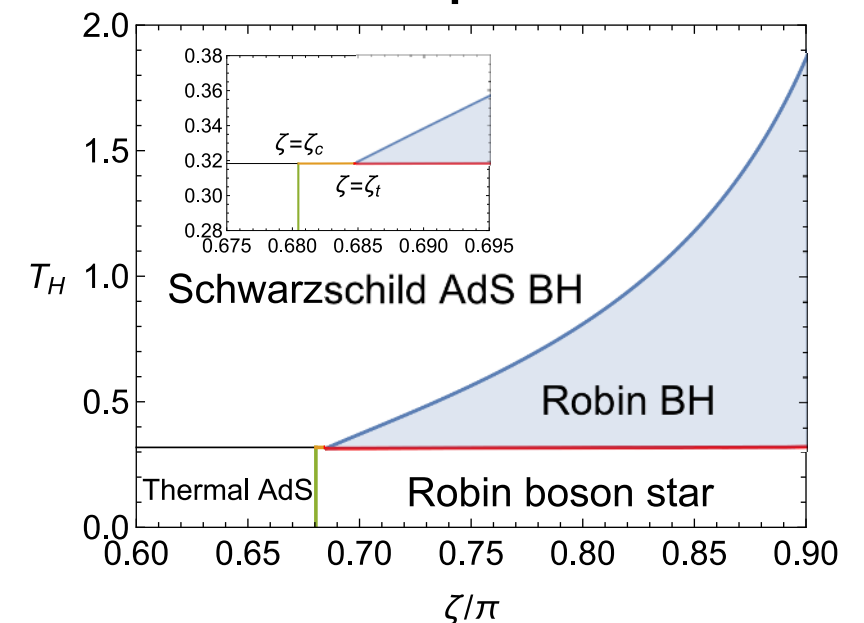


$\zeta/\pi=0.6$

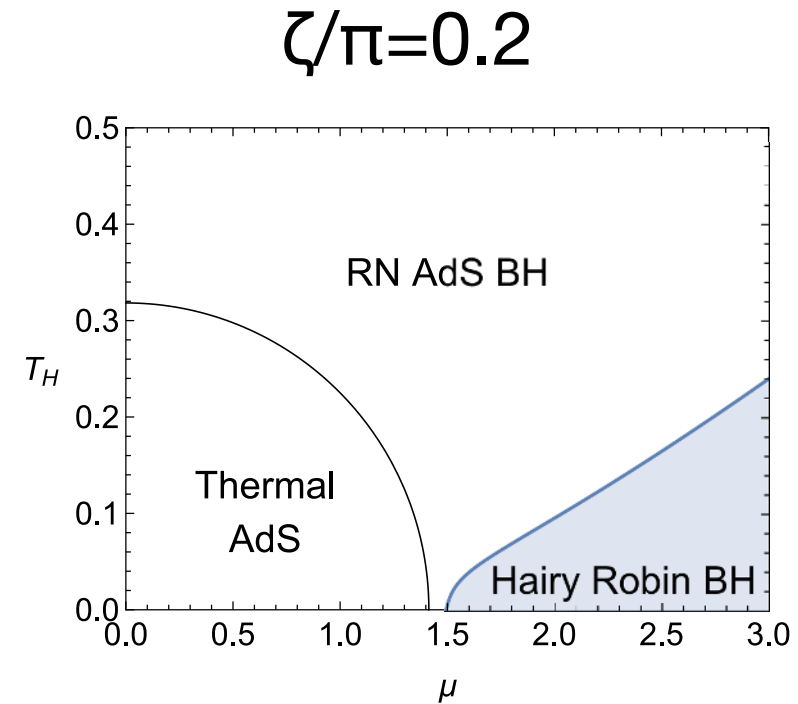
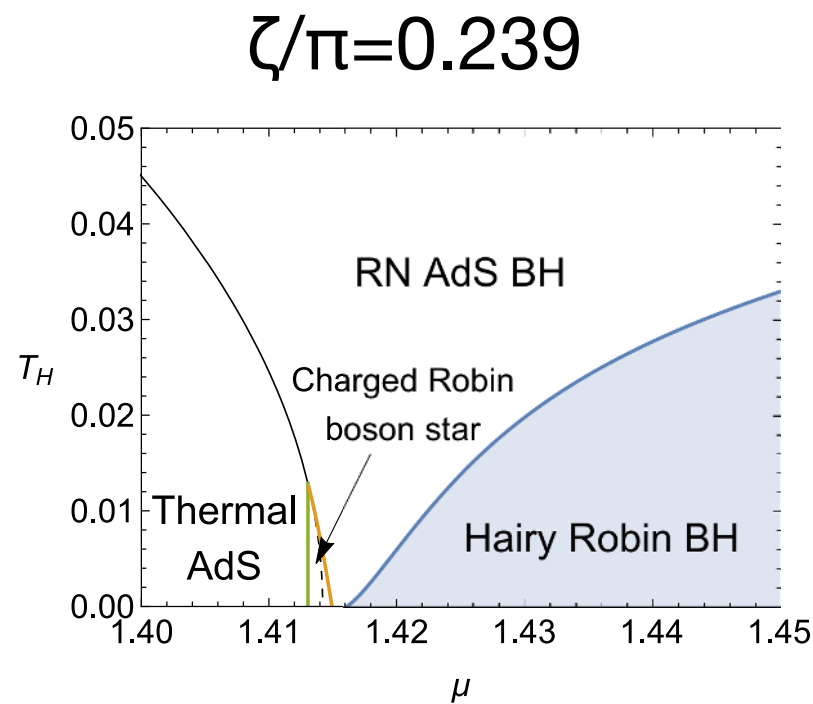


- 青: $\phi \neq 0$ への2次相転移
- 黄緑: $\phi \neq 0$ への2次相転移
- 赤: Hawking-Page 1次相転移
- オレンジ: Hawking-Page, 1次

cf. $\mu=0$



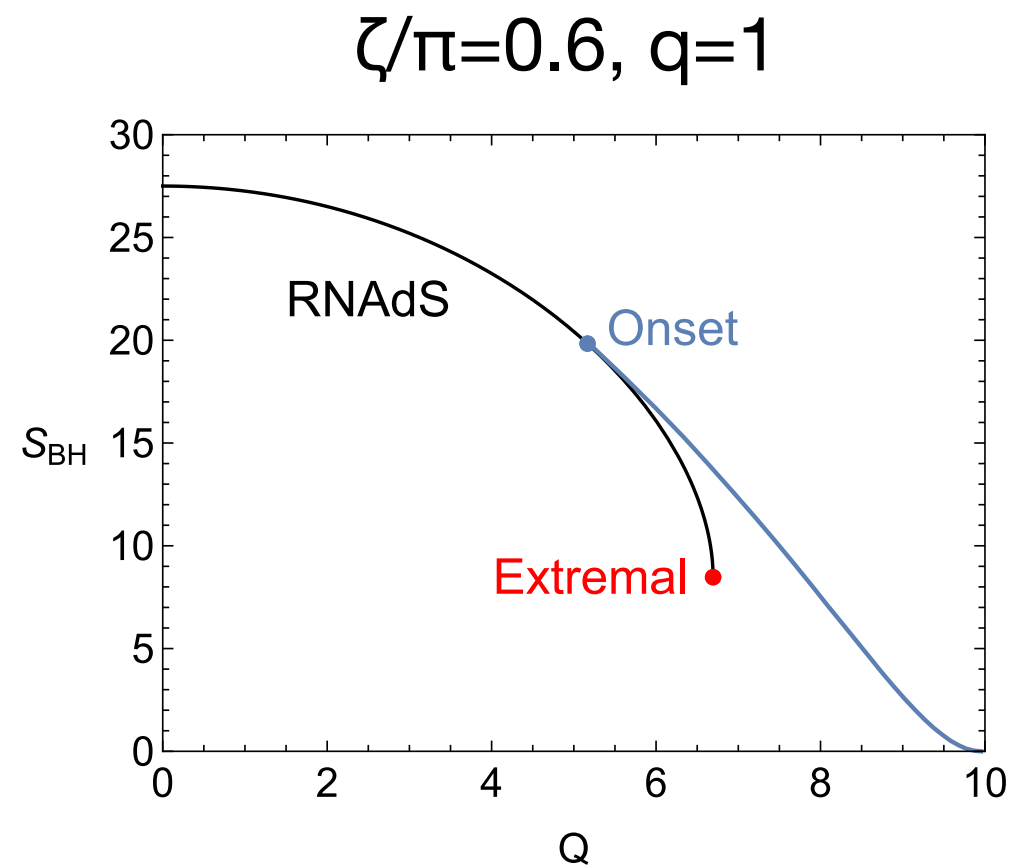
ζ が小さい領域 (q も小さい)



- q も ζ も小さいとき、extremal BHまで温度が下がってようやくスカラー場が不安定になる。
- q が大きい($q > \sqrt{2}$)と、そうなる前にスカラー場が不安定になり、これらの相構造は出現しない。

おまけ: マイクロカノニカルアンサンブル

(E,Q)が同じものを比較するとエントロピーはhairy BHの方が常にRNAdS BHより大きい。



まとめ

Global AdSでスカラー場が**Robin境界条件**を満たすときのhairy BH, boson starなどの解を調べた。

グランドカノニカル分布での相図を求めて、 (μ, T_H) 平面での様子を比較した。

展望 Robin的な境界条件を課したモデルから新しい理解を引き出す他のセットアップが面白いはず。

例: ゲージ場・重力場とAdS境界でのダイナミカルな自由度