スペクトラル三重項による リーマン構造を保つ行列正則化

筑波大学素粒子論 D2
菅野聡
伊敷吾郎氏との共同研究

2023/8/10

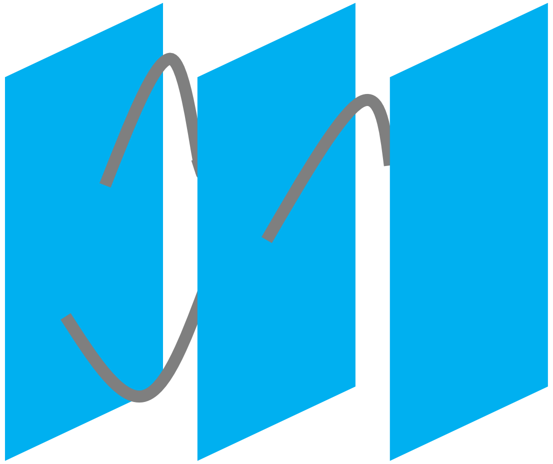
目次

1. Introduction

超弦理論 ⟷ **行列模型**

IIA型超弦理論
(M理論) ⟷ BFSS行列模型

[BFSS][Itzhaki-Maldacena-Sonnenscein-Yankielowicz]

 ⟷ $X_I =$ 

弦理論の幾何学的な対象は行列模型でどう表せるのか?

⟶ **非可換幾何学で行列が幾何に!!**

非可換幾何学

$C(M)$
可換C*algebra

等価 ↕ [Gelfand-Naimark]

位相空間 M

$C(\widehat{M})$
非可換C*algebra

↓定義

非可換空間 $\hat{M}$

C*algebra : 完備なノルムとエルミート共役が入った代数

ex1) Hilbert空間上の作用素の代数

ex2) 行列代数 $M_N(\mathbb{C})$

行列幾何: $C(\widehat{M})$として行列代数 $M_N(\mathbb{C})$となる非可換空間で可換極限$(N\to\infty)$が存在するもの

$$\boldsymbol{M_N(\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(M)}$$

行列正則化は次を満たす線形写像 $\boldsymbol{T_N : C^\infty(M) \to M_N(\mathbb{C})}$

$$\textbf{(1).} \lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

$$\textbf{(2).} \lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0 \quad (\{f,g\} = W^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g)$$

$$\textbf{(3).} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f \quad (\omega\text{: symplectic form})$$

空間 $\boldsymbol{M}$ $\xrightarrow{\text{行列正則化}}$ **行列幾何 $\boldsymbol{\widehat{M}}$**

ブレーンの力学を考える上で、計量の情報が必要
→行列幾何学のリーマン構造は?

(A, H, D)
(ある要請を満たす)
可換スペクトラル三重項

等価 ↕ [Connes]

リーマン多様体 M

$(\hat{A}, \hat{H}, \hat{D})$
非可換スペクトラル三重項

↓定義

非可換リーマン多様体$\hat{M}$

(A, H, D)
- A : 代数(関数環 $C^{\infty}(M)$)
- H : Hilbert空間(スピノル束の切断 $\Gamma(S)$)
- D : ディラック演算子($D = i\gamma^a \nabla_a$)

本研究の結果

スペクトラル三重項の行列正則化

リーマン構造を持つ行列幾何

応用として

- Indexの保存
- 重力理論の行列正則化

2. Berezin-Toeplitz 量子化 (簡単のため2次元空間)

[Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier]

行列正則化 → 関数を行列にする

有限次元ベクトル空間の線型写像

1. 関数を線型写像として考える

2. 有限次元に射影する

関数から行列を構成するイメージ

1. 関数を演算子として考える

$$f = \int d^2x d^2y \, |x\rangle f_{xy} \langle y| \quad \left(f_{xy} = f(x)\delta(x-y) \right)$$

基底 $|x\rangle$ を用いて関数を展開

2. 有限次元に射影する

$$\hat{f} = \sum_{i=0}^{N} |x_i\rangle f_{x_i y_j} \langle y_j|$$

有限の点のみ残るように射影

行列正則化の公理は満たさない

▼

基底の取り方を変える
→スピノル場を基底に使う

有限への落とし方を変える
→ゼロモードに射影する

1. 関数を演算子として考える

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}|\psi_i\rangle f_{ij}\langle\psi_j| \qquad (f_{ij}=\langle\psi_i|f|\psi_j\rangle)$$

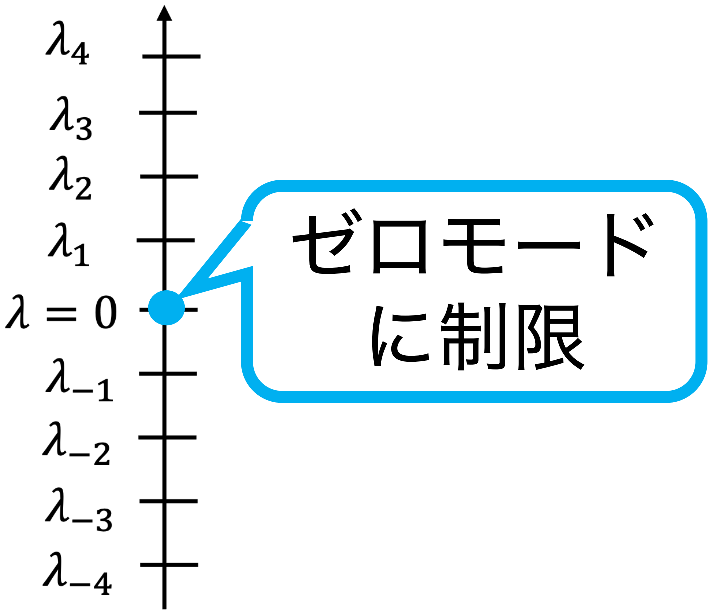
flux : $F\propto\omega \qquad (\omega:\text{symplectic form})$

$U(1)$電荷NのスピノルのDirac作用素の固有状態

$$D_0=i\gamma^a(\partial_a+\Omega_a-iNA_a)$$

$$D_0|\psi_i\rangle=\lambda_i|\psi_i\rangle \quad \langle\psi_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij}$$

2. 有限次元に射影する



ゼロモード

$$D_0 \psi^{(I)} = 0$$

指数定理と消滅定理により

$$\psi^{(I)} \quad (I = 1,2,\cdots,N)$$

ゼロモードに射影すると$N\times N$行列ができる

$$T(f) = \sum_{I=1}^{N} |\psi_I\rangle T(f)_{IJ} \langle\psi_J| \quad \left(T(f)_{IJ} = \langle\psi_I|f|\psi_J\rangle\right)$$

このように構成した行列は、行列正則化の条件を満たす

行列正則化は次を満たす線形写像 $T_N : C^\infty(M) \to M_N(\mathbb{C})$

(1). $\lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$

(2). $\lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f, g\})| = 0$

(3). $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr} T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f \quad (\omega : \text{volume form})$

一般の場にも拡張可能!!

[Adach-Ishiki-SK][Hawkins]

ex) ベクトル場

ベクトルスピノル
$$D_1 = i\gamma^a(\partial_a + \Omega_a + \Gamma_a)$$

1. 関数を演算子として考える

$$V = \sum_{\alpha,i=1}^{\infty} |\eta_\alpha\rangle V_{\alpha j}\langle\psi_j| \qquad \left(V_{\alpha j} = \langle\eta_\alpha|V|\psi_j\rangle\right)$$

2. 有限次元に射影する

$$T(V) = \sum_{A=1}^{2N}\sum_{I=1}^{N} |\eta_A\rangle T(V)_{AJ}\langle\psi_J| \quad \left(T(V)_{IJ} = \langle\eta_A|V|\psi_J\rangle\right)$$

$$\mathbf{dim(Ker}\boldsymbol{D_1}\mathbf{)\times dim(Ker}\boldsymbol{D_0}\mathbf{) = 2}\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\text{行列}$$

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}\left|T(f)T(V)\ -T(fA)\right| = 0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty}\left|iN[T(f),T(A)]\ -T(\{f,A\})\right| = 0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(T(A)^{\dagger}T(A)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega A_a^{\dagger}A^a$$

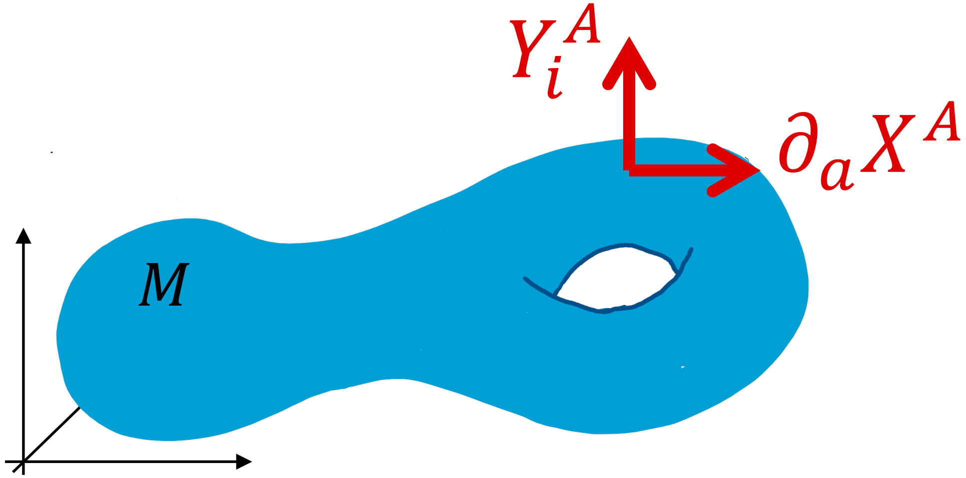
一般化ポアソン括弧と一般化交換関係

$$\{f,A\} = W^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\nabla_\beta A$$

$$[T(f),T(A)]\ \equiv T^1(f)T(V) - T(V)T(f)$$

$$T^1(f) = \sum_{A,B=1}^{2N}|\eta_A\rangle T^1(f)_{AB}\langle\eta_B| \quad (T^1(f)_{AB} = \langle\eta_A|f|\eta_B\rangle)$$

3. スペクトラル三重項の行列正則化



$X : M \to \mathbb{R}^d$ (等長埋め込み)

関数とスピノルはBT量子化可能!!

ディラック演算子の書き換え

$$
\begin{aligned}
D\psi &= i\gamma^a \nabla_a \psi \\
&= \Gamma^A i W^{ab} \partial_a X^A \nabla_b \psi \\
&= \Gamma^A i \{X^A, \psi\}
\end{aligned}
$$

$\Gamma^A := W^{ab} \partial_a X^A \gamma_b$

スペクトラル三重項の行列正則化

$$A = C^\infty(M) \longrightarrow \hat{A} = \Pi C^\infty(M)\Pi$$

$$H = L^2(S) \longrightarrow \widehat{H} = \Pi L^2(S)\Pi$$

$$\boldsymbol{D = i\gamma^a \nabla_a} \longrightarrow \boldsymbol{\widehat{D} = N\hat{\Gamma}^A\left[T\left(X^A\right),\cdot\,\right]}$$

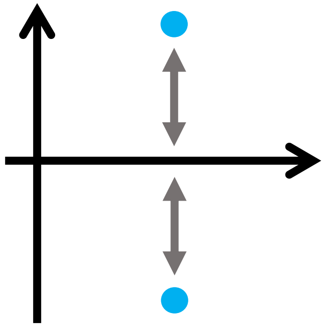
カイラリティの対応

可換な幾何

カイラリティ

$$\gamma = i^{n/2}\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^n$$

$$D\gamma = -\gamma D$$

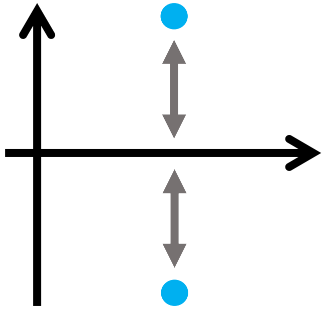


行列幾何

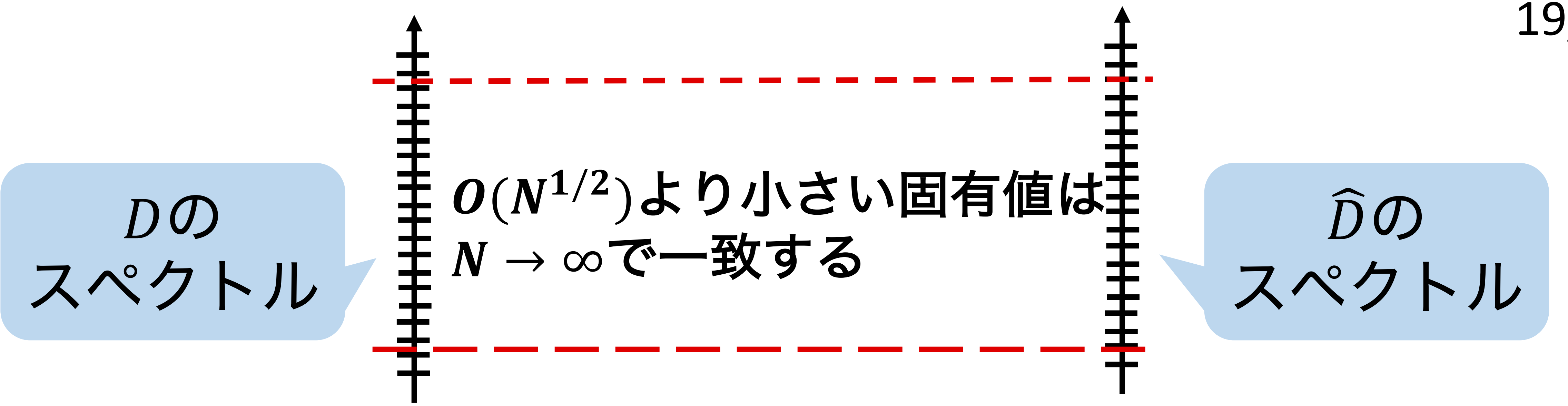
カイラリティ

$$\hat{\gamma} = T(\gamma)$$

$$\widehat{D}\hat{\gamma} = -\hat{\gamma}\widehat{D}$$



カイラリティを保つ



カイラリティも保つ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}\left(\hat{D}\right) &= \mathrm{dimKer}\hat{D}_{+} - \mathrm{dimKer}\hat{D}_{-} \\
&= \mathrm{dimKer}D_{+} - \mathrm{dimKer}D_{-} \\
&= \mathrm{Ind}(D)
\end{aligned}
$$

4. 重力理論の行列正則化

スペクトラル三重項 $\cong$ リーマン多様体

(量子重力理論)＝ リーマン多様体の足しあげ

＝ スペクトラル三重項の足しあげ

[Chamseddine-Connes]

行列正則化 → **行列模型の経路積分**

Admissibility condition

$$\| \hat{D} - \hat{D}_{\mathrm{ref}} \| < \varepsilon N^{1/2}$$

$$S = \mathrm{Trace}\left[\left(\hat{D}^2 - \hat{D}_{\mathrm{ref}}^2\right)/\Lambda^2\right]$$

$$= \boldsymbol{N}\mathbf{Tr}\left(\hat{\boldsymbol{X}}^A\hat{\boldsymbol{X}}^B\left[\hat{\boldsymbol{X}}^A,\hat{\boldsymbol{X}}^C\right]\left[\hat{\boldsymbol{X}}^A,\hat{\boldsymbol{X}}^C\right]\right) + \mathbf{Tr}\left(\hat{\boldsymbol{X}}^A\hat{\boldsymbol{X}}^B\right)\mathbf{Tr}\left(\left[\hat{\boldsymbol{X}}^A,\hat{\boldsymbol{X}}^C\right]\left[\hat{\boldsymbol{X}}^B,\hat{\boldsymbol{X}}^C\right]\right) + \cdots$$

$$\Big\downarrow N \to \infty$$

$$S = \mathrm{Trace}\left[\left(D^2 - D_{\mathrm{ref}}^2\right)/\Lambda^2\right]$$

$$= \boldsymbol{\Lambda}^2 \int \boldsymbol{d}^4\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{g}}\left(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ref}}\right)$$

4 dim
Einstein–Hilbert作用 → **multitrace行列模型**

行列正則化

5. Summary and Discussion

summary

- スペクトラル三重項を用いて、リーマン構造を保つ行列正則化をみた
- 行列正則化でIndexを保つことをみた
- Spectral actionの行列正則化を議論した

discussion

- ケーラー多様体のみ→シンプレクティック多様体に拡張したい
- PB法との対応関係を明らかにしたい
- Spectral actionの行列正則化の数値計算法を議論したい
- RNS形式での行列模型を議論できるかも

backup

スペクトラル三重項

$$(A, H, D)$$

- A ：algebra (関数環 $C^\infty(M)$)
- H ：Hilbert space (スピノル束の切断 $\Gamma(S)$)
- D ：Dirac operator ($D = i\gamma^a \nabla_a$)

3. 行列正則化の一般化 (ベクトル場の行列正則化について)

1. ベクトル場を線形写像として書く
2. 行列の表示をする
3. 有限の長方行列に落とす

電荷Nのスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)

ベクトル場 $A = A_a E^a$

電荷Nのベクトルスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)

Π_0

Π_1

Π_1 はベクトルスピノル全体から$\mathrm{Ker}D_1$への射影

$\mathrm{Ker}D_0$

$T^{(1,0)}(A) = \Pi_1 A \Pi_0$

$\mathrm{Ker}D_1$

1.ベクトル場を線形写像として書く

- $U(1)$ゲージ場A_αを入れる
- 電荷Nのスピノルを考える

$$\frac{1}{2\pi}\int F = 1$$

ベクトル場は線形写像と見なせる

$$A : \psi(x) \mapsto (A\psi)(x) = A_a(x)\psi(x)\, E^a(x)$$

電荷Nのスピノルの空間
(無限次元ベクトル空間)

ベクトル場 $A = A_a E^a$

電荷Nのベクトルスピノルの空間
(無限次元ベクトル空間)

2.行列の表示をする

- ディラック演算子

$$D_0\psi = i\gamma^\alpha(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha)\psi,$$

$$D_1\chi_\beta = i\gamma^\alpha(\partial_\alpha + \Omega_\alpha - iNA_\alpha)\chi_\beta + \gamma^\alpha {\Gamma^\delta}_{\alpha\beta}\chi_\delta$$

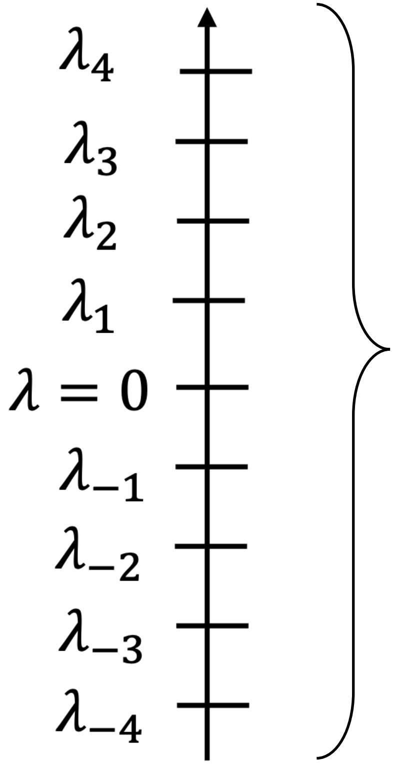
固有スピノル

$$D_0\psi^{(i)} = \lambda_i\psi^{(i)}, \quad D_1\chi_\beta^{(i')} = \Lambda_i\chi_\beta^{(i')}$$

成分は

$$(A)_{i'j} = \left(\chi^{(i')}, A\psi^{(j)}\right)$$

$$(\chi, \chi') = \int_M \omega\, g^{\alpha\beta}\chi_\alpha^\dagger \cdot \chi_\beta{}'$$



固有スピノル
により成分で表示

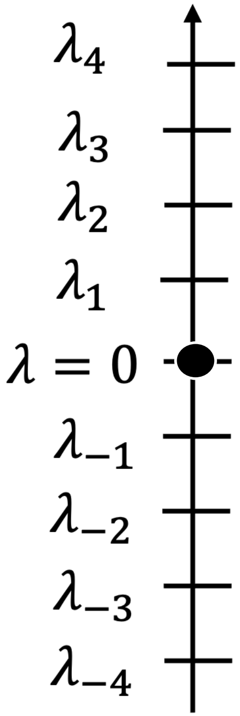
3.有限に落とす

ゼロモード

$$D_0\psi^{(I)}=0$$

指数定理と消滅定理により

$$\psi^{(I)}\quad(I=1,2,\cdots,N)$$



ゼロモード

$$D_1\chi_\alpha^{(I')}=0$$

指数定理と消滅定理により

$$\chi_\alpha^{(I')}\quad(I'=1,2,\cdots,2N)$$

zero modeに射影すると

$$T^{(1,0)}(A)_{I'J}=(\chi^{(I')},A\psi^{(J)})$$

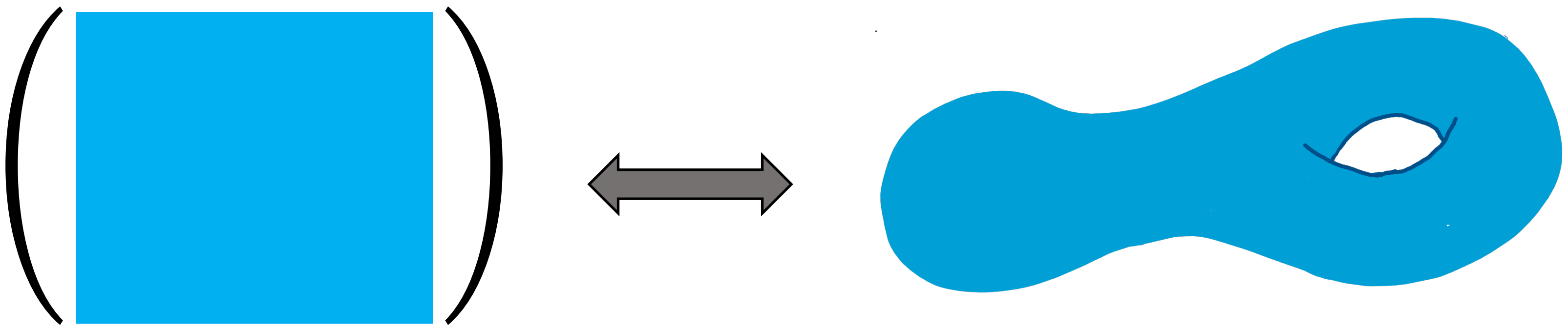
$2N\times N$行列ができる

1. Introduction

弦理論(M理論)

↓ 完全な定式化の候補

行列模型 [BFSS,IKKT]



弦やDブレーン
or
M2/M5ブレーン

行列正則化が重要!! [Hoppe]

行列正則化は次を満たす線形写像 $T_N : C^\infty(M) \to M_N(\mathbb{C})$

$$(1).\ \lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0 \quad \left(\{f,g\} = W^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g\right)$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Tr T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f \quad (\omega\text{: symplectic form})$$

これまでの行列正則化

関数環
(可換C^*-algebra)

等価

位相空間

行列環
(非可換C^*-algebra)

定義

「位相空間」
の行列正則化

D-braneなどでは計量が重要!!
→計量の情報が欲しい

スペクトラル三重項

$$(A, H, D)$$

- A : algebra (関数環 $C^\infty(M)$)
- H : Hilbert space (スピノル束の切断 $\Gamma(S)$)
- D : Dirac operator ($D = i\gamma^a \nabla_a$)

(いくつかの公理を満たす)
スペクトラル三重項

等価

リーマン多様体

行列のスペクトラル三重項?

定義

「リーマン多様体」の行列正則化?

本研究の結果

1. Berezin-Toeplitz量子化を用いて、
   スペクトラル三重項の行列正則化を行なった

2. Indexが等しくなることを示した

3. Spectral action principleを用いて
   重力理論の行列正則化を形式的に行なった

2. Berezin-Toeplitz 量子化(簡単のため2次元空間)

[Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier]

1.関数を線形写像として書く

2.行列の表示をする

3.有限の正方行列に落とす

$$
\begin{tikzcd}
\text{電荷}N\text{のスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)} \arrow[r, "\text{関数 } f"'] \arrow[d, "\Pi_0"] & \text{電荷}N\text{のスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)} \arrow[d, "\Pi_0"] \\
\mathrm{Ker}D_0 \arrow[r, "T^{(0,0)}(f) = \Pi_0 f \Pi_0"] & \mathrm{Ker}D_0
\end{tikzcd}
$$

Π_0 はスピノル全体から$\mathrm{Ker}D_0$への射影

1.関数を線形写像として書く

- $U(1)$ゲージ場A_αを入れる
- 電荷Nのスピノルを考える

$$\frac{1}{2\pi}\int F = 1$$

関数は線形写像と見なせる

$$f : \psi(x) \mapsto (f\psi)(x) = f(x)\psi(x)$$

$$\text{電荷}N\text{のスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)} \xrightarrow{\text{関数 } f} \text{電荷}N\text{のスピノルの空間 (無限次元ベクトル空間)}$$

2.行列の表示をする

•ディラック演算子

$$D_0\psi = i\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha} + \Omega_{\alpha} - iNA_{\alpha})\psi \qquad \begin{cases} \gamma^{\alpha} & \text{: Gamma Matrix} \\ \Omega_{\alpha} & \text{: Spin connection} \end{cases}$$

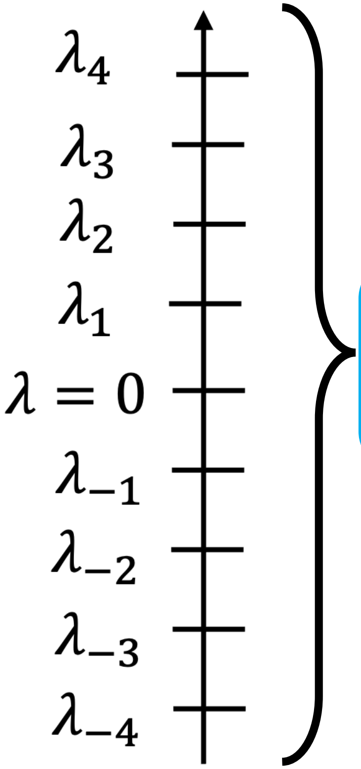
固有スピノル

$$D_0\psi^{(i)} = \lambda_i\psi^{(i)}$$

成分は

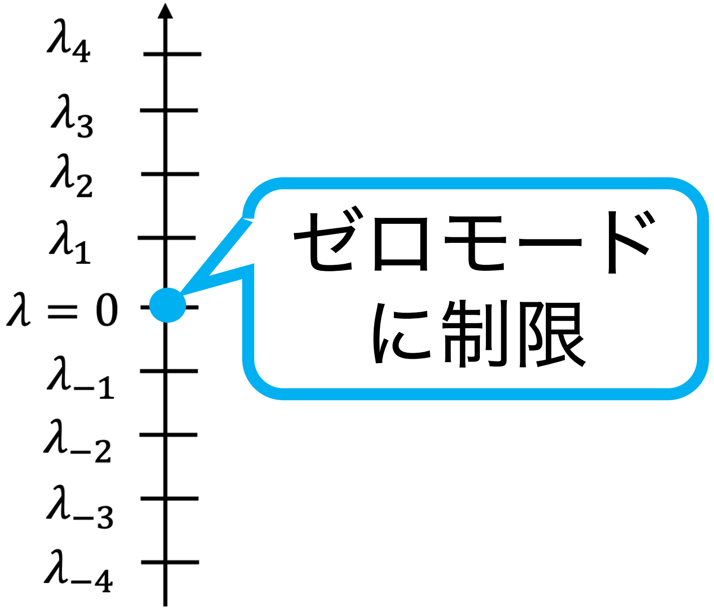
$$\boldsymbol{(f)_{ij} = \left(\psi^{(i)}, f\psi^{(j)}\right)}$$

$$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}') = \int_M \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\psi}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{\psi}'$$



固有スピノル
により成分で表示

3.有限に落とす



ゼロモード

$$D_0 \psi^{(I)} = 0$$

指数定理と消滅定理により

$$\psi^{(I)} \quad (I = 1,2,\cdots,N)$$

ゼロモードに射影すると

$$T^{(0,0)}(f)_{IJ} = (\psi^{(I)}, f\psi^{(J)})$$

$N \times N$行列ができる

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}\left|T^{(0,0)}(f)T^{(1,0)}(A)\ -T^{(1,0)}(fA)\right|=0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty}\left|iN[T(f),T(A)\ ]^{(1)}\ -T^{(1,0)}(\{f,A\})\right|=0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(T^{(1,0)}(A)^{\dagger}T^{(1,0)}(A)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_M \omega A_a^{\dagger}A^a$$

一般化ポアソン括弧と一般化交換関係

$$\{f,A\}=W^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\nabla_\beta A$$

$$[T(f),T(A)\ ]^{(1)}\ \equiv T^{(1,1)}(f)T^{(1,0)}(A)-T^{(1,0)}(A)T^{(0,0)}(f)$$

電荷Nの
ベクトルスピノルの空間

$\xrightarrow{\text{関数 } f}$

電荷Nの
ベクトルスピノルの空間

$\downarrow \Pi_1$ $\qquad$ $\downarrow \Pi_1$

KerD_1 $\xrightarrow{T^{(1,1)}(f)=\Pi_1 f\Pi_1}$ KerD_1

$T^{(1,1)}(f)$は
$2N\times 2N$行列