[Based on PTEP2022 113B04 & coming papers]

Homotopy / Homology 代数による 場の理論の記述とくりこみ

Osaka Metropolitan University College of Technology

Hiroaki Matsunaga

大阪公立大学高専

松永 博昭

YITP Workshop 場の理論と弦理論 2023 Aug. 9

Introduction & Summary

これから話すこと

- (かなり広いクラスの) 場の理論は、Homology 代数的に記述できる。

  例えば、(摂動的) 経路積分は コホモロジーへの射影 として書ける。

- Dyson 方程式 $G(p) = G_{\mathrm{free}}(p) + G_{\mathrm{free}}(p)\,\Sigma(p)\,G(p)$ は、homology代数で記述すると、**“ホモロジー摂動論”** からの自然な帰結として理解できる。

  また、相互作用を含む場合であっても類似の式で表せる。

→ 場の理論のいろいろな操作が、ホモロジー代数的なデータをいじることで書ける。

Introduction & Summary

場の古典論

- **模型を考える (= 作用をつくる)**

作用の停留点を探す　　運動方程式を解く　　解 (Physical State) をとる

$$\delta S[\phi] = ? \qquad \to \qquad \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \overset{!}{=} 0 \qquad \to \qquad a \quad \text{s.t.} \quad \frac{\delta S}{\delta \phi}[a] = 0$$

- **次数付きベクトル空間と微分 (chain complex) を与える**

resolution を探す　　BRST-BV cohomology への射影を作る　　射影を施す

Introduction & Summary

場の量子論

- **模型を考える (= 分配関数を作用で表す)**

SD eq. を与える　　摂動的に積分する　　積分値 (Physical states) を読む

$$\frac{\delta}{\delta\phi}\big(\,\mathrm{integrand}\,\big) \equiv 0 \quad \to \quad \int \mathscr{D}[\phi]\,\big(\,\mathrm{integrand}\,\big) \quad \to \quad A = \int \mathscr{D}[\phi]\, e^{S[\phi]}\big(O_A\big)$$

- **次数付きベクトル空間と微分 (chain complex) を与える**

resolution を探す　BRST-BV cohomology への射影を作る　射影を施す

Introduction & Summary

くりこみ

- これは「BRST-BV 形式 / homotopy 代数による記述」からの帰結

- 摂動的な経路積分を、BRST-BV形式 / homotopy代数 で書くと . . .

$$\frac{1}{Z}\int \mathscr{D}[\phi] e^{S[\phi]} A[\phi] = \frac{1}{Z}\int \mathscr{D}[\phi] e^{S_{\mathrm{free}}[\phi]} \left[e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]} A[\phi] \right] = e^{G_{\mathrm{free}} \frac{\delta}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta\phi}} \left[e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]} A[\phi] \right]_{\phi=0}$$

$$= \mathrm{P}_{\mathrm{rojection}} \left[e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]} A[\phi] \right] \qquad \left(\mathrm{P}_{\mathrm{rojection}} = p \, \frac{1}{1-(\mu + \hbar\,\Delta)\,h} \right)$$

- この $\mathrm{P}_{\mathrm{rojection}}$ は、BV複体/homotopy代数の、homology摂動で構成可能！

→ この帰結として、“くりこみ” の操作も およそ homology摂動で表せる。

Plan

(i) Introduction & summary

(ii) Homology/Homotopy代数による場の理論

(iii) 応用例：“くりこみ” や “古典解まわり” など

Homology/Homotopy代数による記述方法

どのような模型を扱うのか

- 場の古典論：

  自由場 $S_{\text{free}}[\phi] = \dfrac{1}{2}\phi^a \mu_{ab} \phi^b$ の Hessian が non-degenerate にとれて,

  $$S[\phi] = \frac{1}{2}\phi^a \mu_{ab} \phi^b + \text{interactions}$$ という形の作用を持つ模型 .

- 場の量子論：

  自由場の Gaussian integral が規格化できる模型： $\displaystyle\int \mathscr{D}[\phi]\, e^{\frac{1}{2}\phi^a \mu_{ab} \phi^b} = 1$.

E.g. ordinary Lagrangians : ϕ^4 scalar, Yang-Mills, lattice, strings and so on.

Homology/Homotopy代数による記述方法

解析力学における観測可能な物理量は、どこに住んでいるか？

- 力学では、作用 $S[\phi]$ の停留点 $\delta S[\phi] = 0$ で「実現される運動・場の配位」が決まる。

$$\text{Physical states} \iff \text{運動方程式}\ \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} = 0\ \text{の解を与える}\ \phi(x)$$

力学変数 $\phi(x)$ を座標とする “多様体” M を、configuration space と呼んだ。

作用 $S[\phi] \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ をはじめ、物理量は M 上の関数 となる。

- 運動方程式を満たす M の部分空間 (isolated points) を $M|_{\delta S=0}$ と書く。

物理量の中の “観測可能量 (observables)” は、$M|_{\delta S=0}$ の関数 となる。

$$\mathscr{F}|_{\delta S=0} := \{\ M|_{\delta S=0}\ \text{上の関数の全体}\ \}\quad \text{は singular な空間}$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

この由来は、自明なゲージ自由度

- 停留作用の式 $\delta S[\phi]=0$ は、ゼロ固有値があると、Noether 恒等式 がみつかる：

$$\text{ゲージ自由度} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta S[\phi] = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi}\cdot \delta\phi = 0 \quad \text{なる 固有ベクトル } \delta\phi \ .$$

- 実はどのような模型にも、on-shell で消える、(自明な) ゲージ自由度 が存在する：

$$\phi \mapsto \phi + \varepsilon\cdot\delta\phi \qquad \text{where} \quad \delta\phi^a = \omega^{ab}\frac{\delta S}{\delta\phi^b} \ , \quad \omega^{ab} = -\,\omega^{ba} \ \ \& \ \ \varepsilon = \varepsilon(x) \ .$$

これは、各 “物理量” を「運動方程式を代入すると消える量」だけずらす操作を生成。

$$\underbrace{\text{観測される物理量の全体}}_{\mathscr{F}|_{\delta S=0}} = \underbrace{\text{物理量の全体}}_{\mathscr{F}_0 = C^\infty(M,\mathbb{R})} \Big/ \underbrace{\text{このイデアル}}_{\mathrm{Sym}\{\,\delta\phi\,\}}$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

場の解析力学 → *Derived Geometry*

- このような対象を扱うには、$\mathscr{F}_0$ を含む複体とその **resolution** を考えればよい。

The vector space $\mathscr{F}_0 = \mathrm{Sym}\{\,\phi\,\}$ is embedded into a sequence of vector spaces $\cdots \xrightarrow{s|_{-2}} \mathscr{F}_{-1} \xrightarrow{s|_{-1}} \mathscr{F}_0 \xrightarrow{s|_0} 0$

and then $\mathscr{F}|_{\delta S=0} = \mathscr{F}_0 \big/ \mathrm{Sym}\{\,\delta\phi\,\}$ is realized as a cohomology.

→ 多様体 M の各点 $\phi(x) \in M$ の周りに、座標系に代わり「chain complex $\mathscr{F}$」が付与！

- そこで、次数つき線形空間 $\mathscr{F}_{-1}$ と 微分 s をうまく探せばよい。
そのための方法の１つに、**Koszul-Tate resolution** と呼ばれる方法がある。

$\mathscr{F}_{-1} = \mathrm{Sym}\{\,\phi^\star\}$ の作り方 （Antifields の全体）

ϕ^a と同じ数だけ、次数が -1 だけずれた $\phi^\star_a$ を導入する。

微分 s の作り方 （BRST-BV 演算子）

$s|_{-1} : \phi^\star_a \mapsto \dfrac{\delta S}{\delta \phi^a}$, $s|_0 : \phi^a \mapsto 0$ によって微分 s を定める。

→ 観測可能量の全体は、$\mathrm{Ker}[\,s\,] = \{\,\phi\,\}$, $\mathrm{Im}[\,s\,] = \{\,s\,\phi^\star\} = \{\,\delta\phi\,\}$ より、$\mathrm{Cohom}[\,s\,] = \mathrm{Ker}[\,s\,] \big/ \mathrm{Im}[\,s\,] = \mathscr{F}|_{\delta S=0}$

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式： 場の解析力学 → *Derived Geometry*

- BRST-BV 形式 は、このような **resolution** を systematic に与える処方で、
  模型の作用 $S[\phi]$ から (BRST-BV演算子) 微分 $s = (\quad , S\,)$ が定まる。

各座標関数 $\phi^a : M \to \mathbb{R}$ に対し、antifield $\phi^\star_a \in T^*_\phi[-1]\,M$ を assign

($\phi^\star$ は、c-momentum や source と同様、最終的な物理には現れない)

Antibracket と呼ばれる、次数 1 の Poisson 括弧 を定める

$$(A,B) \equiv A\left[\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^a}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^\star_a} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\star_a}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^a}\right]B$$

- 場の古典論を BRST-BV形式 で表すには master eq. $\big(\,S[\phi]\,,S[\phi]\,\big) = 0$ を解けばよい

例: ゲージ自由度のない模型に対する classical BV複体

A sequence $0 \xrightarrow{s|_{-2}} \mathscr{F}_{-1} \xrightarrow{s|_{-1}} \mathscr{F}_0 \xrightarrow{s|_0} 0$, the BV-BRST differential $s\,|_{-2} = 0\,,\quad s\,|_{-1} = -\dfrac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\star_a}\dfrac{\delta S[\phi]}{\delta\phi^a}\,,\quad s\,|_0 = 0\,.$

$\longrightarrow$ コホモロジー は「 **the fields ϕ^a modulo** $\dfrac{\delta S[\phi]}{\delta\phi^a}$ 」から成る！

$\longrightarrow$ $\phi^a \in \mathscr{F}_0$ のコホモロジーへの射影は「 **the fields ϕ^a solving** $\dfrac{\delta S[\phi]}{\delta\phi^a} = 0$ 」となる！

Homology/Homotopy代数による記述方法

まとめ（場の古典論）

- BRST-BV 形式： 場の古典論 → Derived Geometry
- その心は、Physical な量 や 古典解は「**the fields** ϕ^a **modulo** $\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^a}$」から生成。

この話に「場の量子論」を含めるには？

- 量子論においても、Physical States は「**fields modulo 何？**」さえ決めれば . . .

(摂動的な) 場の量子論 → Derived Geometry

実は、BRST-BV 形式 はこの問に答え、そのような処方を systematic に与える

Homology/Homotopy代数による記述方法

場の量子論での “自明な” ゲージ自由度は？

- 場の量子論において、観測される物理量 $O_A = O_A[\phi]$ の値 A は、

$$A = \langle O_A \rangle = \int \mathscr{D}[\phi] e^{S[\phi]} O_A \overset{\text{摂動}}{=} \int \mathscr{D}[\phi] e^{S_{\rm free}[\phi]} \Big[e^{S_{\rm int}[\phi]} O_A \Big]$$

- このとき与えられた模型が「何を法とするか」を決めるのは、Schwinger-Dyson eq.

$$\int \mathscr{D}[\phi] \frac{\delta}{\delta\phi} (\dots) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{integrand modulo} \ \ \frac{\delta}{\delta \phi} (\dots)$$

- これを**出発点**とするのが、(quantum) BRST-BV 形式。

Quantum BV master equation : $\Delta \left(e^{S[\phi]} O_A \right) = 0$

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式： 場の量子論 → *Derived Geometry*

- BRST-BV 形式では、

integrand modulo $\dfrac{\delta}{\delta\phi}(\ldots)$ $\Longleftrightarrow$ **integrand modulo Δ-exacts**

$\longrightarrow$ **量子場は、modulo**「模型の **BRST-exacts** + **次数 1 の BV Laplacian** $\Delta = (-)^{\phi^a}\dfrac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^a}\dfrac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_a^\star}$」

- BRST-BV 形式で表すには、(quantum) BV 方程式 $\Delta\left(e^{S[\phi]}O_A\right) = 0$ を解けばよい。

作用 $S[\phi]$ と 物理量 $O_A = O_A[\phi]$ について書き下すと . . .

$$\hbar\,\Delta S + \frac{1}{2}\left(S, S\right) = 0 \quad , \qquad \hbar\Delta O_A + (O_A, S) = 0$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式： 場の量子論 → *Derived Geometry*

- 「模型の **BRST op.** $s = (\ ,S)$ と **BV Laplacian** Δ の和 $s + \hbar\,\Delta$ 」が微分となる：

$$(s + \hbar\Delta)^2 = 0 \qquad \text{(BRST-BV operator)}$$

場の古典論： 配位空間 M の各点に、古典 BV 複体 が付与	場の量子論： 配位空間 M の各点に、BV 複体 が付与
鎖複体 $(\mathscr{F}, s)$ $\quad \cdots \xrightarrow{s} \mathscr{F}_{-1} \xrightarrow{s} \mathscr{F}_0 \xrightarrow{s} 0$	鎖複体 $(\mathscr{F}, s+\hbar\Delta)$ $\quad \cdots \xrightarrow{s+\hbar\Delta} \mathscr{F}_{-1} \xrightarrow{s+\hbar\Delta} \mathscr{F}_0 \xrightarrow{s+\hbar\Delta} 0$

$\longrightarrow$ (摂動的な) 経路積分は、このコホモロジーへの射影 $\mathscr{F} \xrightarrow{P} \mathscr{F}_{\rm Phys}$

- このような chain complex (微分 Q & 字数付きベクトル空間の列 $\mathscr{F}$) 、および、コホモロジー $\mathscr{F}_{\rm phys}$ への射影 p などの**情報**をまとめて、次のように書く：

$$h \circlearrowright (\mathscr{F}, Q) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\rm phys}, Q_{\rm phys}) \qquad \text{(strong deformation retract)}$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

まとめ： *Homology* 的なデータ

$$h \circlearrowright (\mathscr{F}, Q) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\text{phys}}, Q_{\text{phys}})$$ (strong deformation retract)

複体 $\mathscr{F}$ の与え方 $\Longleftrightarrow$ どのような場 (力学変数) を考えているのか

微分 Q の与え方 $\Longleftrightarrow$ どのような Lagrangian (模型の作用) を与えたか

得られる微分 Q_{phys} $\Longleftrightarrow$ どのような S-matrix / 有効理論 / 正則化 などが得られるか

(e.o.m. を解いた / 経路積分した場について $Q_{\text{phys}} = 0$， その他の場では $Q_{\text{phys}} \neq 0$.)

射影 p (単射 i) の与え方 $\Longleftrightarrow$ どの場について**「 e.o.m.を解く / 経路積分する」**か

逆演算 h の与え方 $\Longleftrightarrow$ どの**境界条件の下で解く**のか・グリーン関数 (s の逆)

BV 鎖複体 ($\mathscr{F}_{\text{phys}}, Q_{\text{phys}}$) $\Longleftrightarrow$ 得られる「有効場の理論 (経路積分値) 」の情報

Homology/Homotopy代数による記述方法

Homology 的記述の使用例　(*Hodge* 分解が鍵)

$$\begin{tikzcd}
\text{free, classical} & & \text{free, quantum} \\
h \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\rm free}) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\rm phys}, 0) \arrow[rr, "+\hbar\Delta"] \arrow[d, "+s_{\rm int}"] & & H' \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\rm free}+\hbar\Delta) \underset{I'}{\overset{P'}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\rm phys}, 0) \arrow[d, "+s_{\rm int}"] \\
\text{interacting, classical} & & \text{interacting, quantum} \\
h' \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\rm free}+s_{\rm int}) \underset{i'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\rm phys}, s_{\rm tree}) \arrow[rr, "+\hbar\Delta"] & & H \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\rm free}+s_{\rm int}+\hbar\Delta) \underset{I}{\overset{P}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\rm phys}, s_{\rm eff}+\hbar\Delta_{\rm eff})
\end{tikzcd}$$

ホモロジー摂動論

初期情報 p, i, h と摂動 $s_{\rm int}+\hbar\Delta$ から、欲しい情報 P, I, H が systematic に作れる！

Homology/Homotopy代数による記述方法

Projection P = the perturbative path-integral

$$\mathrm{P}\Big[A[\phi]\Big] = e^{G_{\mathrm{free}}\frac{\delta}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta\phi}}\Big[e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]}A[\phi]\Big]_{\phi=0} = \frac{1}{Z}\int \mathscr{D}[\phi]e^{S[\phi]}\Big[A[\phi]\Big]$$

- 計算の概略は、付録スライド (講演ではスキップ)

- 詳しいBVでの計算 および homotopy代数での計算は、次の論文中に

PTEP 2022 113 B04　(arXiv 2003.05021 hep-th)

Plan

(i)　Introduction & summary

(ii)　Homology/Homotopy代数による場の理論

この２つは、互いに書き換え可能：

BV形式 と ホモトピー代数 の等価性

(iii)　応用例： “くりこみ” や “古典解まわり” など

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式 と *Homotopy* 代数 の書き換え

- 多重線型形式は「成分表示」と「微分形式表示」の **書き換え** ができた：

例えば...

Maxwell 方程式：	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$	$\Longleftrightarrow$	$d \star F = j$
カレント保存：	$\partial_\mu j^\mu \approx 0$	$\Longleftrightarrow$	$d j \approx 0$
ベクトル場などの模型：	$\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{tr}\, F \wedge F$

- 実は「BRST-BV 形式による記述」と「Homotopy代数による記述」も同様の関係：

BV 方程式 $\Delta\, e^S = 0$ $\Longleftrightarrow$ quantum A_∞ / L_∞ 関係式 $(\hbar\, \Delta + \mu)^2 = 0$

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式 と *Homotopy* 代数 の書き換え

- どの模型の作用も、次の **DeWitt 縮約表示**で書ける：

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\,\mu_{ab}\,\phi^b\,\phi^a + \sum_n \frac{1}{(n+1)!}\,\mu_{a_0\,a_1 \dots a_n}\,\phi^{a_n} \dots \phi^{a_1}\,\phi^{a_0}$$

- DeWitte縮約は、Lorentz・内部自由度だけでなく、「場の種類」も添字で表す：

$O(N)$ スカラー場： $\phi^a = \{\, \varphi_1\,, \dots, \varphi_N\,,\, \varphi_1^\star, \dots, \varphi_N^\star \,\}$

QED の場： $\phi^a = \{\, \psi, \bar{\psi}, A_\mu, c,\, \psi^\star, \bar{\psi}^\star, A_\mu^\star, c^\star \,\}$

- 自由場の演算子と相互作用項の情報は、場の多項式の “係数” $\{\, \mu_{a_0\,a_1 \dots a_n} \,\}_{n \in \mathbb{N}}$ に現れる。

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式 と *Homotopy* 代数 の書き換え

- 作用の満たす BV 方程式 $\Delta\, e^{S[\phi]} = 0$ を、この成分表示で書き下す：

$$\sum_{s,t}\left[\frac{\hbar}{2}(-)^{\psi^{a_t}}\,\omega^{a_t a_s}\,\mu_{a_1\cdots a_s\cdots a_t\cdots a_n}+\sum_{m=0}^{n-1}\mu_{a_1\cdots a_s\cdots a_m}\,\omega^{a_s a_t}\,\mu_{a_{m+1}\cdots a_t\cdots a_n}\right]=0$$

(Antibracket に由来する ω^{ab} は「次数 1 の sympletcic 形式の標準形」の逆行列)

- BRST-BV形式で記述するときの、作用 S の "場の係数" $\{\,\mu_{a_0\,a_1\ldots a_n}\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ が満たす関係式。

- 多重線形性より、係数 $\mu_{a_0\,a_1\ldots a_n}$ は「多重線型形式の成分」と同一視できる：

$\mu_{a_0\,a_1\ldots a_n}$ $\Longleftrightarrow$ n-形式 $\mu_n : V^{\otimes n} \to V$ の成分 (V : ある線型空間)

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式 と *Homotopy* 代数 の書き換え

- この n-形式 を “ひとまとめ” にすると、テンソル代数 $T(V)$ 上の線型写像となる：

$$\mu \equiv \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n + \cdots \qquad \Longrightarrow \qquad \mu : T(V) \to T(V)$$

- 余代数で書くと、係数 $\{ \mu_{a_0 a_1 \ldots a_n} \}_{n \in \mathbb{N}}$ の満たす関係式は、微分 として表せる：

$$\text{quantum } A_\infty / L_\infty \text{ 関係式} \qquad (\hbar \Delta + \mu)^2 = 0$$

- 特に、$(S, S) = 0$ を満たす古典作用が、量子補正なしで $\Delta e^S = 0$ を満たすとき、

$$A_\infty / L_\infty \text{ 関係式} \quad \mu^2 = 0 \qquad \& \qquad \Delta \mu + \mu \Delta = 0$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

BRST-BV 形式 と *Homotopy* 代数 の書き換え

- 関係式 $(\Delta + \mu)^2 = 0$ より、$T(V)$ の複体上の **微分** として $\Delta + \mu$ を使える：

$$H \circlearrowleft \left(\mathscr{F} , s + \hbar\Delta \right) \underset{I}{\overset{P}{\rightleftarrows}} \left(\mathscr{F}_{\mathrm{phys}} , s_{\mathrm{eff}} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff}} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{h} \circlearrowleft \left(T(V) , \mu + \hbar\Delta \right) \underset{\mathsf{I}}{\overset{\mathsf{P}}{\rightleftarrows}} \left(T(V_{\mathrm{phys}}) , \mu_{\mathrm{eff}} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff}} \right)$$

- BRST-BV 形式での計算は、Homotopy 代数による記述に **書き換え**可能。逆も然り。

(この際に「右作用と左作用が入れ換わる」ことに注意)

Homotopy 代数による経路積分の記述：　$\mathsf{P} = p \dfrac{1}{1 - (\mu + \hbar\,\Delta)\,h}$

$$\mathsf{P}\Big[A[\phi] \Big] = e^{G_{\mathrm{free}} \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi}} \Big[e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]} A[\phi] \Big]_{\phi=0} \overset{\text{摂動}}{=} \frac{1}{Z} \int \mathscr{D}[\phi] e^{S[\phi]} \Big[A[\phi] \Big]$$

Homology/Homotopy代数による記述方法

このような記述の利点

. Dyson 方程式： $G(p) = G_{\mathrm{free}}(p) + G_{\mathrm{free}}(p)\,\Sigma(p)\,G(p)$

• この式は、Homology / Homotopy代数による記述から、自然に従う：

$$\mathsf{h} = \mathsf{h}_{\mathrm{free}} + \mathsf{h}\left(\mu_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta\right)\mathsf{h}_{\mathrm{free}}$$ (ホモロジー摂動で得られる h)

• Homotopy 代数による記述では、他の項も Dyson 方程式 or その帰結：

例えば . . . $\mu_{\mathrm{eff}} = \mu_{\mathrm{tree}}\dfrac{1}{1-\Sigma_{\mathrm{h.p.}}}$ ($\Sigma_{\mathrm{h.p.}} = \mathsf{h}_{\mathrm{free}}\left(\mu_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta\right)$)

. 射影 P，単射 I ，逆演算 h ，微分 $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots$ などのデータへ翻訳

Plan

(i) Introduction & summary

(ii) Homology/Homotopy代数による場の理論

(iii) 応用例： “くりこみ” や “古典解まわり” など

応用例： くりこみ

古き好き “くりこみ” の記述

Free, classical

$$h \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}}) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, 0) \longrightarrow$$

Bare

$$\mathrm{h} \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}} + s_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta) \underset{\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{P}}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, s_{\mathrm{eff}} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff}})$$

$$\downarrow$$

Renormalized

$$\mathrm{h}_{\mathrm{R}} \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}} + s_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta + s_{c.t.}) \underset{\mathrm{I}_{\mathrm{R}}}{\overset{\mathrm{P}_{\mathrm{R}}}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, s_{\mathrm{eff,R}} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff,R}})$$

. 初期情報 p, i, h ＋ 摂動 $s_{int} + \hbar\Delta$ ＝ Bare action による Feynman 図展開 P

. 更にもう１度、 $s_{c.t.}$ によるホモロジー摂動を実行 → くり込まれた Feynman 図展開 P_{R}

応用例： 古典解まわり

古典解 a のまわり： $0+\phi_{\mathrm{old}} = a+\phi_{\mathrm{new}}$

Free, classical

$$h \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}}) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, 0)$$

$\longrightarrow$

摂動真空まわり

$$\mathsf{h} \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}} + s_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta) \underset{\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{P}}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, s_{\mathrm{eff}} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff}})$$

$\downarrow$

古典解まわり

$$\mathsf{h}_a \circlearrowright (\mathscr{F}, s_{\mathrm{free}} + s_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta + s_a) \underset{\mathrm{I}_a}{\overset{\mathrm{P}_a}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, s_{\mathrm{eff},a} + \hbar\Delta_{\mathrm{eff},a})$$

インスタントン
キンク解
etc.

- 初期情報 p, i, h ＋ 摂動 $s_{\mathrm{int}} + \hbar\Delta$ ＝ 摂動真空 0 周りの Feynman 図展開 P
- 更にもう１度、 s_a によるホモロジー摂動を実行 → 解 a 周りの Feynman 図展開 P_a

応用例： 汎関数くりこみ群 （ in progress ）

$$\boxed{\int dp\,\Lambda \frac{\partial \mu_1^{-1}(p)}{\partial \Lambda} \frac{\delta^2}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)}}$$

Homology 代数的なデータの関係式となる

- 繰り込み群の方程式の記述： $\mu_1 = \dfrac{\mu_{1,\,bare}}{K_0 - K}$ ， $K = K(p/\Lambda)$ ， $P' = \int \mathscr{D}[\phi']\, e^{S[\phi+\phi']}$

例えば . . .

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \underbrace{\mathrm{P}'\left(e^{-S_{\rm free}[\phi]} \right)}_{\exp\, S_{\rm int}[\phi]_\Lambda} = \underbrace{\Delta\, (\partial_{\ln \Lambda} K)\, \mathrm{h}\, \mathrm{P}'\left(e^{-S_{\rm free}[\phi]} \right)}_{\Delta\text{-exact}}$$

$$\longrightarrow \quad \Lambda \frac{d}{d\Lambda} S_{\rm int}[\phi]_\Lambda = \frac{1}{2} \int dp\, \Lambda \frac{\partial \mu_1^{-1}(p)}{\partial \Lambda} \left[\frac{\delta^2 S_{\rm int}[\phi]_\Lambda}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} + \frac{\delta S_{\rm int}[\phi]_\Lambda}{\delta\phi(p)} \frac{\delta S_{\rm int}[\phi]_\Lambda}{\delta\phi(-p)} \right] \quad \text{(Polchinski eq.)}$$

- これは「 経路積分 $\Longleftrightarrow$ BRST-BV コホモロジーへの射影 P 」と整合的

- くりこみ群は「 BV 方程式 / ホモトピー代数 を満たしつつ 」流れる

$\longrightarrow$ K.Costello, Igarashi-Itoh-Sonoda, Morris らの仕事と整合的

まとめ

- 場の理論でよくやる 基本的な操作 は、BRST-BV 形式 / ホモトピー代数 による記述を経由すると、**ホモロジー代数的なデータ**として計算できる。

- ダイソン方程式は、**ホモロジー摂動の帰結** そのもの！

- “くりこみ” などの操作も、およそ、ホモロジー摂動で書ける。

原理的には「BRST-BV 形式が適用できる場の理論を使って実行できる操作」は、すべて、ホモロジー代数・ホモトピー代数 の操作として書けるはず。

関連する先行研究

- 数学者による BRST-BV形式の研究 [1992頃~]
- H.Kajiura [2001] など (その他、近年の後発研究)
  BRST-BV形式/Homotopy代数と場の理論の関係や利用方法
- K.Costello の本 [2011, 16, 21]
  BV形式で くりこみ群と有効場の理論
  Factorization Algebra による「摂動的な場の理論の数学的定式化」
- Y.Igarashi, K.Itoh, H.Sonoda の研究 [~2009], T.Morrisらの研究[2019~]
  BRST-BV形式で、汎関数くりこみ群を扱う。

Thank you for your attention !

ご清聴 どうも ありがとうございました。

付録（Strings and Fields 2021 でのスライドの一部です）

Projection P = the perturbative path-integral

- We consider free field theories $S_{\rm free}[\phi] = \dfrac{1}{2}\, \phi^a\, \mu_{ab}\, \phi^b$,

  which satisfies $\Delta\, S_{\rm free}[\phi] = 0$ with $\Delta = (-)^{|\phi^a|} \dfrac{\delta}{\delta \phi^a} \dfrac{\delta}{\delta \phi^+_a}$.

  (The classical BV-BRST cohomology is empty except for $\cdots \xrightarrow{s|_{-1}} \mathscr{F}|_0 \xrightarrow{s|_0} 0$.)

- It solves not only the classical master equation $(S, S) = 0$ but also

  the quantum master equation $\hbar\, \Delta(e^{S[\phi]}) = \Big[\hbar\, \Delta\, S + \dfrac{1}{2}(S, S) \Big]\, e^{S[\phi]} = 0$.

- *The (quantum) BV-BRST operator* $s + \hbar\, \Delta$ *is the differential :* $(s + \hbar\, \Delta)^2 = 0$.

付録

Projection P = the perturbative path-integral

- We get a perturbation : $s = \mu_{ab}\phi^b \dfrac{\delta}{\delta\phi^+_a} \;\to\; s + \hbar\,\Delta$ of differentials .

- $(\mu^{-1})^{ab}$ of $h = (\mu^{-1})^{ab}\phi^+_b \dfrac{\delta}{\delta\phi^a}$ is the Feynman propagator. We have $p = 0$ and $i = \mathrm{Id}$:

  Now, the fields $\phi = \underbrace{\phi_{\text{on shell}}}_{=0} + \phi_{\text{off shell}}$ are fluctuation around "0" and $p(\phi) = \underbrace{\phi_{\text{on shell}}}_{=0}$.

- From the original (classical) data $h \circlearrowright (\mathscr{F}, s) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\text{phys}}, 0)$ + the perturbation $\hbar\,\Delta$ of differentials,

  we can construct a new (quantum) data $H \circlearrowright (\mathscr{F}, s + \hbar\,\Delta) \underset{I}{\overset{P}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\text{phys}}, \tilde{\mu})$ by solving

  the recursion relations : $P = p + P(\hbar\,\Delta)h$ and $I = i + h(\hbar\,\Delta)I$.

付録

Projection P = the perturbative path-integral

- The solutions are $P = p \sum_n \left[(\hbar \Delta) h \right]^n$ and $I = \sum_n \left[h (\hbar \Delta) \right]^n i$.

- We can check that $IP = ip \sum_n \left[(\hbar \Delta) h \right]^n$ gives the path-integral.

We notice that p, i, Δ, h act on $a \phi^n \in \mathscr{F} \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{F}^*)$ $(a \in \mathbb{R})$ as follows:

$$p(a\phi^n) = a\, p(\phi^n) = a(p\phi)^n \,, \qquad i(a\phi^n) = a\, i(\phi^n) = a(i\phi)^n \,,$$

$$\Delta(a\phi^n) = a(-)^{|\phi^a|} \frac{\delta}{\delta\phi^a} \frac{\delta}{\delta\phi_a^+} (\phi^n) \,, \qquad h(a\phi^n) = a\, h(\phi^n) = a \sum_{k=1}^{n} \phi^{k-1} (h\phi) (ip\phi)^{n-k} \,.$$

付録

Projection P = the perturbative path-integral

- Note that $p\,(a\,\phi^n) = a\,(\,p\,\phi\,)^n$ means $p\,(\phi^n) = (\,p\,\phi\,)^n$ and $p\,(a) = a$ for $a \in \mathbb{R}$ and

  that $ip(\phi) = 0$ yields $h\,(\,a\,\phi^n) = a\,h\,(\,\phi^n) = a\,(h\phi)\,\phi^{n-1}$.

- We find

$$p\left[\,(\,\hbar\,\Delta\,)\,h\,\right]^m(\phi^{2n}) = p\left[\,(\,\hbar\,\Delta\,)\,h\,\right]^{m-1}(2n-1)\Big[\Big((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^b}\phi\Big)\Big(\frac{\delta}{\delta\phi^a}\phi\Big)\Big]\phi^{2(n-1)}$$

$$= p\left[\,(\,\hbar\,\Delta\,)\,h\,\right]^{m-2}(2n-1)(2n-3)\Big[\Big((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^b}\phi\Big)\Big(\frac{\delta}{\delta\phi^a}\phi\Big)\Big]^2\phi^{2(n-2)}$$

$$\vdots$$

$$= p\left[\,(\,\hbar\,\Delta\,)\,h\,\right]^{m-n}(2n-1)!!\Big[\Big((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^b}\phi\Big)\Big(\frac{\delta}{\delta\phi^a}\phi\Big)\Big]^n$$

* It implies that m = n .

付録

Projection P = the perturbative path-integral

- We can further rewrite it as follows:

$$p\left[(\hbar\Delta)h\right]^{m}(\phi^{2n}) = p\left[(\hbar\Delta)h\right]^{m-n}(2n-1)!!\left[\left((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^{b}}\phi\right)\left(\frac{\delta}{\delta\phi^{a}}\phi\right)\right]^{n}$$

$$= p\left[(\hbar\Delta)h\right]^{m-n}\frac{(2n-1)!!}{2}\left[\left((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^{b}}\phi\right)\left(\frac{\delta}{\delta\phi^{a}}\phi\right)\right]^{n-1}\left[\left((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^{b}}\frac{\delta}{\delta\phi^{a}}\right]\phi^{2}$$

$$\vdots$$

$$= p\left[(\hbar\Delta)h\right]^{m-n}\frac{1}{(2n)!!}\left[\left((\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^{b}}\frac{\delta}{\delta\phi^{a}}\right]^{n}\phi^{2n}$$

- As a result, we obtain

$$P(\phi^{2n}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi^{b}}(\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^{a}}\right]^{n}\phi^{2n} \quad \text{and} \quad P(\phi^{2n+1}) = 0 \ .$$

付録

Projection P = the perturbative path-integral

- Projection $P = p + P(\hbar\Delta)h$ reproduces Wick's theorem !!

- With $IP = iP$, we get the desired result

$$IP\,(\,\dots) = e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi^b}(\mu^{-1})^{ab}\frac{\delta}{\delta\phi^a}}(\,\dots)\Big|_{\phi=0} = \int \mathscr{D}[\phi]e^{S_{\mathrm{free}}[\phi]}\left(e^{S_{\mathrm{int}}[\phi]}\dots\right) \quad .$$

- Hence, the projection onto the (quantum) BV-BRST cohomology, "IP" of $H_{\circlearrowright}(\mathscr{F}, s+\hbar\Delta) \underset{I}{\overset{P}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}_{\mathrm{phys}}, 0)$, indeed reproduces the path-integral.

付録

付録の閲覧、ありがとうございました。

- もう少し refine した説明を 次の論文 (くりこみ関連) に載せようと思うので、よければそちらも参照して下さい。

  育児の出涸らし時間をかき集め、今年度中にまとめておきたい所存です. . .

- 別の論文 (対称性の関連) も、執筆途中でしばらく放置されていますが、決して忘れているわけではないので. . .