

2-flavor Schwinger模型のSPT的性質と 質量スペクトルの関係

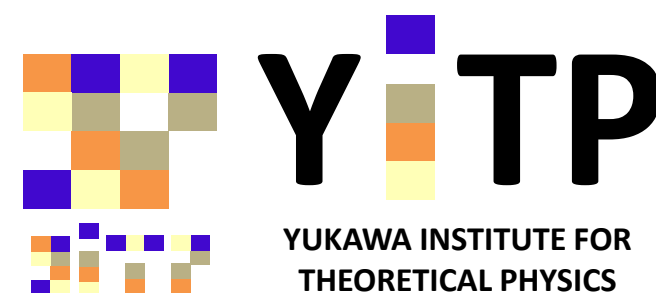
松本 祥 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS)

collaboration with

伊藤 悦子 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS) and 谷崎 佑弥 (YITP, Kyoto U)

[arXiv:2307.16655](https://arxiv.org/abs/2307.16655)

場の理論と弦理2023, 8 August 2023 @YITP

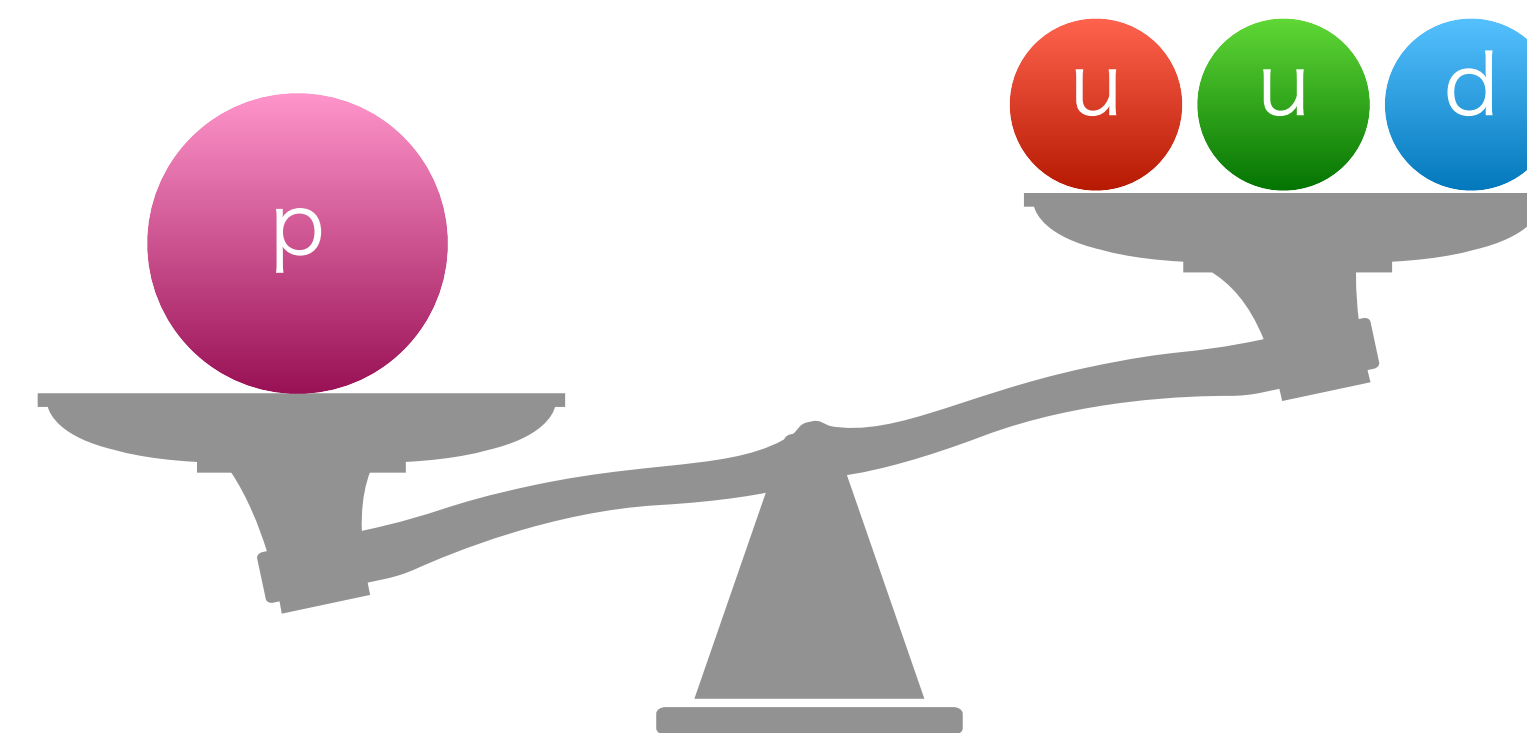


複合粒子の質量スペクトル

- QCDにおける複合粒子(ハドロン)の質量

u/d クォーク : 2~5 MeV

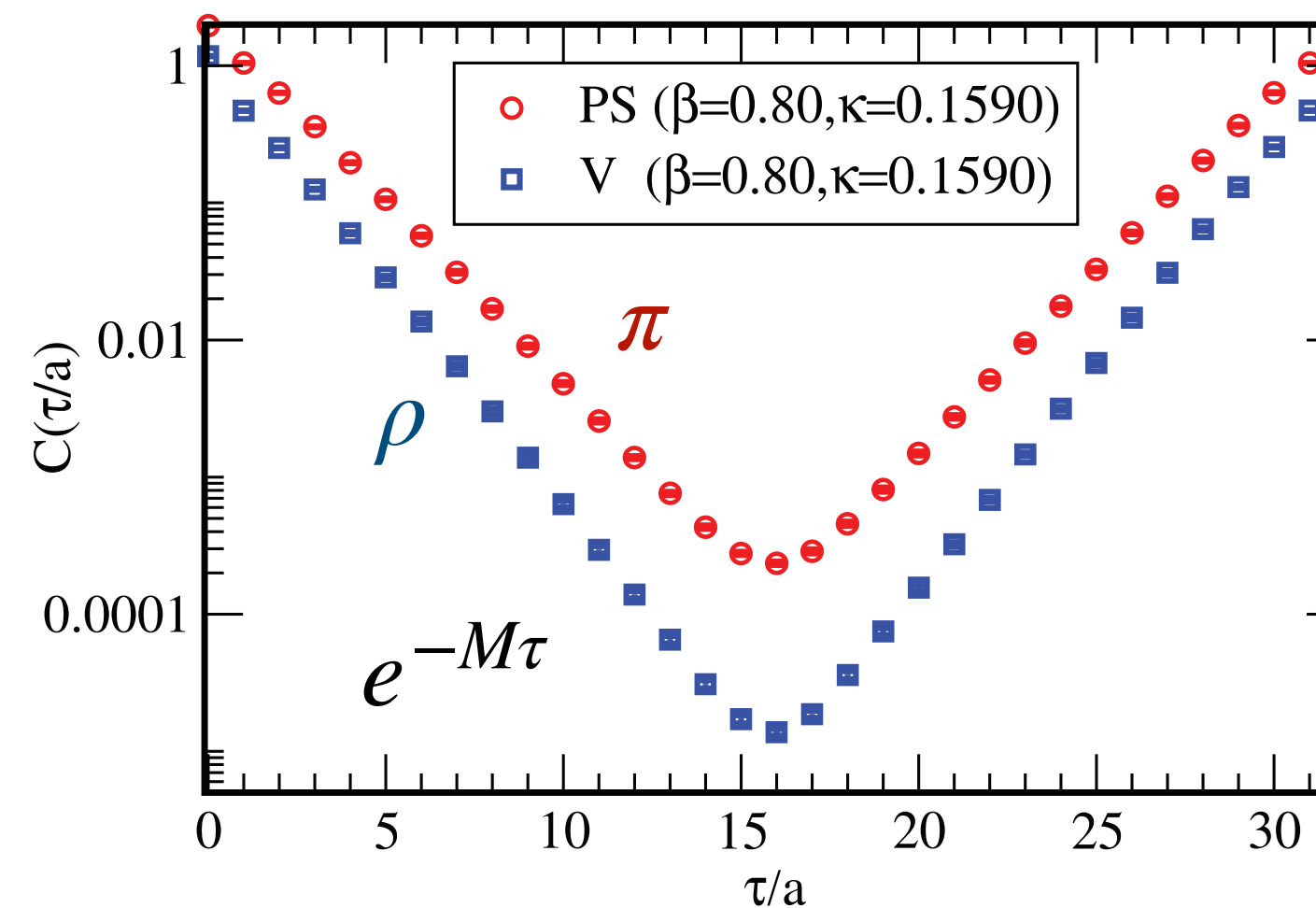
陽子 (uud) : $938 \text{ MeV} \gg 2m_u + m_d$



- lattice Monte Carlo simulation
による非摂動的計算

(Lagrangian形式)

- ハドロン質量は2点相関関数
から計算できる
→ 実験値を再現



[Iida et al. (2021)]

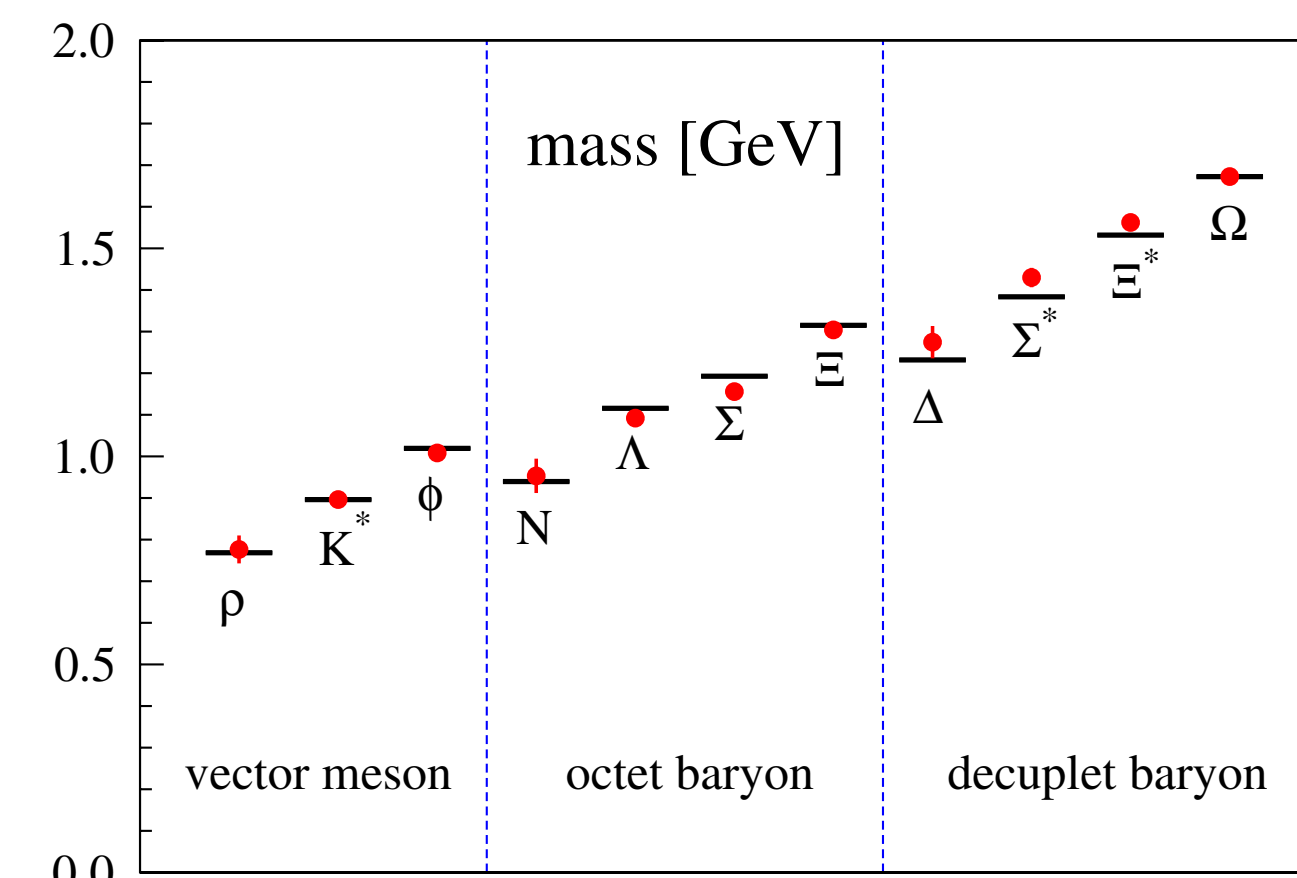


FIG. 24 (color online). Light hadron spectrum extrapolated to the physical point using m_π , m_K and m_Ω as input. Horizontal bars denote the experimental values.

[PACS-CS collab. (2009)]

ハミルトニアン形式におけるQFTの数値計算

- 指数関数的に大きなヒルベルト空間の数値的な取り扱い
- テンソルネットワークや量子計算の発展
 - 👍 符号問題がない
 - 👍 励起状態の直接的な取得
- 場の理論への新たな非摂動的アプローチ (有限密度QCD, θ 項, 実時間発展, ...)

本研究の目的

ハミルトニアン形式において複合粒子の質量スペクトルの計算する

Schwinger模型への適用

Schwinger模型 (QED_{1+1d})

- ・ 簡単ながら非自明なゲージ理論であり、QCDと似た性質を持つ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \left[i\bar{\psi}_f\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iA_\mu \right) \psi_f - m\bar{\psi}_f\psi_f \right]$$

Nf=1

- ・ 先行研究: chiral condensate, $q\bar{q}$ potential, mass spectrum, ...

[Chakraborty et al. (2022)]

[Honda et al. (2022)]

[Banuls et al. (2013)]

Nf=2

- ・ QCDのanalogyとしての“ハドロソ” → good testing ground

2-flavor Schwinger模型の複合粒子

3つの“メソン”

$$\pi = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 1^{-+}$$

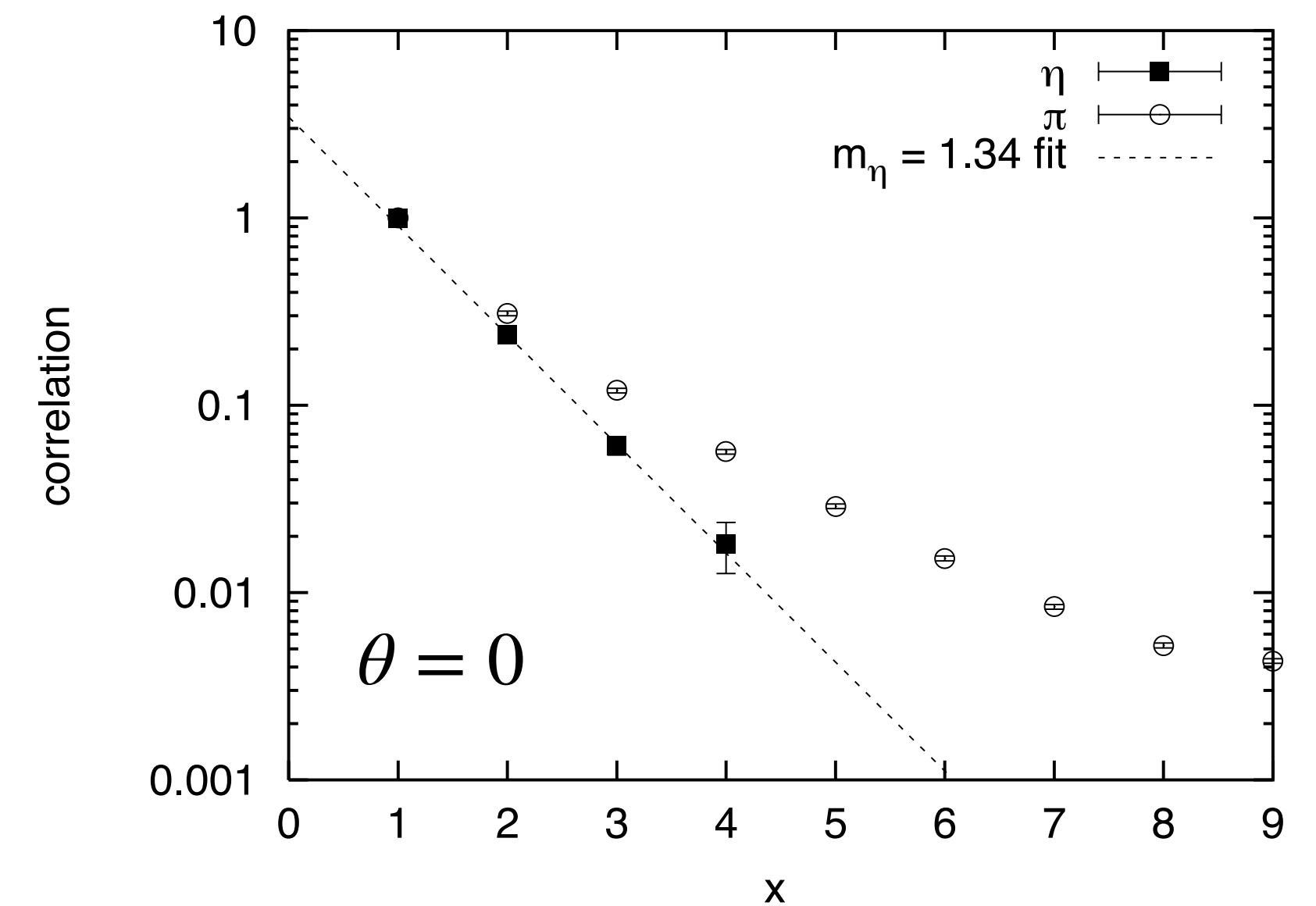
$$\eta = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 0^{--}$$

$$\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2 : J^{PG} = 0^{++}$$

量子数

- isospin J : flavor doubletに作用するSU(2)対称性
- parity P
- G-parity $G = Ce^{i\pi J_y}$ (C の一般化)

Monte Carlo法による先行研究



[Fukaya & Onogi (2003)]

u/d クォークを含むQCDのtoy model

Short summary

- 複合粒子の質量スペクトルの計算方法

- (1) correlation-function scheme — MC計算でも用いられる一般的手法

- (2) one-point-function scheme — boundary effectを有効活用

- (3) dispersion-relation scheme — 励起状態を直接取得する

- テンソルネットワーク(DMRG)を用いて、2-flavor Schwinger模型で検証

- (2)は2-flavor Schwinger模型のSPT性質を利用している

Calculation strategy

- 格子上のハミルトニアン (open boundary condition)

$$H = \frac{g^2 a}{2} \sum_{n=0}^{N-2} \left(L_n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \left[\frac{-i}{2a} \sum_{n=0}^{N-2} \left(\chi_{f,n}^\dagger U_n \chi_{f,n+1} - \chi_{f,n+1}^\dagger U_n^\dagger \chi_{f,n} \right) + m_{\text{lat}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_{f,n}^\dagger \chi_{f,n} \right]$$

- Gauss lawを解きゲージ場を消去

[Kogut & Susskind (1975)]

[Dempsey et al. (2022)]

- ゲージ固定 $U_n = 1$

- Jordan-Wigner変換 for $N_f=2$

$$\chi_{1,n} = \sigma_{1,n}^- \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z), \quad \chi_{2,n} = \sigma_{2,n}^- (-i\sigma_{1,n}^z) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

→ 有限のヒルベルト空間を持つスピン系のハミルトニアン

密度行列繰り込み群 (DMRG)

[White (1992)] [Schollwöck (2005)]

行列積状態(MPS)をansatzとし、 H の固有状態を変分法により求める

- コスト関数：エネルギー $E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$

- $A_i(s_i)$ ： $D_{i-1} \times D_i$ 行列 (D_i ：bond次元)

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$$

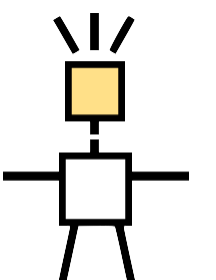
- 近似の精度を決めるcutoffパラメーター ε を導入

特異値分解において、 ε より小さい特異値は無視される

→ ε を小さくすると D_i は大きくなる

- 第 k 励起状態 $|\Psi_k\rangle$ → コスト関数：
$$\langle \Psi_k | H | \Psi_k \rangle + W \sum_{k'=0}^{k-1} \left| \langle \Psi_{k'} | \Psi_k \rangle \right|^2$$

本研究の計算には、ITensorのC++ libraryを用いた [Fishman et al. (2022)]



数値計算の結果

1. Correlation-function scheme
2. One-point-function scheme
3. Dispersion-relation scheme

数値計算の結果

1. Correlation-function scheme

2. One-point-function scheme

3. Dispersion-relation scheme

(1) Correlation-function scheme

- 2点相関関数： $C_\pi(r) = \langle \pi(x)\pi(y) \rangle$
- 有効質量： $M_{\pi,\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dr} \log C_\pi(r), \quad r = |x - y|$

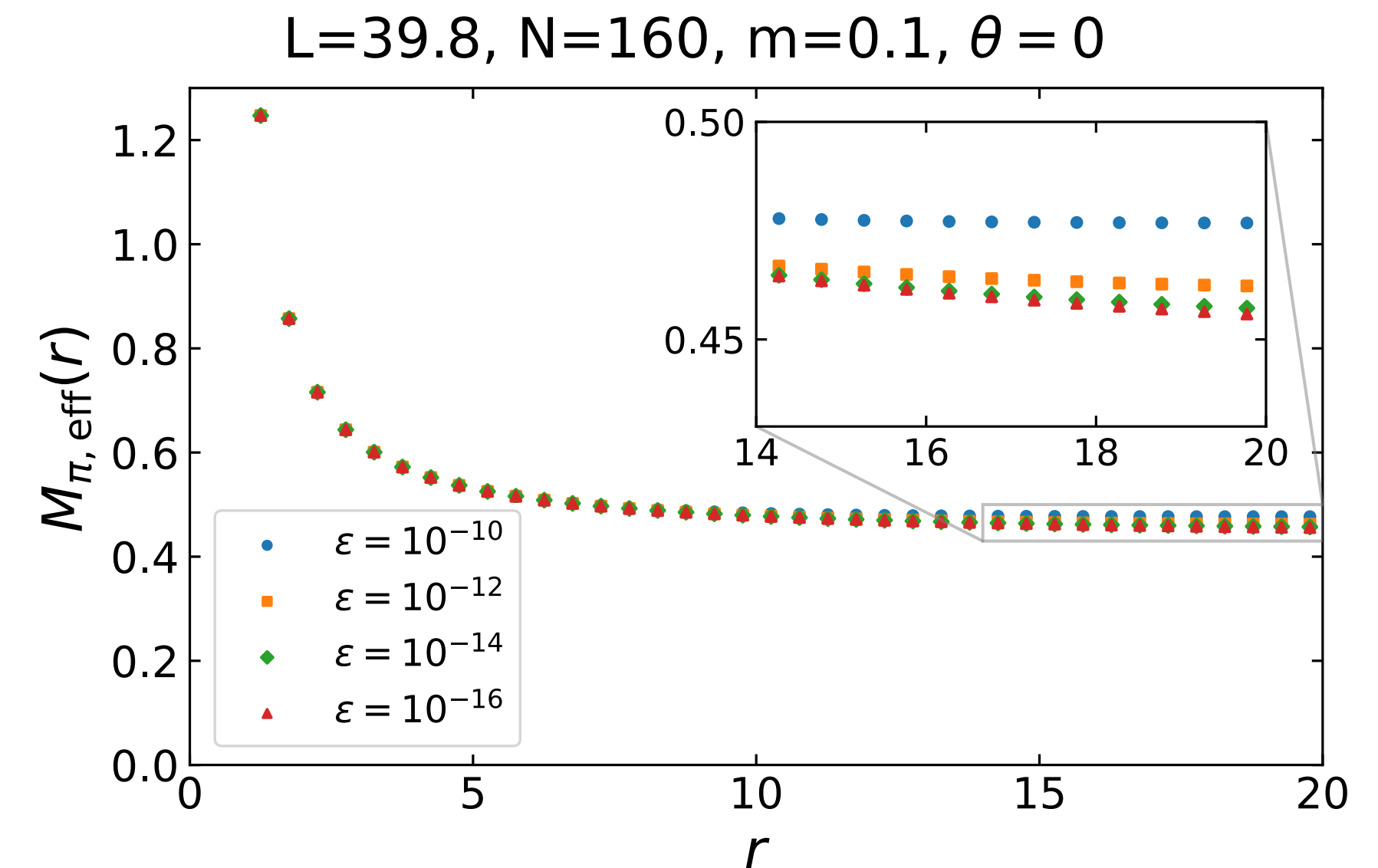
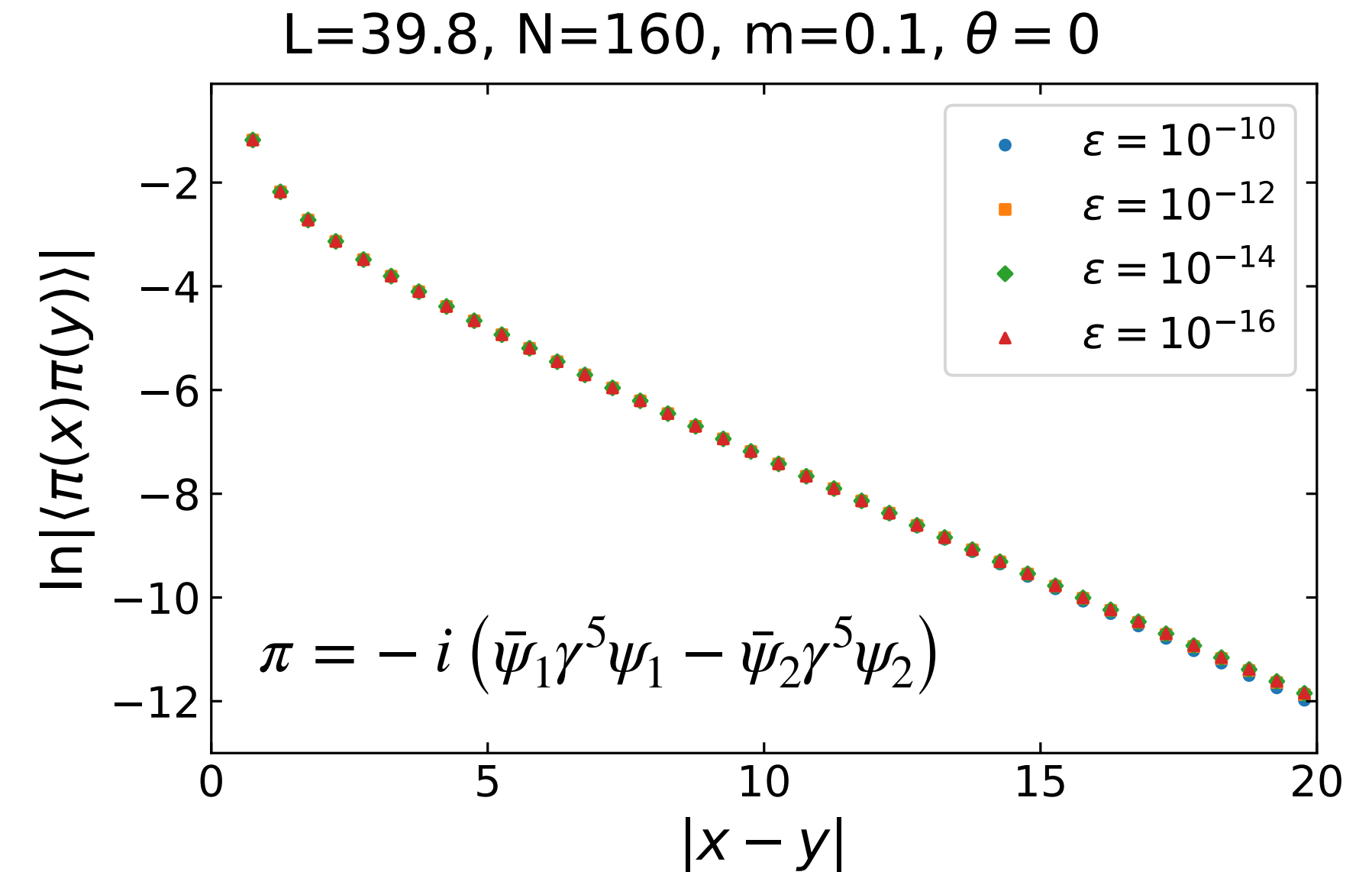
プラトーの値 = pionの質量?

⚠ 近似の精度を上げると長距離での振る舞いに変化

$\varepsilon = 10^{-10}$ ($D_i \sim 400$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ は平坦

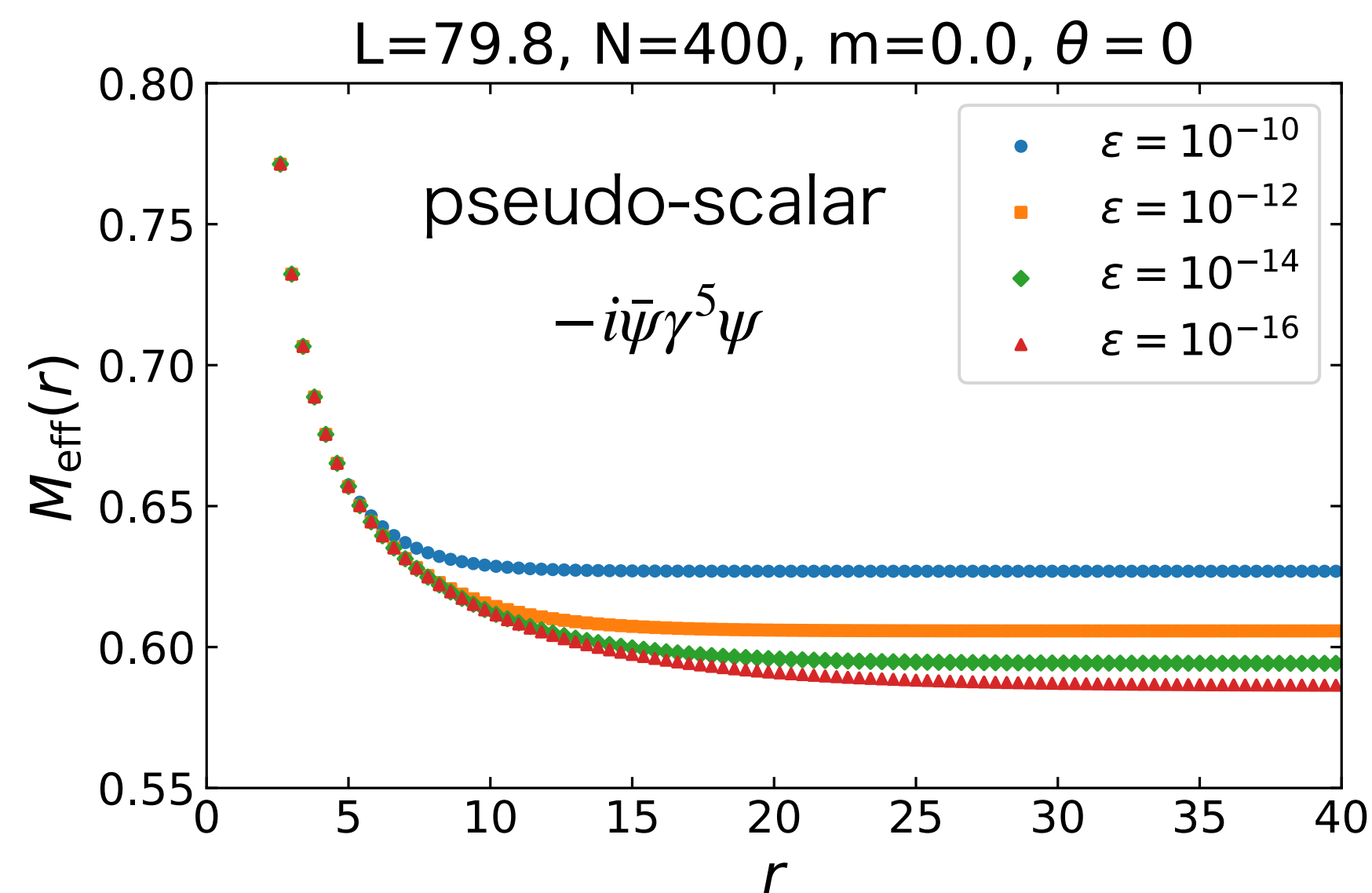
$\varepsilon = 10^{-16}$ ($D_i \sim 2800$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ の r 依存性が見える

• What's happened?

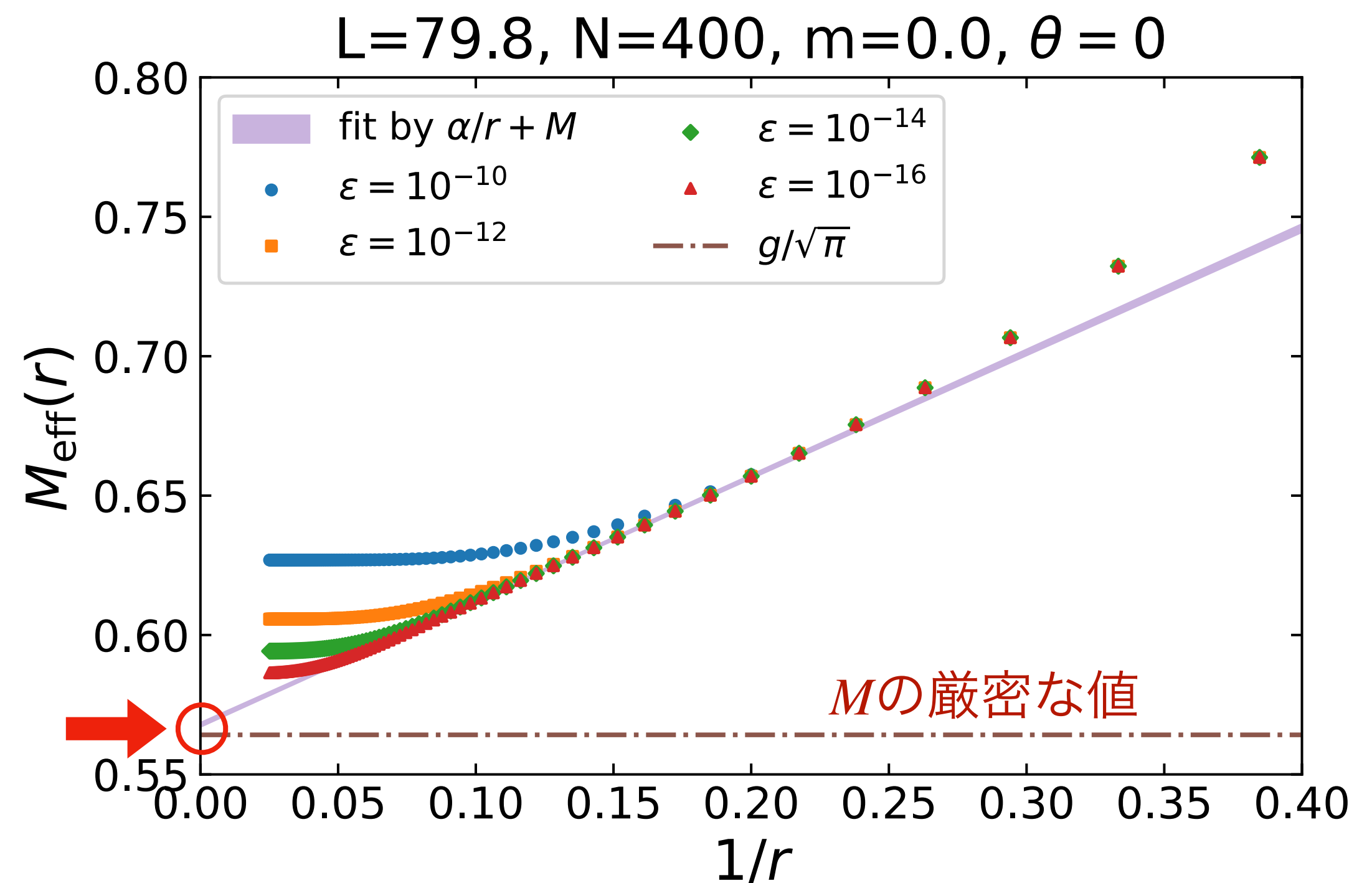


Nf=1 場合での検証

- (1+1)d 質量 M の自由粒子 : $\langle \phi(x,t)\phi(y,t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{Mr}} e^{-Mr} \rightarrow M_{\text{eff}}(r) \sim \frac{\alpha}{r} + M$
- massless Nf=1 Schwinger模型 (厳密に解ける)



plot against $\frac{1}{r}$

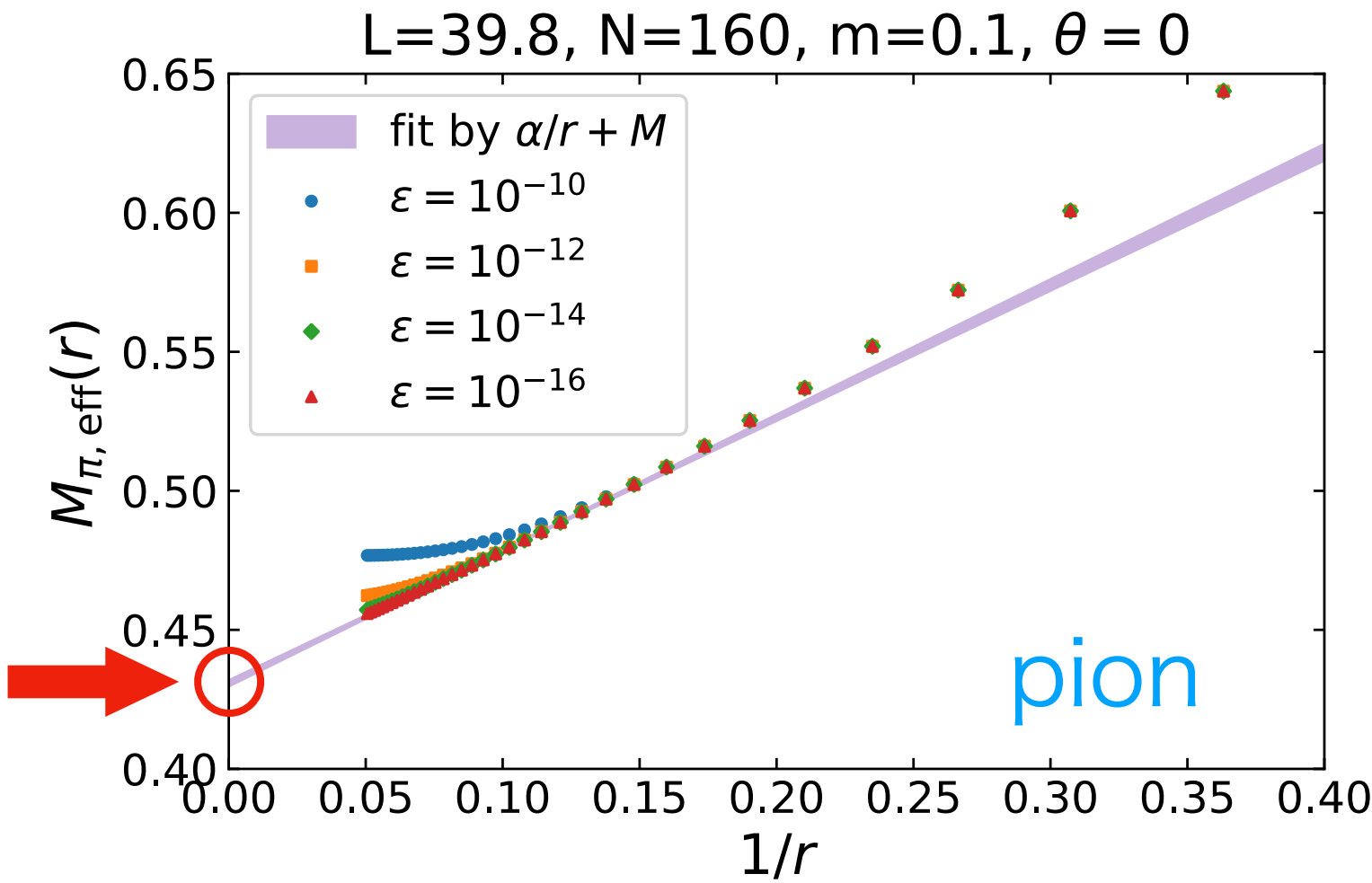


- DMRGで $1/r$ 補正を再現するのは難しい
- $1/r \rightarrow 0$ の外挿が必要

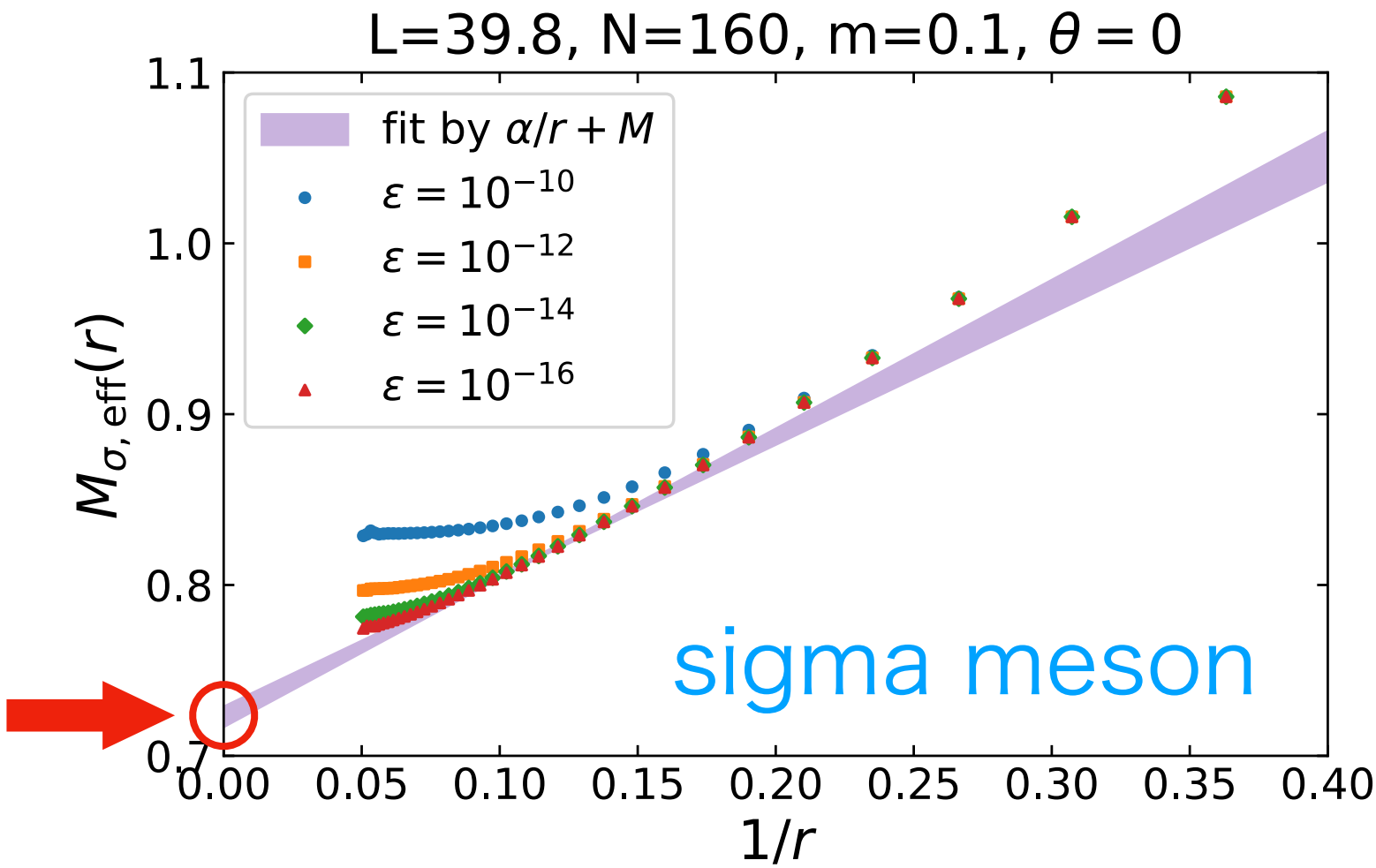
Nf=2での結果

$\varepsilon = 10^{-16}$ のデータを用いて、有効質量を $1/r \rightarrow 0$ に外挿

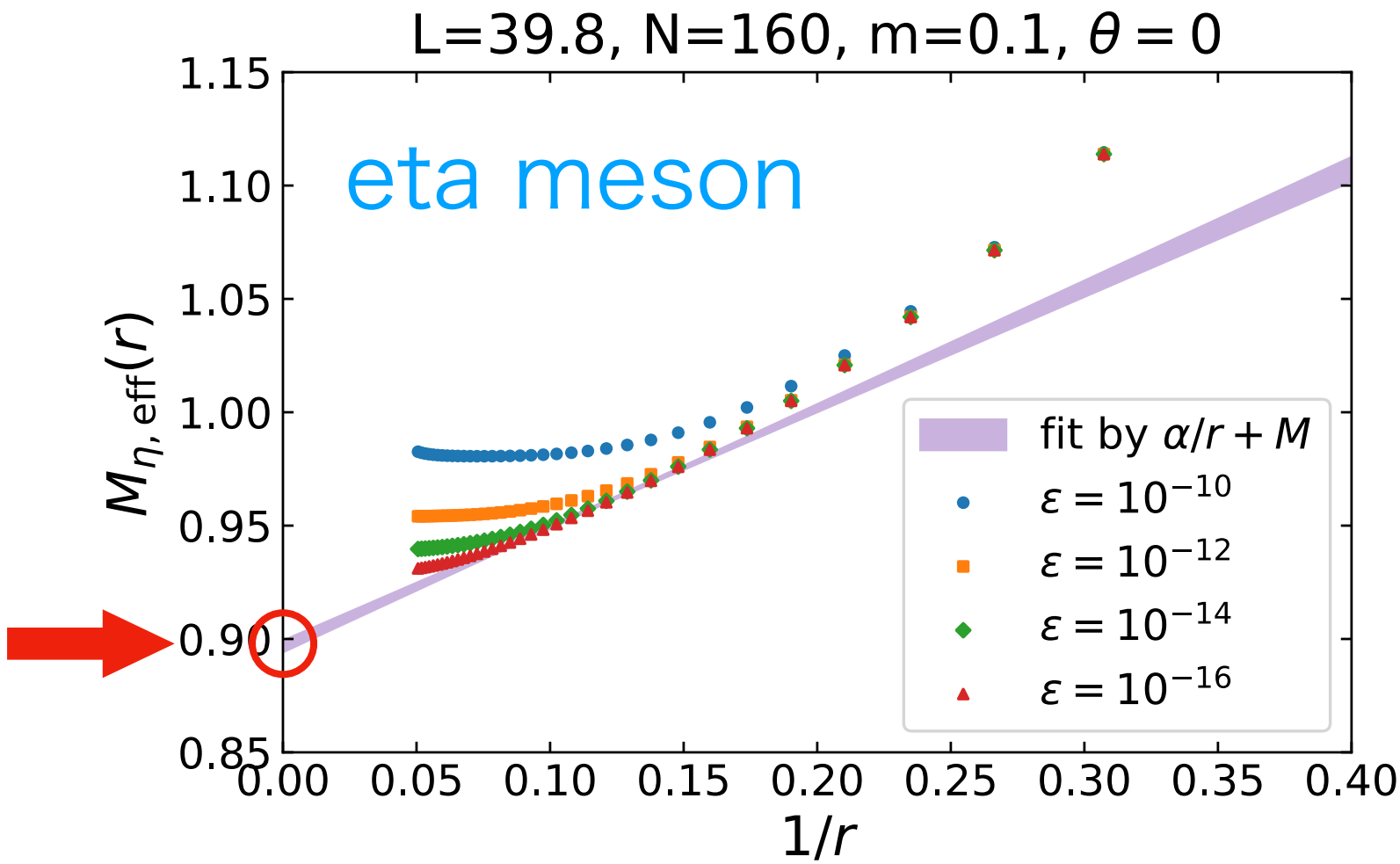
$$\pi = -i \left(\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2 \right)$$



$$\sigma = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2$$



$$\eta = -i \left(\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2 \right)$$



	pion	sigma	eta
M	0.431(1)	0.722(6)	0.899(2)
α	0.477(9)	0.83(5)	0.51(2)

数値計算の結果

1. Correlation-function scheme
- 2. One-point-function scheme**
3. Dispersion-relation scheme

(2) one-point-fn. scheme (eta & sigma)

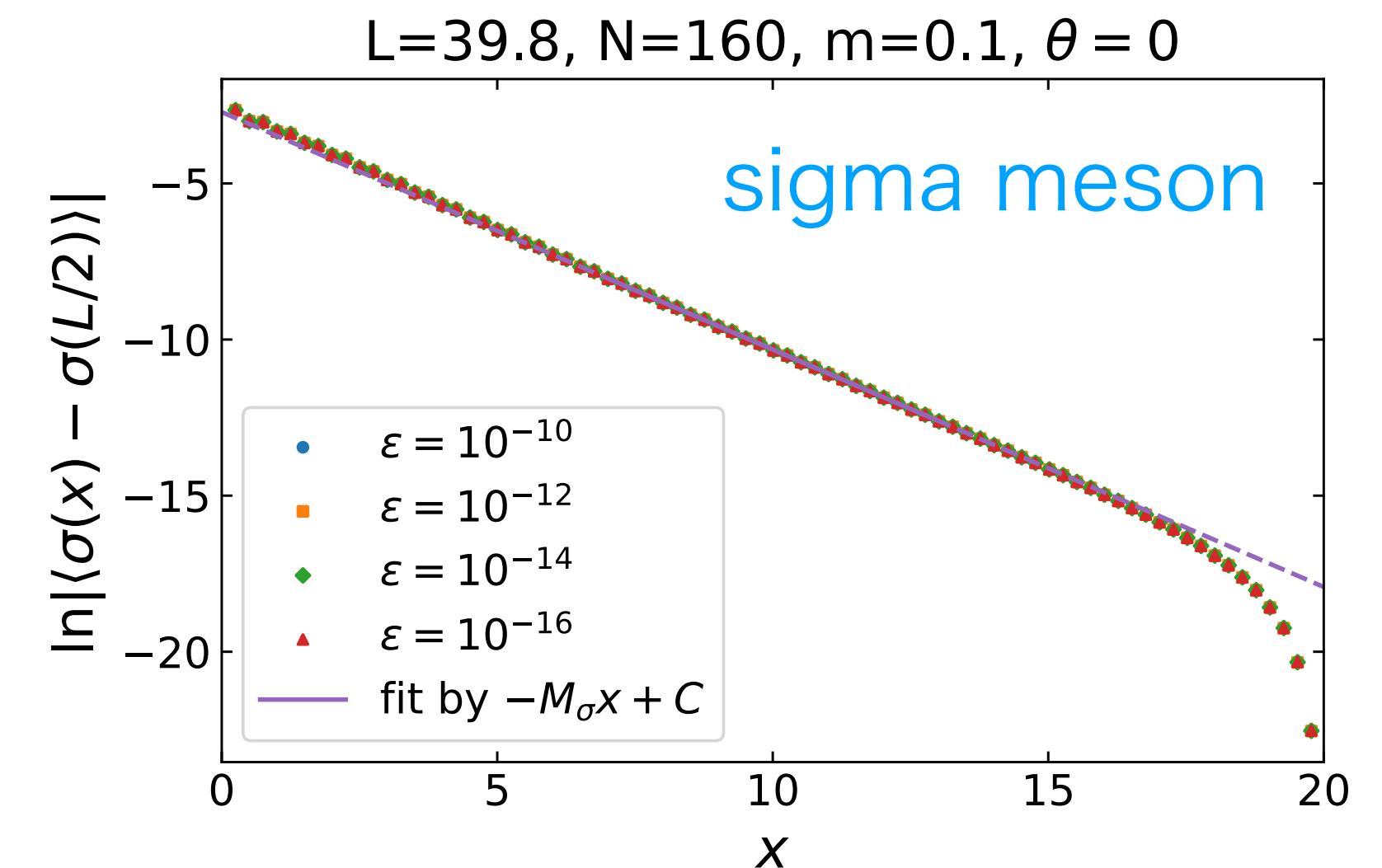
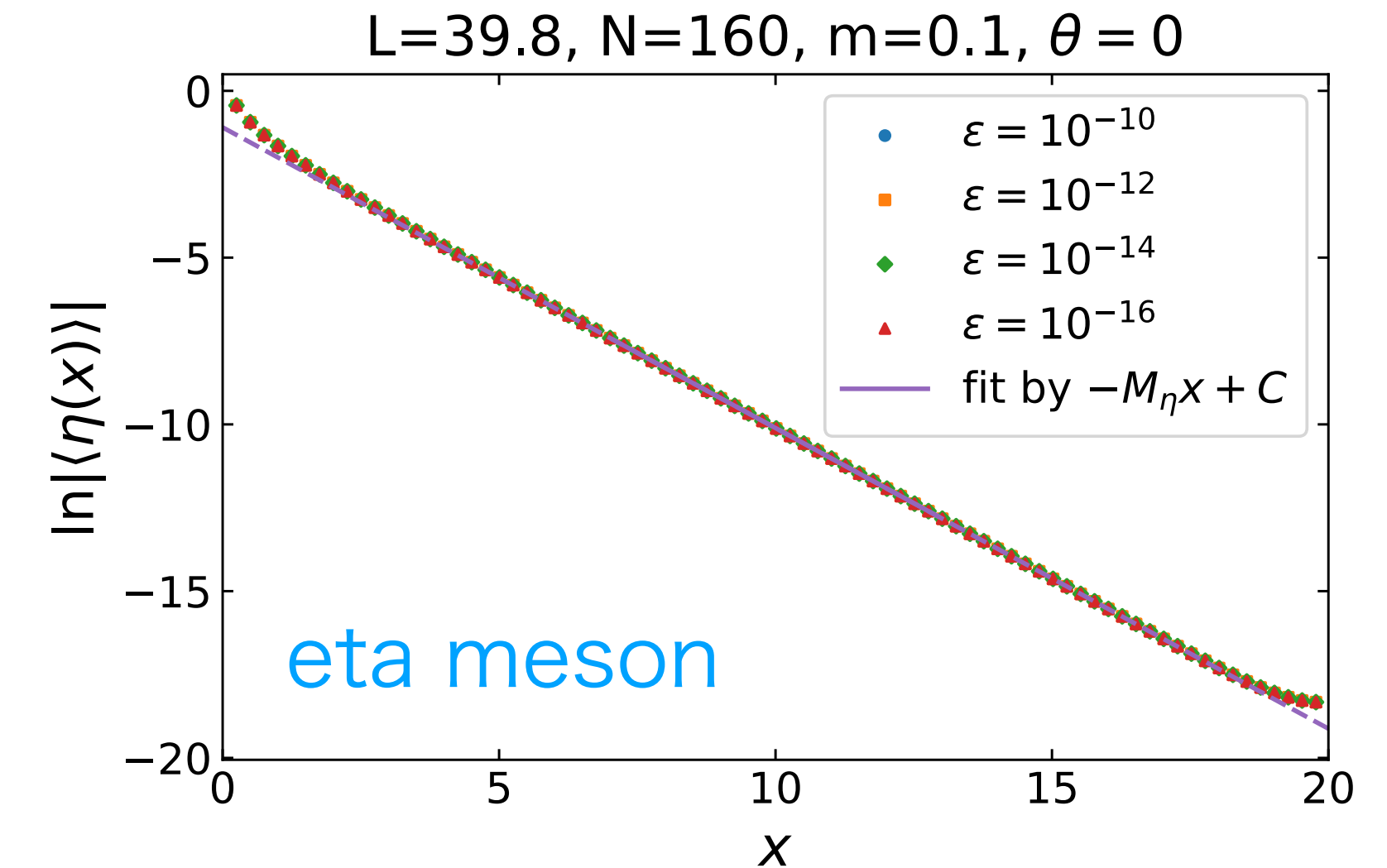
- $\theta = 0$ では、open boundary が iso-singlet state の source となる

- 1点関数 $\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim e^{-Mx+C}$
 x : boundaryからの距離

- ε 依存性は見られない
→ 特異値の切り捨てによる
系統誤差は十分小さい

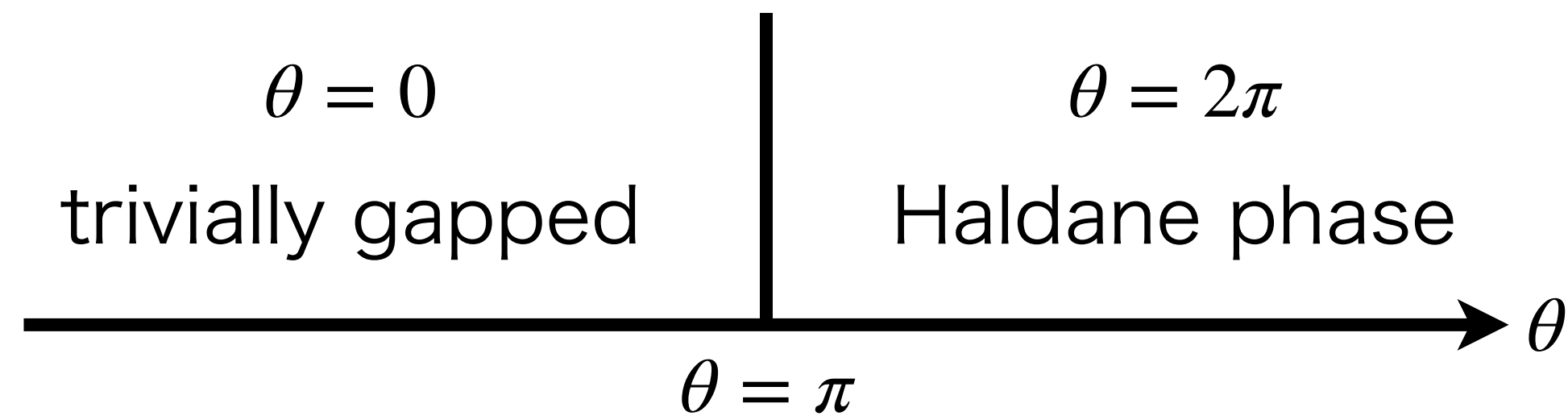
fittingの結果

- eta: $M = 0.9014(1)$, $C = -1.096(1)$
- sigma: $M = 0.761(2)$, $C = -2.71(2)$



(2) pion: tricky case

⚠ $\theta = 0$ (trivially gapped phase) では常に $\langle \pi(x) \rangle = 0$



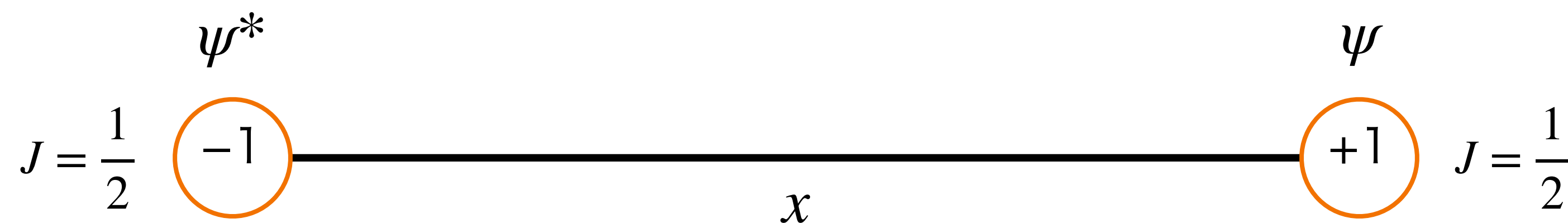
anti-ferromagnetic Heisenberg chain
と同様のSPT的性質

θ の値をシフト: $\theta = 2\pi$ (Haldane phase) $\rightarrow$ 背景電場が導入される

[Chen et al. (2011)]

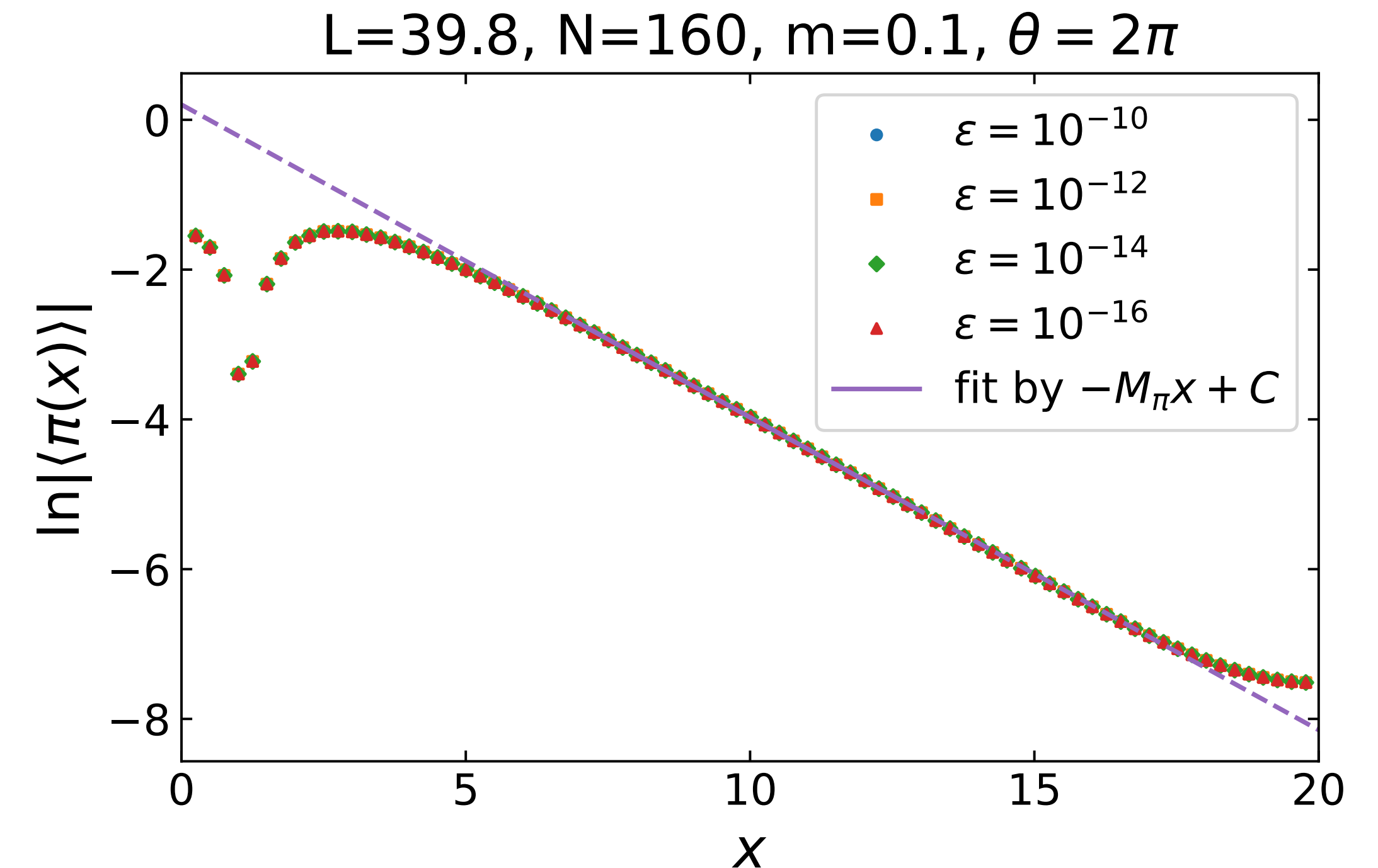
[Kapustin (2014)]

- 電荷 ± 1 を持つDiracフェルミオンが両端に励起される
- boundary上のisospin $1/2 \rightarrow$ iso-triplet stateのsource



(2) one-point-fn. scheme (pion)

- $\theta = 2\pi$ において基底状態を生成
- 1点関数を計算 $|\langle \pi(x) \rangle| \sim e^{-Mx+C}$
- fittingの結果:
 $M = 0.4175(9)$, $C = 0.203(9)$
- ε 依存性は見られない

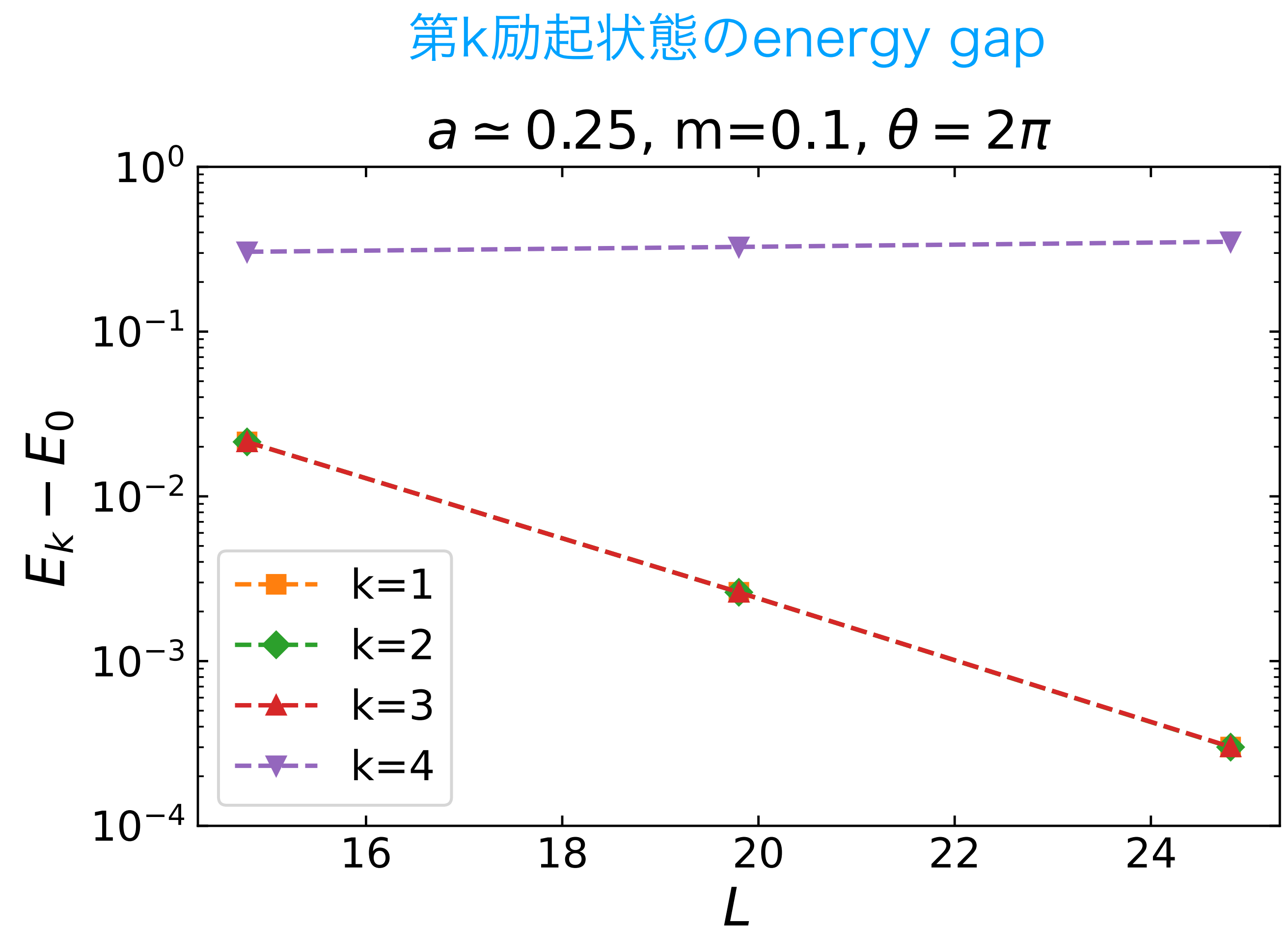


	pion	sigma	eta
M	0.4175(9)	0.761(2)	0.9014(1)

SPT的性質の検証

基底状態の縮退

- finite L :
基底状態 + 3重に縮退した励起状態
- energy gap $\sim \exp(-\alpha L)$
- $L \rightarrow \infty$:
4重に縮退した基底状態



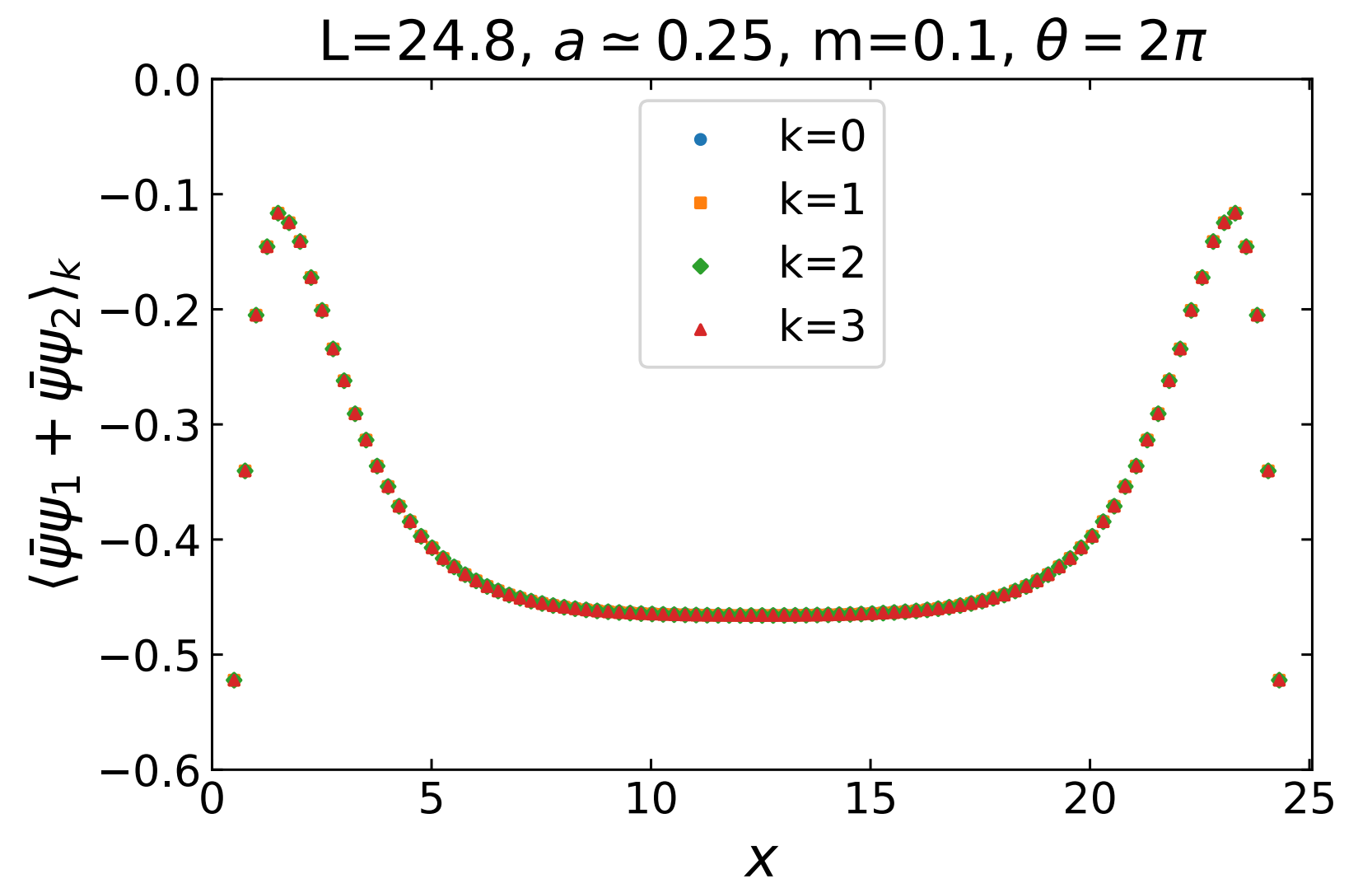
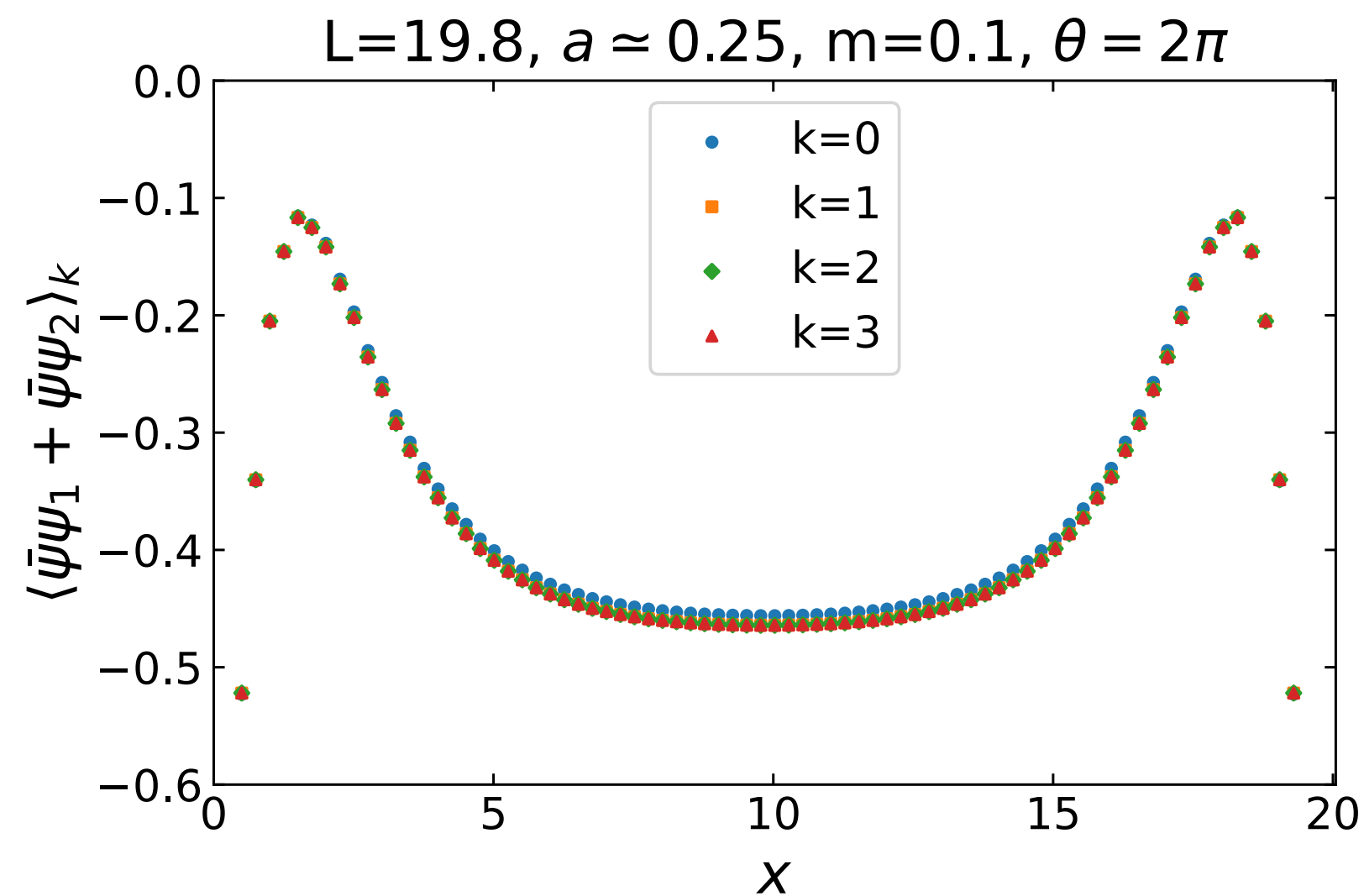
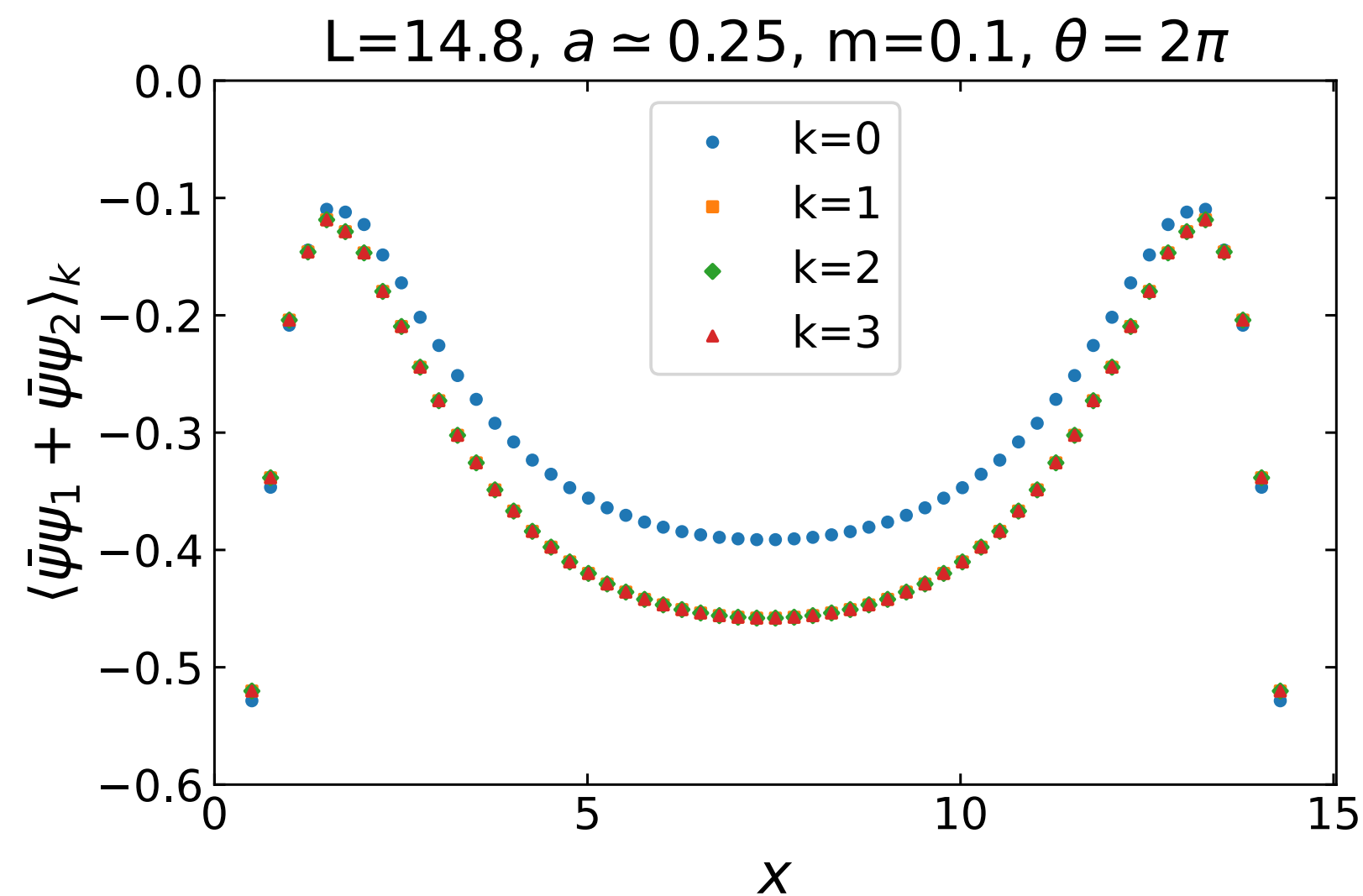
物理量の振る舞い

- local scalar condensate $\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2$ (isospin singlet) at $\theta = 2\pi$
- $L \rightarrow \infty$ では、 $k = 0, 1, 2, 3$ 励起状態での期待値が一致

small L



large L



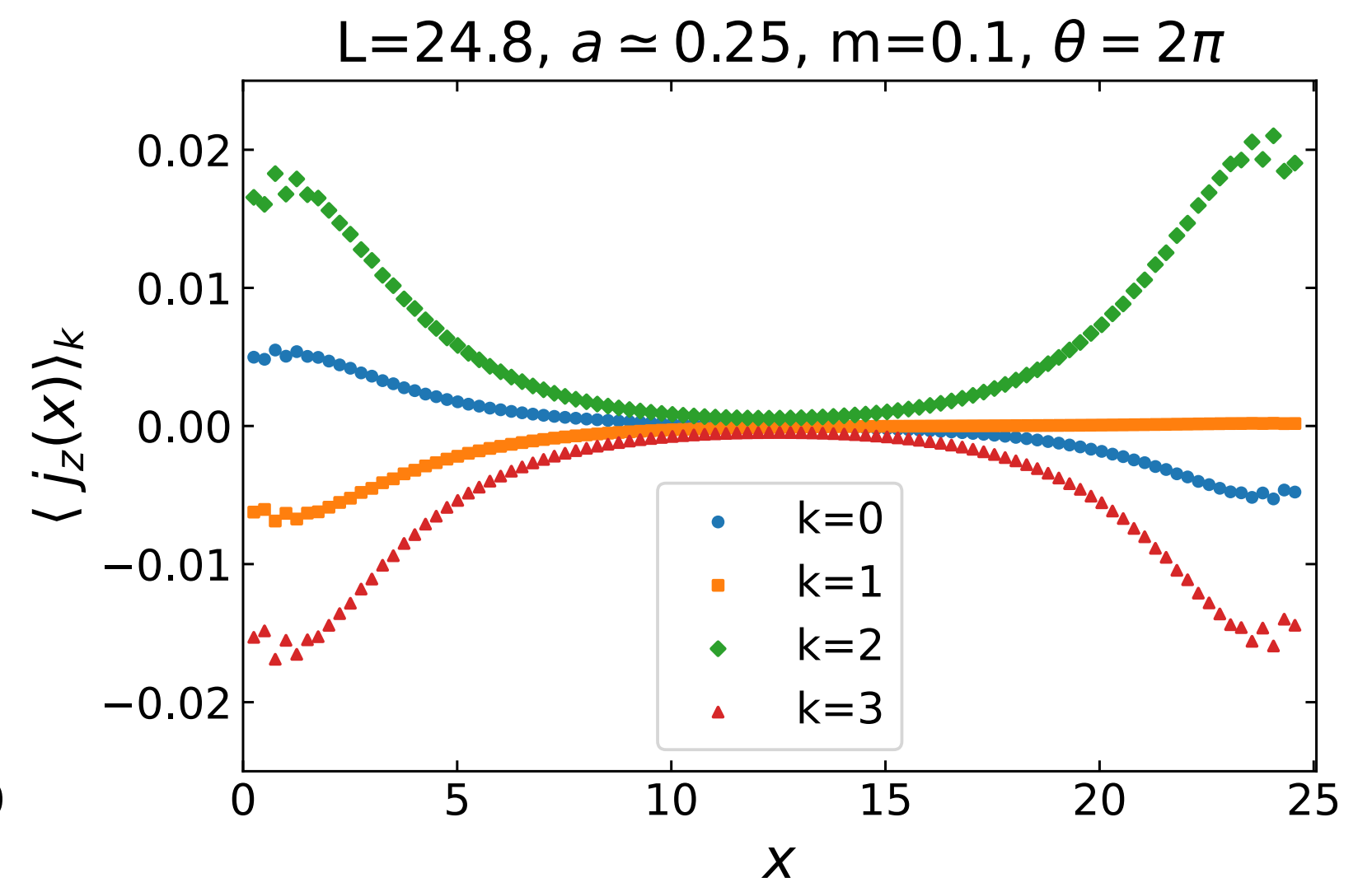
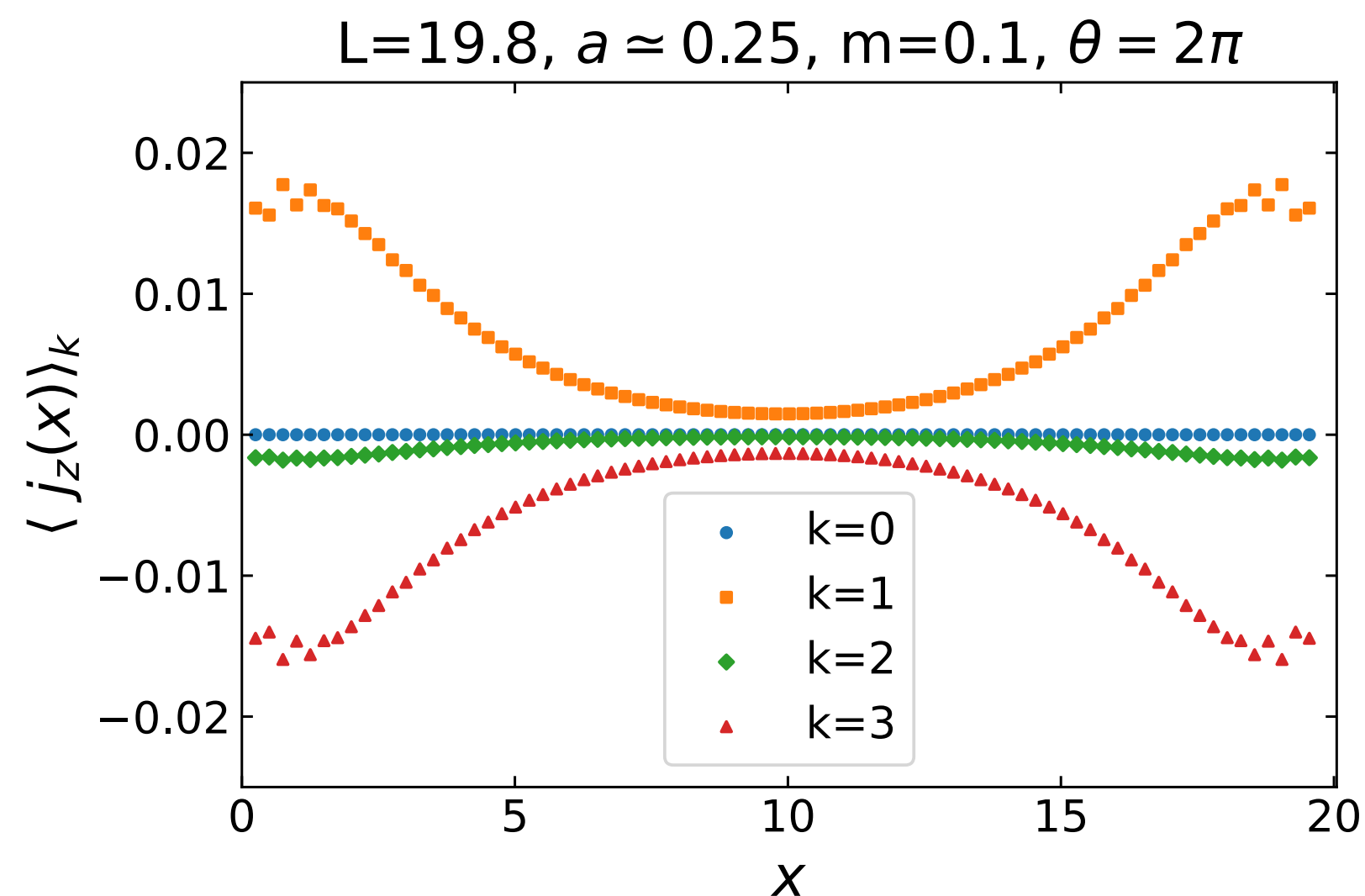
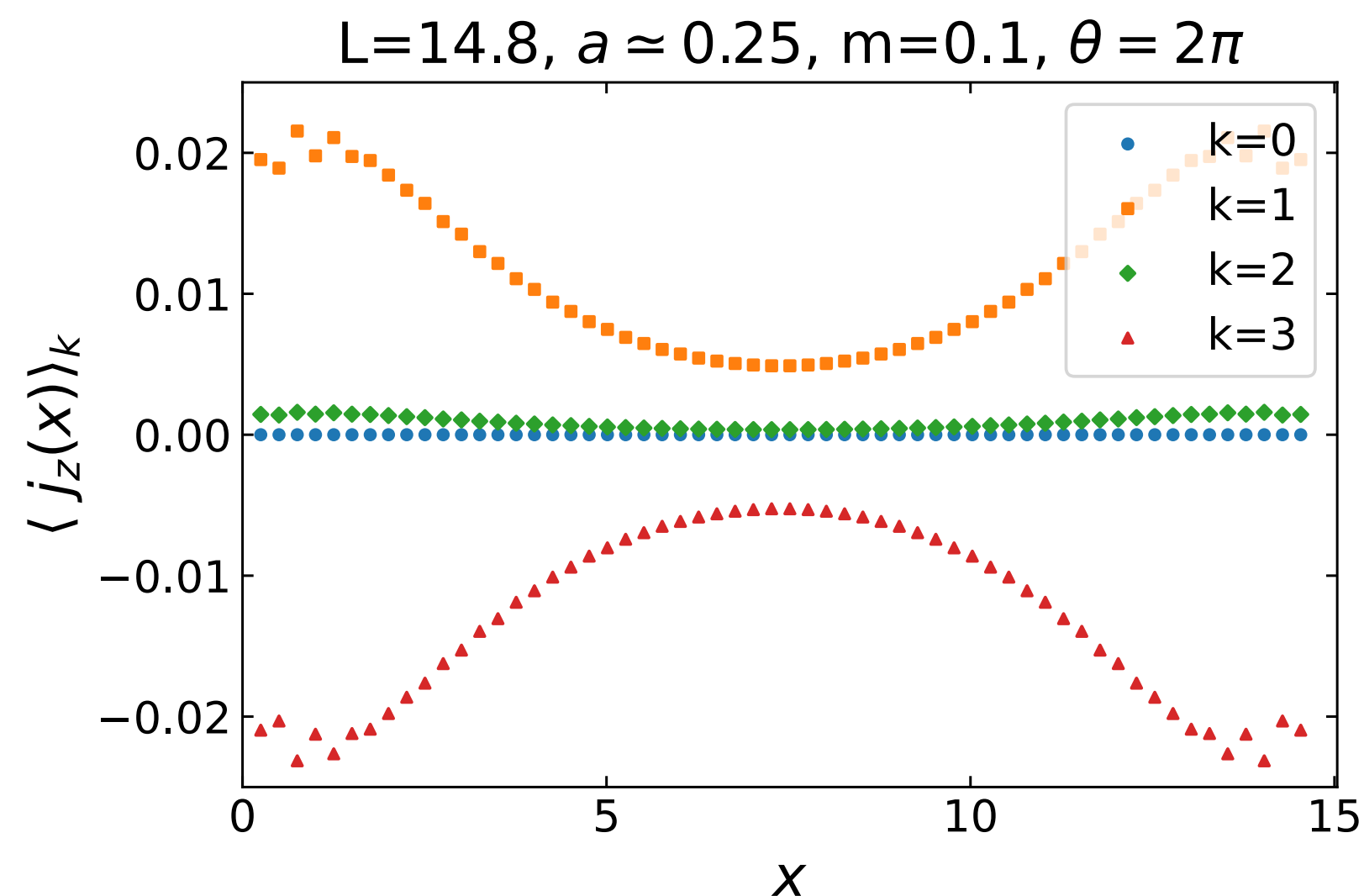
isospinの期待値

- local isospin $j_z(x) = \frac{1}{2}(\psi_1^\dagger \psi_1 - \psi_2^\dagger \psi_2)$ at $\theta = 2\pi$
- finite L : **singlet + triplet** $\longrightarrow$ $L \rightarrow \infty$: **doublet $\times$ doublet**
相互作用が指数関数的に減衰し、boundaryのisospinがdecouple

small L



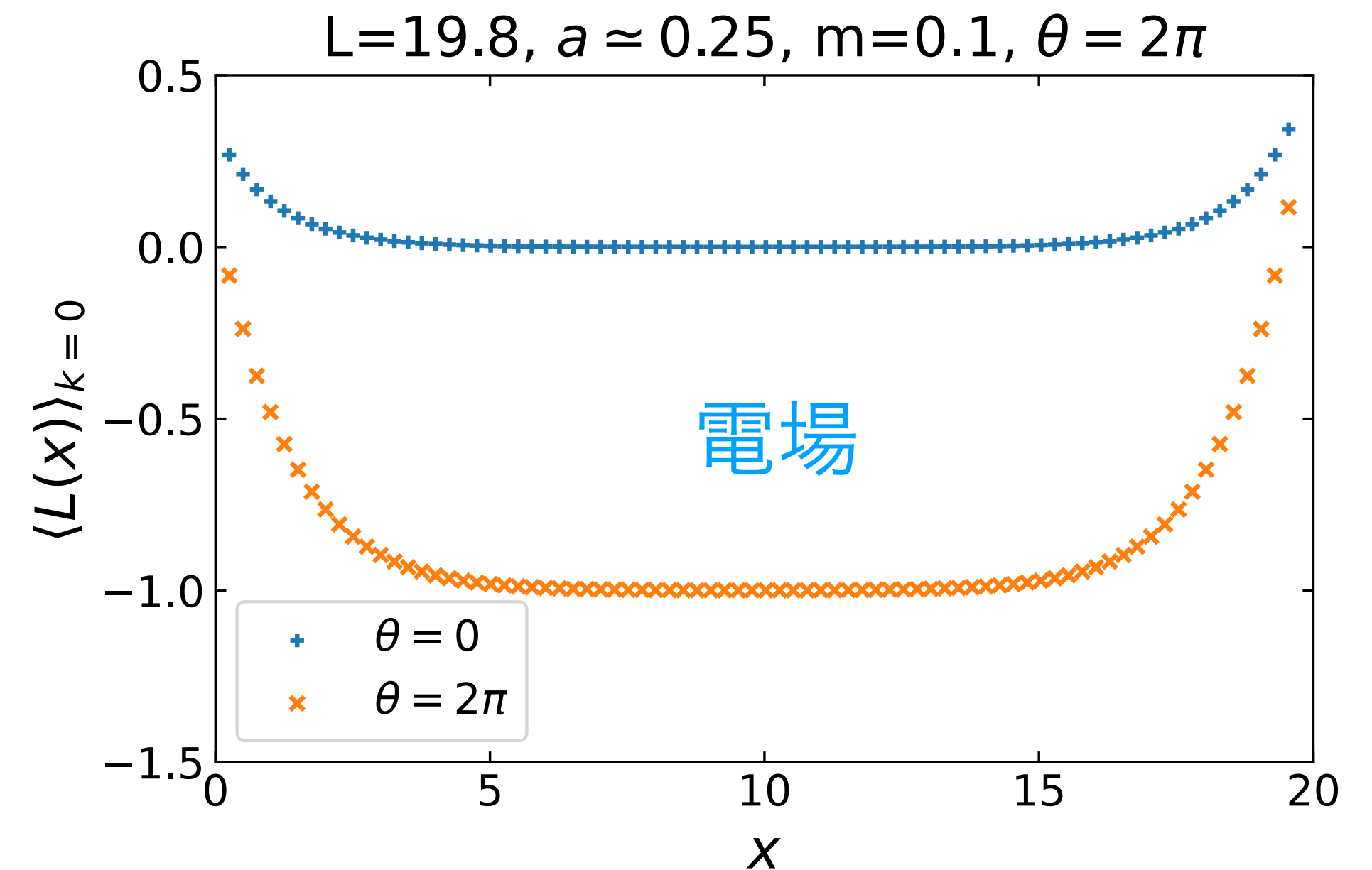
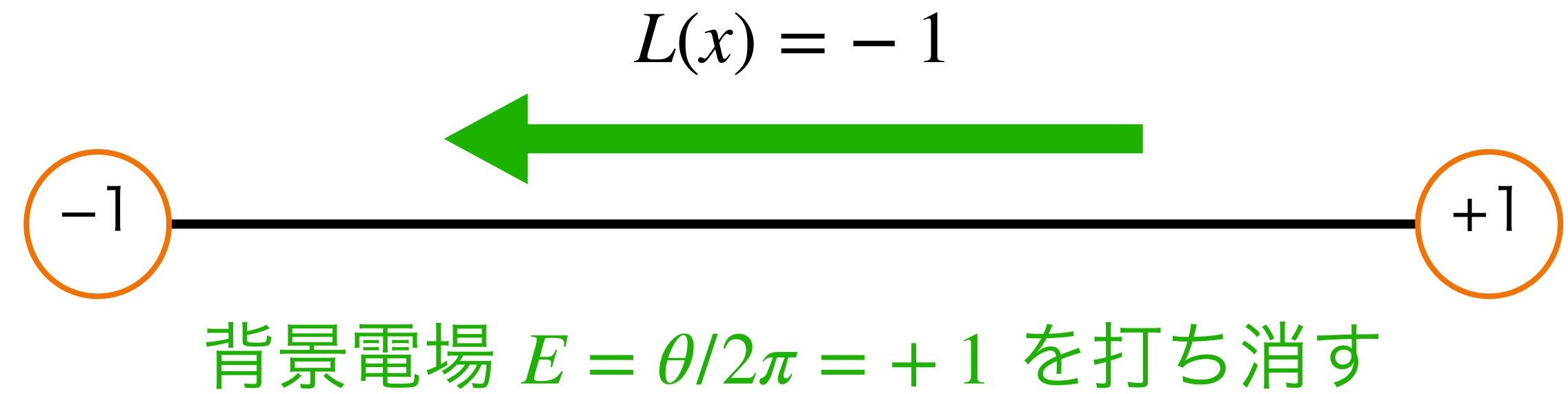
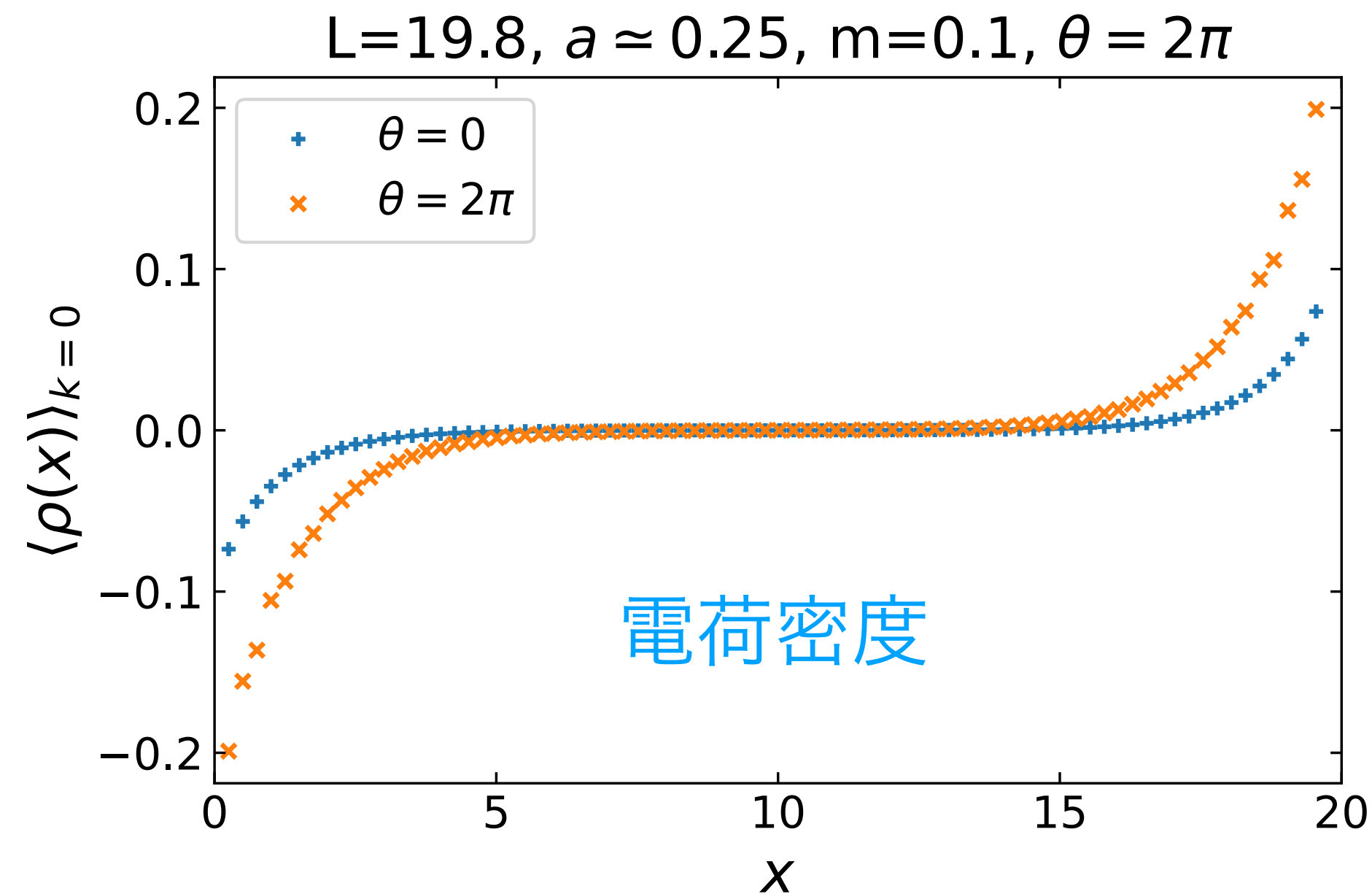
large L



電荷密度と電場

・ 電荷密度 $\rho(x) = \psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2$

・ 励起される電場 $L(x) = \int_0^x dy \rho(y)$



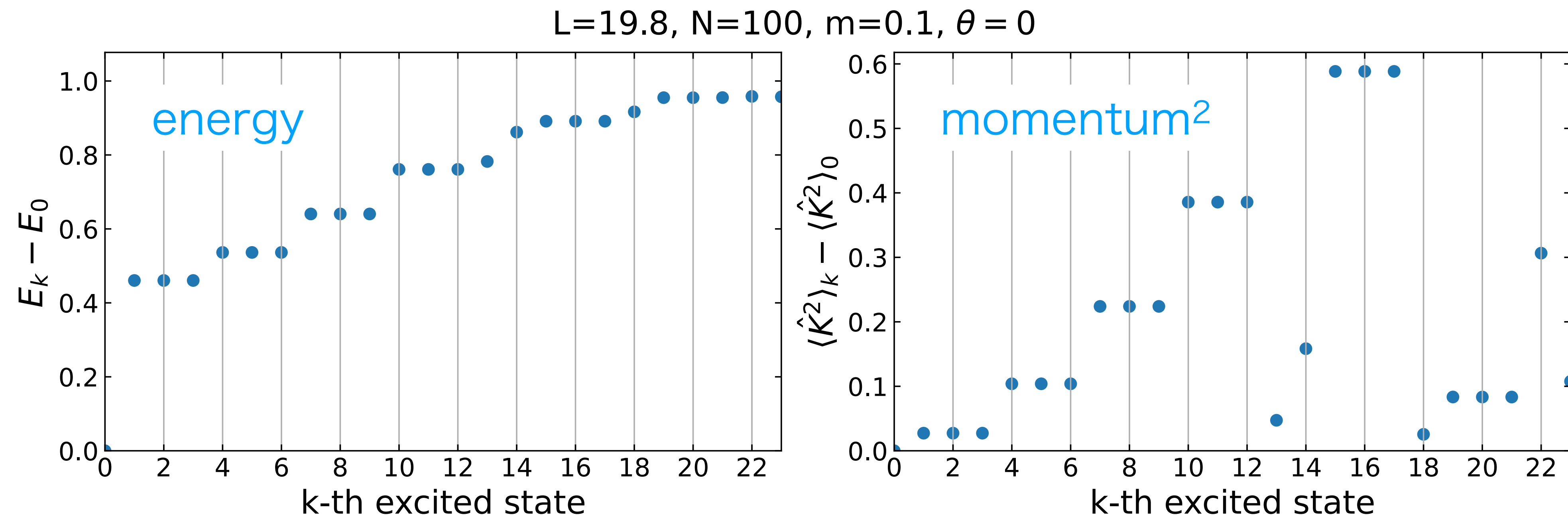
数値計算の結果

1. Correlation-function scheme
2. One-point-function scheme
- 3. Dispersion-relation scheme**

(3) Dispersion-relation scheme

- energy gap: $\Delta E_k = E_k - E_0$ momentum square: $\Delta K_k^2 = \langle K^2 \rangle_k - \langle K^2 \rangle_0$
- triplets $\rightarrow$ pion? singlets $\rightarrow$ sigma or eta meson?

量子数を測ることによって状態を分類 : $\mathbf{J}^2, J_z, G = Ce^{i\pi J_y}$



量子数

• triplets: $\mathbf{J}^2 = 2$, $J_z = (0, \pm 1)$, $G > 0$

→ pion ($J^{PG} = 1^{-+}$)

• singlets: $\mathbf{J}^2 = 0$, $J_z = 0$,

$G > 0$ ($k = 13, 14, 22$) → sigma meson ($J^{PG} = 0^{++}$)

$G < 0$ ($k = 18, 23$) → eta meson ($J^{PG} = 0^{--}$)

singlets

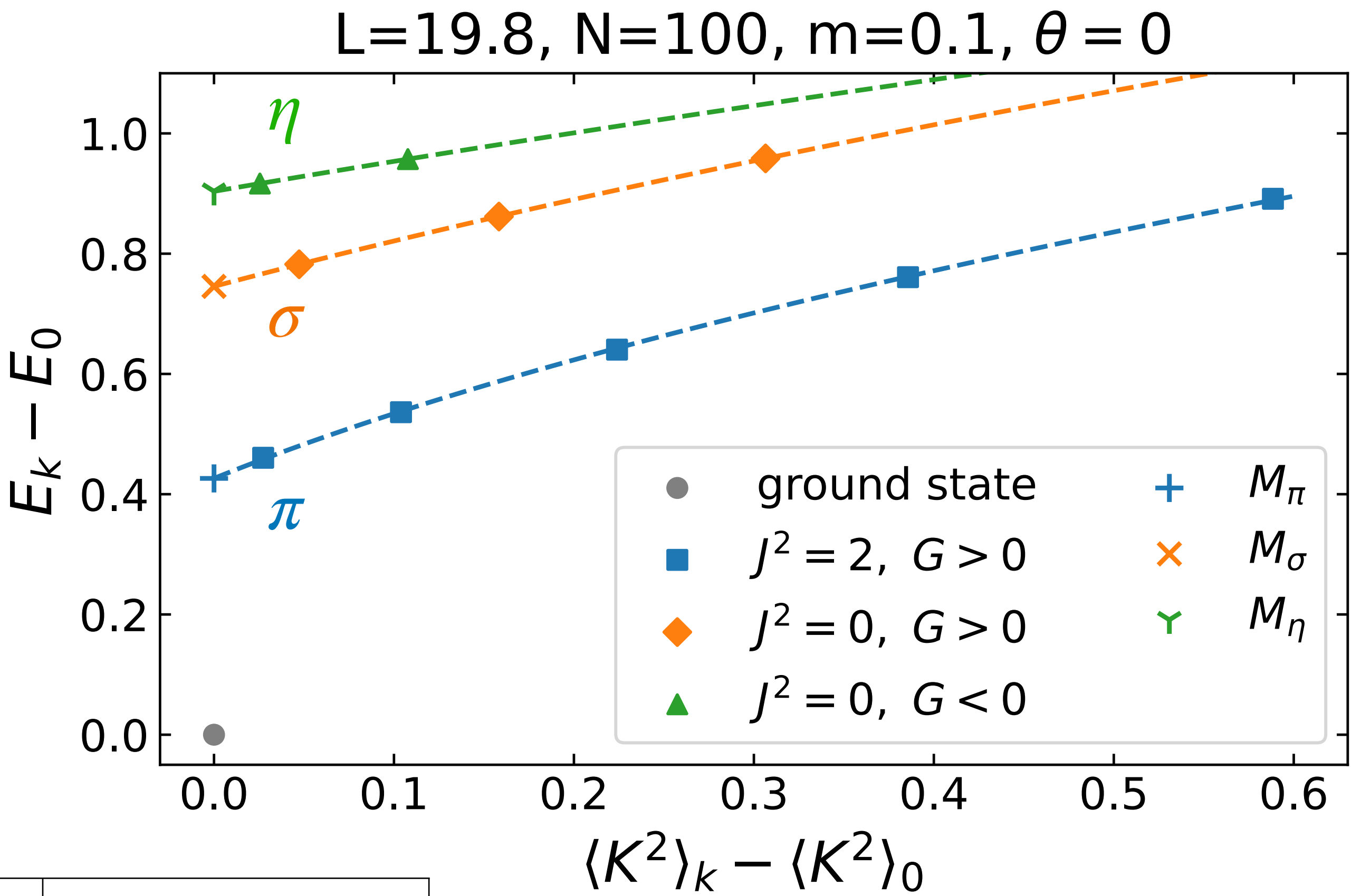
k	$\mathbf{J}^2$	J_z	G
0	0.000000003	-0.000000000	0.27984227
13	0.000000003	0.000000000	0.27865844
14	0.000000003	0.000000000	0.27508176
18	0.000000028	0.000000006	-0.27390909
22	0.00001537	0.00000115	0.26678987
23	0.00003607	-0.00000482	-0.27664779

triplets

k	$\mathbf{J}^2$	J_z	G
1	2.000000004	0.999999997	0.27872443
2	2.000000012	-0.000000000	0.27872416
3	2.000000004	-0.999999996	0.27872443
4	2.000000007	0.999999999	0.27736066
5	2.000000006	0.000000000	0.27736104
6	2.000000009	-0.999999998	0.27736066
7	2.000000010	1.000000000	0.27536687
8	2.000000002	0.000000000	0.27536702
9	2.000000007	-0.999999998	0.27536687
10	2.000000007	0.999999998	0.27356274
11	2.000000005	0.000000001	0.27356277
12	2.000000007	-0.999999999	0.27356274
15	1.999999942	0.999999966	0.27173470
16	2.000000052	0.000000000	0.27173482
17	2.000000015	-1.000000003	0.27173470
19	2.00009067	1.00004377	0.27717104
20	2.00002578	-0.000000004	0.27717020
21	2.00003465	-1.00001622	0.27717104

分散関係の結果

- 各メソン毎に ΔE_k を ΔK_k^2 に対してプロット
- 分散関係の式 $\Delta E = \sqrt{b^2 \Delta K^2 + M^2}$ でfittingする

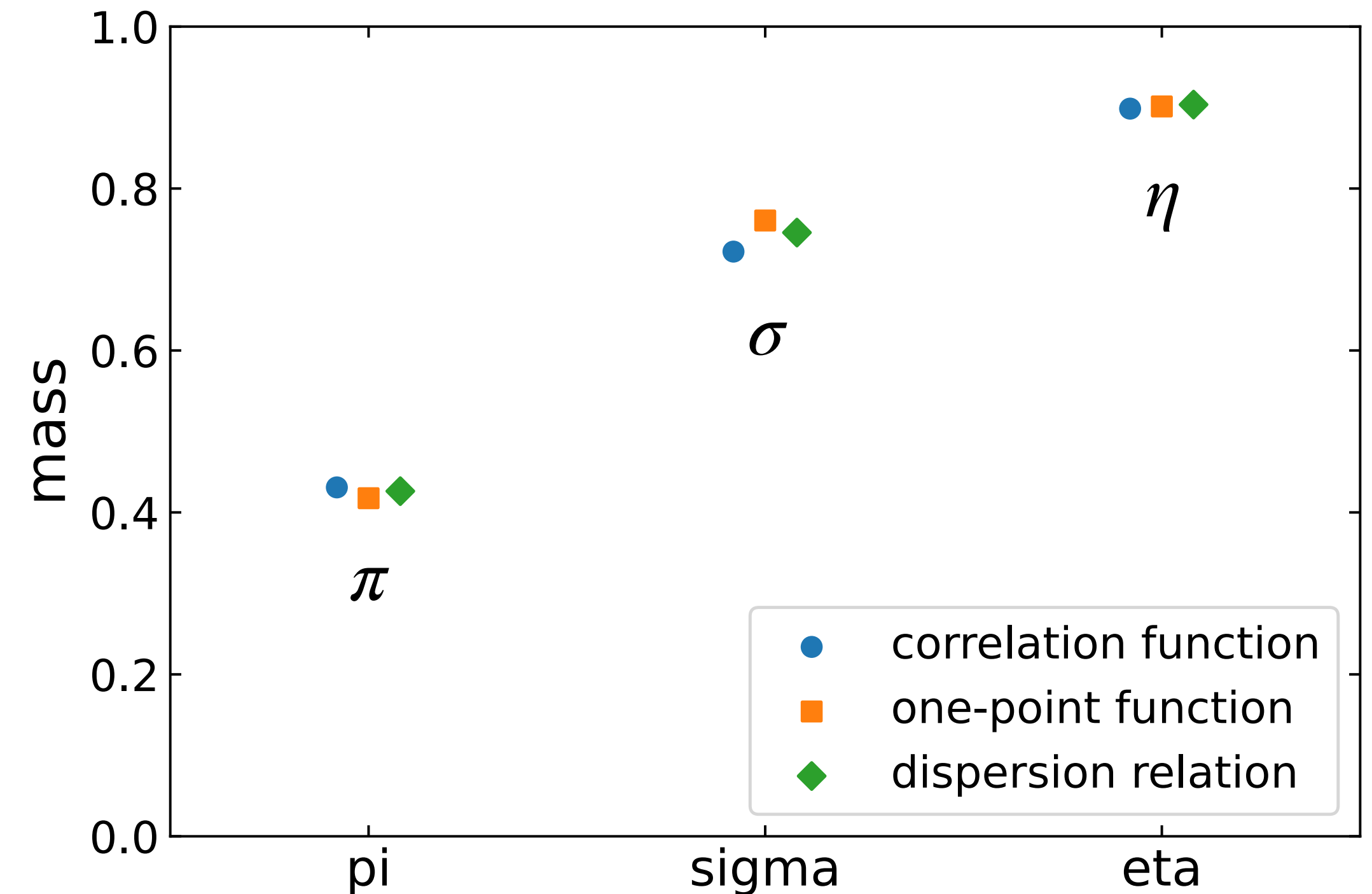


	pion	sigma	eta
M	0.426(2)	0.7456(5)	0.9037
b	1.017(4)	1.087(2)	0.9622

Summary

- 3つの独立な方法により得られたスペクトルは互いに無矛盾
- bosonizationを用いた近似計算とも無矛盾
 - ✓ $M_\pi < M_\sigma < M_\eta \rightarrow \text{U}(1) \text{ problem}$
 - ✓ $M_\eta = \mu + O(m)$ ($\mu = g\sqrt{2/\pi} \sim 0.8, m = 0.1$)
 - ✓ $M_\sigma/M_\pi = \sqrt{3}$ within 5% deviation

[Coleman (1976)] [Dashen et al. (1975)]



	correlation func.	one-point func.	dispersion
M_σ/M_π	1.68(2)	1.821(6)	1.75(1)

Discussion

(1) correlation-function scheme

👍 あらゆる場合に適用可能な一般的な手法

😓 DMRGではbond次元の影響が大きい → 😊 量子計算

(2) one-point-function scheme

👍 系のサイズやbond次元が小さくても有効

😓 boundaryと同じ量子数を持つ lowest state にしか適用できない

(3) dispersion-relation scheme

👍 様々な励起状態が発見的に得られる / 波動関数が直接得られる (s/p-wave)

😓 多くの励起状態を生成する計算コストが高い