Non-invertible Symmetries in $d > 2$

Justin Kaidi

場の理論と弦理論 2023
August 8, 2023

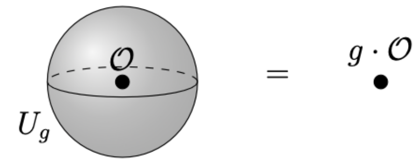
UNIVERSITY *of* WASHINGTON

[2111.01141] **JK**, Kantaro Ohmori, Yunqin Zheng
[2205.01104] **JK**, Gabi Zafrir, Yunqin Zheng
[2209.11062] **JK**, Kantaro Ohmori, Yunqin Zheng
[2211.05138] Vladimir Bashmakov, Michele Del Zotto, Azeem Hasan, **JK**
[2301.07112] **JK**, Emily Nardoni, Gabi Zafrir, Yunqin Zheng
⋮

対称性とは？

- 対称性は物理学に於いて強力な武器である
  - 保存則や選択則を導き出せる
  - ミクロの世界からマクロの世界への変換を解析可能にする
- 遥か昔から愛用されてきたこの武器だが、ここ１０年のうち、思いがけない進化を遂げてきた:
  - 高次形式対称性 [Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14; Gaiotto, Kapustin, Komargodski, Seiberg '17; . . .]
  - 高次群対称性 [Kapustin, Thorngren '13; Córdova, Dumitrescu, Intriligator '18; Benini, Córdova, Hsin '18; . . .]
  - 部分系対称性 [Lawler, Fradkin '04; Vijay, Haah, Fu '16; Seiberg '19; Seiberg, Shao '20; . . .]
  - 非可逆的対称性（圏論的対称性） [Frölich, Fuchs, Runkel, Schweigert '09; Bhardwaj, Tachikawa '17; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18; . . .] + [Nguyen, Tanizaki, Ünsal '21; Koide, Nagoya, Yamaguchi '21; **JK**, Kantaro Ohmori, Yunqin Zheng '21; Choi, Córdova, Hsin, Lam, Shao '21; . . .]

対称性とは？



- 中心的アイデア：対称性 = **topological defects**！
- p 形式対称性：
  - 対応する codim. $(p+1)$ defect が存在する
  - p 次元的に広がったものに作用する
  - 背景ゲージ場は$(p+1)$形式
- 通常の対称性：$p = 0$
- 本発表では $p = 0, 1$ が重要。1 形式対称性の場合では:
  - 対応する codim. 2 defect が存在する
  - Wilson line /anyon に作用する
  - 背景ゲージ場は 2 形式 $B^{(2)}$

高次形式対称性のレビュー

- 高次形式対称性は避けられない！

- 例：$\mathbb{Z}_2^{(0)}$ 対称性を持つ d 次元場の理論 $\mathcal{T}$ を考えよう。分配関数 $Z_{\mathcal{T}}[A^{(1)}]$ は背景ゲージ場 $A^{(1)}$ に依存する

- $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ をゲージ化したら（$A^{(1)} \to a^{(1)}$）分配関数は以下のようになる：

$$Z_{\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(0)}}[\widehat{A}^{(d-1)}] = \int \mathcal{D}a^{(1)}\, Z_{\mathcal{T}}[a^{(1)}]\, e^{i\pi \int_{X_d} a^{(1)} \hat{A}^{(d-1)}}$$

但し $\widehat{A}^{(d-1)}$ は **“dual”** $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ の背景ゲージ場。$\widehat{A}^{(d-1)}$ は $(d-1)$形式なので $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(0)}$ には $(d-2)$ 形式対称性がある [Vafa ‘88; Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willet ‘14]

高次群対称性のレビュー

- 例：$\mathbb{Z}_2^{(0)}$ と $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性を持つ 4 次元場の理論 $\mathcal{T}$ を考えよう。但し $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ と $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ の間に混合アノマリーがある ($X_4 = \partial X_5$):

$$S_{\text{anom}} = \pi \int_{X_5} A^{(1)} \cup B^{(2)} \cup B^{(2)}$$

- 対称性それぞれに対応している **topological defect** がある
  - $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ に対応する codim-1 defect $D(M_3)$ がある
  - $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ に対応する codim-2 defect $L(\Sigma_2)$ がある

- $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ をゲージ化すると

$$A^{(1)} \to a^{(1)}\ , \qquad Z_{\mathcal{T}}[A^{(1)}, B^{(2)}] \to Z_{\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(0)}}[\hat{A}^{(3)}, B^{(2)}]$$

高次群対称性のレビュー

- $\mathbb{Z}_2^{(0)}$をゲージ化すると $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ がどうなる？二つの考え方：
  - 結果は 4d で、$\mathbb{Z}_2^{(1)}$ が 破れている
  - 結果は 4d-5d で、$\mathbb{Z}_2^{(1)}$ が 破れていない
- でも三つ目の考え方もある:
  - 結果は 4d で、codim-2 defect が 存在する $\Leftarrow$ 高次群！

$$0 \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_2^{(2)} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_2^{(1)} \rightarrow 0$$

- 具体的に、分配関数は

$$Z_{\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2}[\hat{A}^{(3)}, B^{(2)}] = \int \mathcal{D}a^{(1)} Z_{\mathcal{T}}[a^{(1)}, B^{(2)}] e^{i\pi \int_{X_4} a^{(1)} \hat{A}^{(3)}} e^{i\pi \int_{X_5} a^{(1)} \cup (B^{(2)})^2}$$

これをX_5 に依存しないようにするために、**cocycle** 条件 $\delta \hat{A}^{(3)} = 0$ を $\delta \hat{A}^{(3)} = -B^{(2)} \cup B^{(2)}$ に変えれば良い [Tachikawa '17; Córdova, Dumitrescu, Intriligator '18; Benini, Córdova, Hsin '18]

高次群対称性のレビュー

- ここまでの話をまとめると: $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ と $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性を持つ 4 次元場の理論 $\mathcal{T}$ と混合アノマリー

$$S_{\text{anom}} = \pi \int_{X_5} A^{(1)} \cup B^{(2)} \cup B^{(2)}$$

があることにしよう

- $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ をゲージ化すると、３つの考え方がある：

codim-2 defect	dimension	1-form symmetry
?	4d	✗
✓	4d-5d	$\mathbb{Z}_2^{(1)}$
✓	4d	3-group

- ここまでの **defect** が全て可逆（**invertible**）だった

非可逆的対称性

- 次に $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ をゲージ化しよう。二つの考え方がある：
  - 結果は 4d で、$\mathbb{Z}_2^{(0)}$ が 破れている
  - 結果は 4d-5d で、$\mathbb{Z}_2^{(0)}$ が 破れていない
- 三つ目の選択肢はどうなる？
  - アノマリーに出てくるのは $b^{(2)}$ の2乗だから、cocycle 条件を変えるだけで X_5 の依存が消えない
  - 高次群を作れない！
- でも新しい三つ目の選択肢がある： [Tachikawa '17; **JK**, Ohmori, Zheng '21]
  - Defect $D(M_3)$ を 3d TQFT $\mathfrak{T}$ に couple する。この $\mathfrak{T}$ をうまく選べば、ゲージ化しても $\mathcal{N} := D \otimes \mathfrak{T}$ が生き残る
  - しかし $\mathcal{N}$ は非可逆的になる！

非可逆的対称性

- アノマリーだけで**TQFT** $\mathfrak{I}$ が一意的に決まらないが、**minimal** な選択肢がある: $U(1)_2$ **CS** 理論 [Hsin, Lam, Seiberg '18]

- 従って **gauge invariant defect** はこのようになる：

$$\mathcal{N}(M_3) \propto \int \mathcal{D}a\ D(M_3)\ e^{\frac{i}{2\pi}\int_{M_3} ada - i\int_{M_3} a\, b^{(2)}}$$

- $\mathcal{N}$ の **fusion** も簡単に計算できる:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M_3) \times \overline{\mathcal{N}(M_3)} &\propto \int \mathcal{D}a\mathcal{D}a'\ e^{\frac{i}{2\pi}\int_{M_3}(ada - a'da') - i\int_{M_3}(a-a')b^{(2)}} \\ &= \int \mathcal{D}a\mathcal{D}\hat{a}\ e^{\frac{2i}{2\pi}\int ad\hat{a} - \frac{i}{2\pi}\int \hat{a}d\hat{a} - i\int \hat{a}b^{(2)}} \\ &= \sum_{\Sigma_2 \in H_2(M_3,\mathbb{Z}_2)} (-1)^{Q(\Sigma_2)} \hat{L}(\Sigma_2) \end{aligned}$$

非可逆的対称性

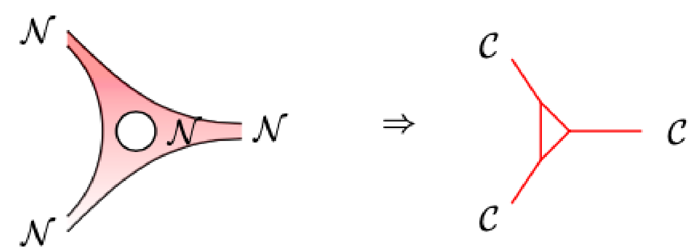
- **Fusion rules** を全て計算すると以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(M_3) \times \overline{\mathcal{N}(M_3)} &\propto \sum_{\Sigma_2 \in H_2(M_3,\mathbb{Z}_2)} (-1)^{Q(\Sigma_2)} \hat{L}(\Sigma_2) \\
\mathcal{N}(M_3) \times \hat{L}(\Sigma_2) &= (-1)^{Q(\Sigma_2)} \mathcal{N}(M_3) \\
\hat{L}(\Sigma_2) \times \hat{L}(\Sigma_2) &= 1
\end{aligned}
$$

- **Ising** 圏の高次圏バージョン！

Ising 圏: $\mathcal{N} \times \mathcal{N} = 1 + \eta \qquad \mathcal{N} \times \eta = \eta \times \mathcal{N} = \mathcal{N} \qquad \eta^2 = 1$

- **Ising** 圏と同じく、自己双対性のリトマス紙！



ここまでの話

- ここまでの話をまとめると: $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ と $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ の間に混合アノマリーのある4 次元場の理論 $\mathcal{T}$ があることにしよう
- $\mathbb{Z}_2^{(0)}$をゲージ化したら、３つの考え方がある：

codim-2 defect	dimension	1-form symmetry
?	4d	✗
✓	4d-5d	$\mathbb{Z}_2^{(1)}$
✓	4d	3-group

- $\mathbb{Z}_2^{(1)}$をゲージ化したら、また３つの考え方がある：

codim-1 defect	dimension	0-form symmetry
?	4d	✗
✓	4d-5d	$\mathbb{Z}_2^{(0)}$
✓	4d	Ising-like category

具体例 I : $\mathcal{N}=4$ SYM

- 具体例：まず $\mathcal{N}=4$ $SO(3)$ **SYM at** $\tau_{\textsf{YM}}=i$ に集中する
  - この理論には $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ と $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ (モジュラー S) 対称性がある
  - 混合アノマリーもある：

$$Z_{SO(3)}[-1/\tau_{\textsf{YM}}, B^{(2)}] = e^{i\frac{\pi}{2}\int_{X_4}(B^{(2)})^2} Z_{SO(3)}[\tau_{\textsf{YM}}, B^{(2)}]$$

  - $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ をゲージ化したら、$\mathcal{N}=4$ $SU(2)$ SYM at $\tau_{\textsf{YM}}=i$ になる
  - S に対応していた defect が duality defect $\mathcal{N}$ になる
- 結論： $\mathcal{N}=4$ $SU(2)$ **SYM at** $\tau_{\textsf{YM}}=i$ には非可逆的対称性 **(**$\Rightarrow$自己双対性**)** がある！
- 同様に $\mathcal{N}=4$ $SU(2)$ **SYM at** $\tau_{\textsf{YM}}=e^{\pi i/3}$ には **triality defect** がある

具体例 I : $\mathcal{N} = 4$ SYM

- しかも $\mathcal{N} = 4$ $SU(2)$ **SYM** だけではない
- 任意のゲージ群 G （もっと一般的にいうと任意の **global variant** ）の **duality/triality defect** のスペクトルが知られている **(exceptional** と **non-simply-laced cases** も含めて） [**JK**, Zafrir, Zheng '22]
- 次のようなテーブルを作ることができる:

Theory	Defect	n-ality
$Spin(N)_m$, $PSO(N)_{0,m}$	$\tau^m \sigma^3 \mathsf{S} \tau^{-m}$	2
$PSO(N)_{2,m}$, $SO(N)_{-,m}$	$\tau^{2+m} \sigma^3 \mathsf{S} \tau^{2-m}$	2
$PSO(N)_{n,m}$, $n = 1, 3$	$\tau^m \sigma \tau^n \sigma \tau^{-n} \sigma \mathsf{S} \tau^{-m}$	2

Theory	Defect	n-ality
$Spin(N)_m$, $PSO(N)_{3,m}$	$\tau^m \sigma \tau^{-1} \mathsf{S}\mathsf{T} \tau^{-m}$	3
$PSO(N)_{0,m}$	$\tau^m \tau^{-1} \sigma \mathsf{S}\mathsf{T} \tau^{-m}$	3
$PSO(N)_{1,m}$, $SO(N)_{-,m}$	$\tau^{m+2} \sigma \tau^{-1} \mathsf{S}\mathsf{T} \tau^{-m}$	3
$PSO(N)_{2,m}$	$\tau^{m-1} \sigma \tau^2 \mathsf{S}\mathsf{T} \tau^{-m}$	3

- **6d** からの **origin** も知られている [Bashmakov, del Zotto, Hasan, **JK** '22]

具体例 II : 無質量 QED

- 次に **massless QED** について考えよう
- 古典的なレベルで、**axial** $U(1)_A$ 対称性がある： $\Psi \to e^{i\alpha\gamma_5/2}\Psi$ 。
  対応している **topological defect** は $D_\alpha(M_3) := e^{\frac{i\alpha}{2}\int_{M_3} *j^A}$
- 量子力学のレベルで、**ABJ** アノマリーにより破れている： $d * j^A = \frac{1}{4\pi^2} f \wedge f$
- 次の **defect** は **topological** だけど、**gauge-invariant** ではない

$$D_\alpha(M_3)\, e^{-\frac{i\alpha}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_{M_3} a\wedge da}$$

- しかし $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ の場合、**topological + gauge-invariant defect** も定義できる：

$$\mathcal{N}_N(M_3) \propto \int \mathcal{D}\tilde{a}\ D_{\frac{2\pi}{N}}(M_3)\, e^{i\int_{M_3}\left(\frac{N}{4\pi}\tilde{a}\wedge d\tilde{a} + \frac{1}{2\pi}\tilde{a}\wedge da\right)}$$

[Choi, Lam Shao '22; Córdova, Ohmori '22]

具体例 II : 無質量 QED

- さらに、 **Peccei-Quinn** 的なモデルにも応用できる [Córdova, Ohmori '22; Choi, Lam, Shao '22; Yokokura '22]

UV: QED $+$ neutral スカラー場 ϕ $+$ $\int d^4x \left\{\lambda\bar{\phi}\psi_+\psi_- + c.c. - V(\phi)\right\}$

$$\Big\downarrow \; \langle|\phi|^2\rangle = \mu^2$$

IR: axion electrodynamics

- 通常の対称性から考えると、次のような **axion** ポテンシャルが許されている

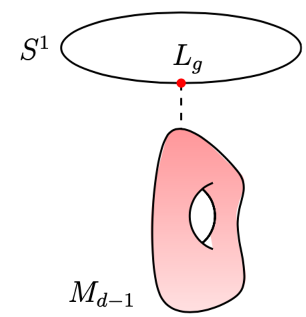
$$V(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cos\left(\frac{n\theta}{\mu}\right)$$

しかし非可逆的対称性も考えるとこのポテンシャルは禁止されている！

Twisted Compactification

- 最後に、非可逆的対称性を使って新しい**RG**フローを作る方法を紹介したい
- G 対称性を持つ d 次元系があるとき、$(d-1)$次元の理論を作る「古き良き」方法がある： ***twisted compactification***
  - 時空を $M_{d-1} \times S^1$ にして、S^1上にツイスト境界条件を選定する:

$$\mathcal{O}(x, \theta + 2\pi) = g\,\mathcal{O}(x, \theta)\ , \qquad g \in G\ .$$



  - S^1 に reduce したら (IR にフローしたら) M_{d-1} 上の $(d-1)$ 次元の理論が出てくる
- モダンの言葉でいうと、S^1上のある一点に **codim-1 defect** を挿入する。**Defect**を通ると g が作用する
- **Non-invertible defect** を使って同じことができるか？　できる！
- 具体例：$\mathcal{N}=4$ **SYM** を **non-invertible twisted compactify** したら新しい **3d** $\mathcal{N}=6$ 理論を作ることができる！ [**JK**, Zafrir, Zheng '22]

まとめと展望

- 非可逆的対称性の一つの作り方を紹介した
- 非可逆的対称性には様々な応用がある：
  - 自己双対性のリトマス紙
  - RGフローを制限する
  - 新しいRGフローを作ることができる
  - 標準模型やBSMへの応用も？
- 普通の対称性が現代物理学の基礎的な考え方の一つになったと同様、一般化された対称性もいつか物理学の大きな進歩に繋がるだろう
- 若い研究分野だからこそ、大きな成果を期待できるはず!!

まとめと展望

- 本発表で紹介できなかったトピック:
  - Condensation defects: [Roumpedakis, Seifnashri, Shao '22; . . .]
  - Symmetry TFTs: [Freed, Teleman '18; Gaiotto, Kulp '20; Burbano, Kulp, Neuser '21; Apruzzi, Bonetti, García-Etxebarria, Hosseini, Schäfer-Nameki '21; **JK**, Ohmori, Zheng '22; . . .]
  - Anomalies of non-inv symm: [Wang, Thorngren '19; Karasik '22; **JK**, Nardoni, Zafrir, Zheng '23; Zhang, Córdova '23; Choi, Rayhaun, Sanghavi, Shao '23 . . .]
  - Construction from string theory: [Garcia-Etxebarria '22; Apruzzi, Bah, Bonetti, Schäfer-Nameki '22; Heckman, Hübner, Torres, Zhang '22; . . .]
  - Non-invertible subsystem symmetries: [Cao, Li, Yamazaki, Zheng '23; . . .]
  - Non-inv. symm. breaking: [Garcia-Etxebarria, Iqbal '22; Córdova, Ohmori '22; Córdova, Hong, Koren, Ohmori '22; . . .]
  - Cardy-Rabinovici model: [Hayashi, Tanizaki '22]
  - Callan-Rubakov effect: [van Beest, Boyle Smith, Delmastro, Komargodski, Tong '23]

The End (for now)

ご清聴ありがとうございました!