

Boundary condition and reflection anomaly in 2+1 dimensions

松戸 竜太郎

Department of Physics, National Taiwan University

August 8, 2023

In collaboration with Jiunn-Wei Chen and Chang-Tse Hsieh

場の理論と弦理論 2023, YITP

Outline

- 1 Introduction
- 2 2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件
- 3 鏡映対称性と境界条件
- 4 (モノポール・フェルミオン散乱との関係)
- 5 (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

Outline

① Introduction

② 2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件

③ 鏡映対称性と境界条件

④ (モノポール・フェルミオン散乱との関係)

⑤ (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

アノマリーと境界条件

- 理論の大域的対称性が**ゲージ化できない**とき、その理論は't Hooft anomaly を持つという。
cf: ABJ anomaly. 4d 自由フェルミオン理論の $U(1)_A$ 対称性はゲージ化できない。
 - ▶ 物性：SPT 相の分類。SPT 相はバルクではギャップがあるが、表面にゼロモードが存在し、そのゼロモードは anomalous な理論によって記述される。
 - ▶ 素粒子：QCD（等）の相図の制限（Renormalization group 不変なため）
- ある対称性が't Hooft anomaly を持つとき、**その対称性を保つ境界条件が存在しない**（ようである）。また、逆もなりたつ。
- 非自明にアノマリーを打ち消したときに、対称性を保とうとすると**境界で非自明な散乱**が起きる（ことがある）。
- 境界条件とアノマリーの関係は主に 1+1 次元の場合に調べられていて、より高次元の場合は限定的（perturbative anomaly）。

1+1d の場合: [B. Han, A. Tiwari, C.-T. Hsieh, S. Ryu (2017); L. Li, C.-T. Hsieh, Y. Yao (2022)]

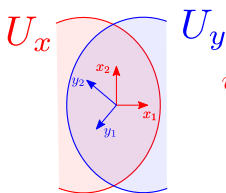
Perturbative anomaly の場合: [K. Jensen, E. Shaverin, A. Yarom (2018)]

1+1d Non-invertible sym. の場合: [Y. Choi, B. C. Raychaudhury, Y. Sanghavi, S.-H. Shao (2023)]

離散時空対称性のアノマリー

- 本公演では主にフェルミオン場の**鏡映対称性**
 $\psi(x, y) \rightarrow \gamma^x \psi(-x, y)$ を主に考える。
- この場合の「ゲージ化」は、**向き付不可能（正確には Pin^+ ）多様体**上で理論を考えることに相当する。
- 座標系の変換が反転を含んでいるとき、フェルミオンの遷移関数は鏡映を含む。
cf.) $U(1)$ ゲージ化した時遷移関数に $U(1)$ 含められる。

Orientation-reversing transition function

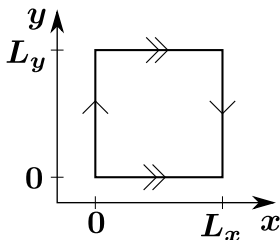


$$\begin{aligned}\psi(x(y)) &= M_{xy} \psi_y(y) \\ \text{at } U_x \cup U_y \\ M_{xy} &\in \text{Pin}^+(2)\end{aligned}$$

cf) $U(1)$ monopole gauge field

$$\begin{aligned}A_N &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) d\varphi \\ A_S &= \frac{1}{2}(-1 - \cos \theta) d\varphi \\ \psi_N &= e^{i\varphi} \psi_S \\ e^{i\varphi} &\in U(1)\end{aligned}$$

空間を **クライン・ボトル** として、2+1 次元のマヨラナ・フェルミオンを考え、具体的にアノマリーをみる。(cf. [Y. Tachikawa, K. Yonekura (2017)])



- $\gamma^t = i\sigma^2, \gamma^x = \sigma^1, \gamma^y = -\sigma^3$. 以下の条件を課す：

$$\psi(x, y) = \psi(x, y + L_y) = \gamma^y \psi(x + L_x, L_y - y)$$

- $e^{ip_y y} (L_y p_y / (2\pi) \in \mathbb{Z})$ で展開。
- (t, x) の 1+1 次元の理論に帰着。 $p_y \neq 0$ のモードは massive なので アノマリーに関係ない。
- $p_y = 0$ を見ると、 $\psi_0(x) = -\sigma^3 \psi_0(x + L_x)$ 。
- ゼロ点エネルギーで運動量が $\mathbf{p}_x L_x / (2\pi) = 1/16 \bmod 1$ 。
- 1+1 次元の理論として $x \sim x + L_x$ なのに、 L_x 並進が $e^{ip_x L_x} \neq 1$ なので、おかしい。

Outline

- 1 Introduction
- 2 **2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件**
- 3 鏡映対称性と境界条件
- 4 (モノポール・フェルミオン散乱との関係)
- 5 (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

2+1 次元におけるいくつかの対称性のアノマリーの分類

- ディラック・フェルミオン Ψ ($\tilde{\Psi}$) に対する以下の変換を考える。
ガンマ行列は以下 $\gamma^t = i\sigma_2$, $\gamma^x = \sigma_1$, $\gamma^y = -\sigma^3$ と取る。
マヨラナ条件は、 $\Psi^* = \Psi$.

$$U(1) : \Psi(t, x, y) \rightarrow e^{i\alpha} \Psi(t, x, y),$$

$$R : \Psi(t, x, y) \rightarrow \gamma^x \Psi(t, -x, y),$$

$$\tilde{R} : \Psi(t, x, y) \rightarrow i\gamma^x \Psi(t, -x, y),$$

$$CR : \Psi(t, x, y) \rightarrow \gamma^x \Psi^*(t, -x, y),$$

$$\widetilde{CR} : \begin{cases} \Psi(t, x, y) \rightarrow \gamma^x \tilde{\Psi}^*(t, -x, y), \\ \tilde{\Psi}(t, x, y) \rightarrow -\gamma^x \Psi^*(t, -x, y). \end{cases}$$

- $O(n)$ の double cover のうち鏡映の対応物が $R^2 = 1$ を満たすものを $\text{Pin}^+(n)$, $\tilde{R}^2 = (-1)^F$ を満たすものを $\text{Pin}^-(n)$ と呼ぶ。
- R はマヨラナ一個に対して定義できるが、 $\tilde{R}$ はできない。

- この $U(1)$ はその元 $-1 \in U(1)$ が $(-1)^F$ に一致する。
 $\text{Spin}^c(n) = [\text{Spin}(n) \times U(1)]/\mathbb{Z}_2$
- $\widetilde{CR}^2 = (-1)^F$ で特徴づけられる $\widetilde{CR}$ はディラック二つないと定義できない。

Symmetries	$\text{Pin}^+(n)$	$\text{Pin}^-(n)$	$\text{Spin}^c(n)$	$\text{Pin}^c(n)$	$\text{Pin}_{+}^{\widetilde{c}}(n)$	$\text{Pin}_{-}^{\widetilde{c}}(n)$
Subgroups	R	$\widetilde{R}$	$U(1)$	$U(1) \times R$	$U(1) \rtimes CR$	$U(1) \rtimes \widetilde{CR}$
3d anomalies, 4d SPTs	$\mathbb{Z}_{16}$	0	0	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
Bosonic SPT part	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$

c.f.) [C. Wang, T. Senthil (2014)], [A. Kapustin, R. Thorngren, A. Turzillo, Z. Wang (2015)], [X.-G. Wen (2017)]

- アノマリーを分類する群の積は理論の“直積”（作用を足す）で与えられる。単位元はアノマリーがない理論を表す。
- R アノマリーの $\mathbb{Z}_{16}$ を生成する理論は **massless マヨラナ一個** の理論。**マヨラナ 16 個の理論はこのアノマリーがない。**
- $U(1) \times R$ アノマリーの $\mathbb{Z}_8$ を生成する理論は **massless Dirac 一個** の理論。**ディラック 8 個の理論はこのアノマリーがない。**
- $U(1) \rtimes CR$ アノマリーの $\mathbb{Z}_2$ を生成する理論は **massless Dirac 一個** の理論。**ディラック 2 この理論はこのアノマリーがない。**
- ほかの対称性については自由フェルミオン理論にアノマリーはない。

2 + 1 次元のフェルミオン理論の境界条件

- $y \geq 0$ の空間を考える。境界は $y = 0$ 。
- 境界条件は Hamiltonian $-i\gamma^t\gamma^k\partial_k$ が Hermitian であるようにとる

$$0 = (\tilde{\psi}, \mathcal{H}\psi) - (\mathcal{H}\tilde{\psi}, \psi) = \int dt dx \tilde{\psi}_j^\dagger (-i)\gamma^t\gamma^y\psi_j \Big|_{y=0}.$$

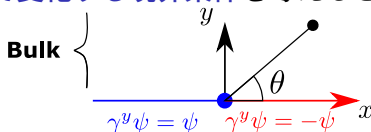
- 単純な境界条件として以下を考える。
 $\gamma^y\Psi = \pm\Psi$: $R, \tilde{R}, CR$ のいずれも保存しない。
 $\gamma^y\Psi = \pm\Psi^*$: $\tilde{R}, CR$ を保存する。 $R, U(1)$ を保存しない。
- $U(1) \rtimes \widetilde{CR}$ を保存する境界条件として、例えば、
 $\gamma^y\Psi = \Psi, \gamma^y\tilde{\Psi} = -\tilde{\Psi}$ がある。
- ディラック 8 個の時に $U(1) \times R$ 、ディラック 2 個の時に $U(1) \rtimes CR$ を保存する境界条件があるはずであるが、この中にはない。

Outline

- 1 Introduction
- 2 2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件
- 3 鏡映対称性と境界条件**
- 4 (モノポール・フェルミオン散乱との関係)
- 5 (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

鏡映対称性を（一見）保つ境界条件

- 質量ゼロのマヨラナ・フェルミオン ψ を考える。
以下のように**原点で変化する境界条件**を考えると、 R が保存する。



この境界条件は**マヨラナ一個**のとき問題が発生する。

- この境界条件を満たす場は以下のように展開できる。

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} f_n(t, r) \cos(n\theta) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{r}} g_n(t, r) \sin(n\theta) \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right),$$

- 完全系を張ることは以下のようにわかる。
 - ▶ 二次元のベクトルとして基底を $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$, $(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$ に選ぶ。
 - ▶ $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ はすでに境界条件を満たしている ($\gamma^y = -\sigma^3$ としている)。よって θ の任意の関数をかけられる。 $\theta \in [0, \pi]$ の任意関数は $\cos(n\theta)$ で展開できる。(2π -periodic の偶関数に拡張できるので。)
 - ▶ $(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$ は境界条件を満たしていない。まえにかけられる関数は $\theta = 0, \pi$ でゼロになるもの。これは $\sin(n\theta)$ で展開できる。

- Dirac 方程式から

$$(\partial_t - \partial_r)f_n - \frac{n}{r}g_n = 0, \quad (\partial_t + \partial_r)g_n + \frac{n}{r}f_n = 0.$$

- エネルギー E の解は、 $(M(a, b, x): \text{Kummer's function})$

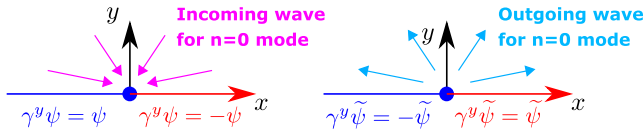
$$f_n(t, r; E) = e^{iE(t-r)} r^n M(n+1, 2n+1, 2iEr) \sim e^{iE(t+r)},$$

$$g_n(t, r; E) = -e^{iE(t+r)} r^n M(n+1, 2n+1, -2iEr) \sim e^{iE(t-r)}$$

- $n > 0$ のモードは、 f_n が入射波、 g_n が対応する反射波となる。
- $n = 0$ では、入射波である f_0 のみが存在し、対応する反射波ない。
よって、エネルギーが保存できない。
- 展開を作用に代入すると、 $n = 0$ モードは (t, r) の二次元の massless left-moving Majorana-Weyl fermion になる：

$$S_{n=0} = \int dt \int_0^\infty dr \, i f_0 (\partial_t - \partial_r) f_0.$$

- 右辺の符号が逆の境界条件を課すと反対に $n = 0$ モードが反射波のみになる。



- $n = 0$ だけに着目すると t, r の二次元の自由フェルミオン理論になる。 f_0 が left-mover で、 $\tilde{g}_0$ が right-mover.
- この時、例えば $f_0 = \tilde{g}_0|_{r=0}$ という条件を課せる。 $n > 0$ のモードは原点に到達しないので、これは、 $\psi = \gamma^t \tilde{\psi}|_{r=0}$ とかける。これは R を破っている。
- $\psi, \tilde{\psi}$ がディラックだったことにし、 $\psi = i\gamma^t \tilde{\psi}|_{r=0}$ を課すと、 $U(1) \times CR$ が保存できる。

R を保つ境界条件

- ψ の境界条件と $\tilde{\psi}$ の境界条件に従うフェルミオンを同数ずつ用意する。

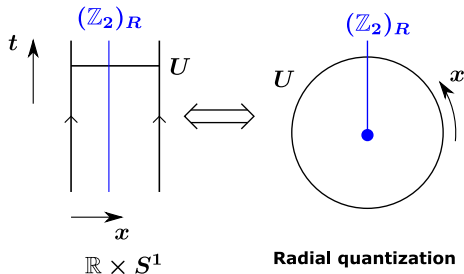
$n = 0$ の理論は、複数の $1+1d$ マヨラナ・フェルミオンの理論, $r = 0$ が境界

$$S_{n=0} = \int dt \int_0^\infty dr [i f_0^j (\partial_t - \partial_r) f_0^j + i \tilde{g}_0^j (\partial_t + \partial_r) \tilde{g}_0^j].$$

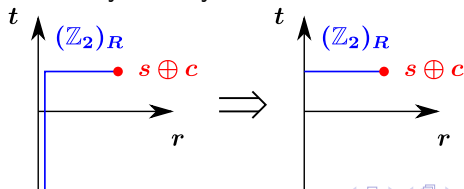
- 鏡映対称性は $n = 0$ モードに対して、 $f_0 \rightarrow f_0$, $\tilde{g}_0 \rightarrow -\tilde{g}_0$. これは、 (t, r) の二次元の理論における **chiral fermion parity** $(\mathbb{Z}_2)_R$.
- これを保つ境界条件は、知られていて、 ψ 8 個、 $\tilde{\psi}$ 8 個のとき、**Maldacena-Ludwig 境界条件**。

散乱の終状態

- 終状態は 8 個の right-moving マヨラナを混ぜる $SO(8)$ の **スピン表現** $s \oplus c$ に属する。これは **Ramond セクター** の表現。
- $(\mathbb{Z}_2)_R$ の symmetry defect の端がこの状態を生成する。



- 境界で対称性が保存 = symmetry defect が境界に端を持てる。



- R セクターの真空=クリフォード代数の表現

$$\Gamma_{2j-1} = \psi_j^0 + \psi_j^{0\dagger}, \quad \Gamma_{2j} = -i(\psi_j^0 - \psi_j^{0\dagger}) \quad (\psi_j = \sum_n \psi_j^n e^{2\pi i n x/L}).$$

- $(\mathbb{Z}_2)_R$ の生成子は “chirality 行列” Γ ($\Gamma \psi_j^0 \Gamma = -\psi_j^0$, $\Gamma^2 = 1$ から).
- Γ の固有値は 1 か -1. 1 のほうが終状態とすると $(\mathbb{Z}_2)_R$ 保存する。

Outline

- 1 Introduction
- 2 2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件
- 3 鏡映対称性と境界条件
- 4 (モノポール・フェルミオン散乱との関係)
- 5 (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

モノポール・フェルミオン散乱との関係

- 3+1次元のワイル・フェルミオン一個をモノポール背景と結合する。これは、カイラル・アノマリーによって問題が発生しているはずである。

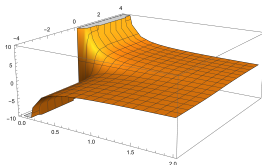
$$S = \int d^4x \chi_L^\dagger i \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - i A_\mu) \chi_L, \quad A_\mu = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \partial_\mu \varphi.$$

- 実際部分波展開すると、フェルミオン場の **s 波成分はモノポールへの入射波しか存在せず、対応する反射波がない**ことがわかる。
- ここで、フェルミオン場の $J^3 = 0$ の成分を作用に代入すると、2+1次元の作用が得られる： $\gamma_{3d}^t = i\sigma_2$, $\gamma_{3d}^z = \sigma_1$, $\gamma_{3d}^\rho = -\sigma_3$

$$\int dt \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty dz \left(-\bar{\Psi} \gamma_{3d}^\mu \partial_\mu \Psi - \Phi \bar{\Psi} \Psi \right), \quad \Phi = \frac{z}{2\rho \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

- この作用は、 $\Phi(z) = -\Phi(-z)$ のため、 $\Psi(z) \rightarrow \gamma_{3d}^z \Psi(-z)$ の R に対して不変である。

- $\rho = 0$ において Φ が無限に大きくて正負が原点でかわる影響で、 Ψ は前述の変化する境界条件を自動で満たす.



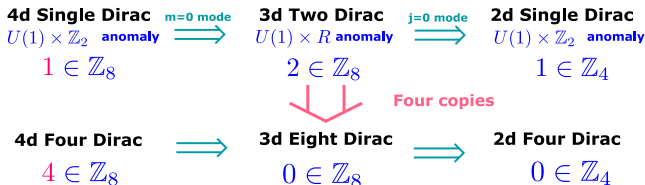
- R を保つ境界条件が禁止されているため、対応する反射波がない入射波が存在する問題が生じているということもできる。

モノポール散乱：反射波がある場合

- 同じチャージの右巻きワイル χ_R を導入することで、反射波を対応させられる。その場合、4次元における chiral fermion parity $(\chi_L, \chi_R) \rightarrow (\chi_L, -\chi_R)$ が破れる。これと、 $U(1)$ ゲージ変換および空間回転を組み合わせたものが $m = 0$ 成分の R に対応する：

$$\chi_L(t, x, y, z) \rightarrow e^{i\varphi} \sigma_x \chi_L(t, x, -y, -z), \quad \chi_R(t, x, y, z) \rightarrow -e^{i\varphi} \sigma_x \chi_R(t, x, -y, -z).$$

- (χ_L, χ_R) を四組用意することで、 $\mathbb{Z}_2$ 対称性を保てる。
- 4次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ のアノマリーは $\mathbb{Z}_8$ で分類されるが、この $4 \in \mathbb{Z}_8$ の理論でもモノポール散乱でこの対称性を保てる。
 $\Rightarrow$ モノポール散乱は4次元のアノマリーの一部を反映する、といえる。



Outline

- 1 Introduction
- 2 2+1 次元のいくつかのアノマリーと線形の境界条件
- 3 鏡映対称性と境界条件
- 4 (モノポール・フェルミオン散乱との関係)
- 5 (3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ (or $\mathbb{Z}_4$) アノマリーとの関係)

3+1 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ アノマリーとの関係

4 次元の $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ のアノマリーと 3 次元の $U(1) \times R$ のアノマリーの分類は $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ となり一致する。

これは、bordism 群の間の isomorphism $\tilde{\Omega}_m^{\text{Spin}^c}(B\mathbb{Z}_2) \rightarrow \Omega^{\text{Pin}^c}_{m-1}$ が存在する事から従う。[A. Bahri, P. Gilkey (1987)]

このことから、4 次元における $U(1) \times \mathbb{Z}_2$ を保つ境界条件で、3 次元の $U(1) \times R$ を保つ境界条件の問題に帰着できるものが存在することが予想される。

- 4d Dirac fermion Ψ_{4d} を考える。
- $x \geq 0$ の空間を考え、 $x = 0$ を境界とする。
- $\mathbb{Z}_2$ を $\Psi_{4d} \rightarrow -\gamma^5 \Psi_{4d}$ とする。((1, -1, -1, -1) 符号)
- 境界条件:

$$\Psi_{4d} = -\gamma^5 \gamma^x \Psi_{4d} \quad \text{at } y > 0, x = 0, \quad \Psi_{4d} = \gamma^5 \gamma^x \Psi_{4d} \quad \text{at } y < 0, x = 0,$$

- $\mathbb{Z}_2$ と空間回転の組み合わせが (一見) 保存する:

$$\Psi_{4d}(t, x, y, z) \rightarrow -\gamma^5 \gamma^y \gamma^z \Psi_{4d}(t, x, -y - z)$$

- 境界条件を満たす展開

$$\chi_L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} i \exp\left(i \frac{2n-1}{2}(\varphi - \frac{\pi}{2})\right) \Psi_n^1(t, \rho, z) \\ \exp\left(i \frac{2n+1}{2}(\varphi - \frac{\pi}{2})\right) \Psi_n^2(t, \rho, z) \end{pmatrix}, \quad \psi_n^1, \psi_n^2 \in \mathbb{R}.$$

($i\sigma^2\chi_R$ は χ_L の $\Psi_n^{1,2}$ を $(\Psi_n^1, 2)^*$ に置き換えたもの) の $n=0$ 成分は 3 次元の massless Dirac 一個

$$S_{n=0} = \int dt dz d\rho \Psi_0^\dagger (-i) \gamma_{3d}^0 \gamma_{3d}^\mu \partial_\mu \psi_0.$$

に帰着し、上述の変換は R に帰着する:

$$\Psi_0(t, z, \rho) \rightarrow \gamma^z \Psi_0(t, -z, \rho).$$

Dirac 一個 (Majorana 二個) では $\rho=0$ における R を保つ境界条件は存在しないので、結局 3+1 次元の $\mathbb{Z}_2$ は保存しない。

- Dirac 八個持ってくれば、帰着した 2+1 次元理論の R 、ひいては 3+1 次元の $\mathbb{Z}_2$ を保存できる。

将来研究

- $2+1$ 次元の場合のエキゾチック状態を生成する演算子はどうかけるか？
- $1+1$ 次元では、
 - ▶ **Chiral fermion parity** の演算子 (1 次元の線上に定義される) の端の点上の演算子
 - ▶ Bosonize した理論においては、半キंकとしてかける。
- $2+1$ 次元では、
 - ▶ Chiral fermion parity の対応物は**鏡映対称性**なので、これを用いることを試みる。
 - ▶ $2+1$ 次元における **bosonization** (conjecture) を用いる。
Dirac fermion 理論と $O(2)$ Wilson-Fisher fixed point をゲージ化した理論が双対。
これの Non-Abelian の対応物も議論されている。