

Quantum error correction and Black hole interior in Gravitating bath system

Akihiro Miyata (KITS)

Poster presentation at String and Fields 2023,
August 4, 2023

Based on a work in progress with Tomonori Ugajin (YITP, Hakubi)

ホーキング放射とブラックホール内部

- ・ ブラックホール蒸発に伴うホーキング放射のエントロピーを半古典的重力理論の枠組みで正しく計算することが近年の重要な課題だった
 - ・ アイランド公式[Pennington '19, Almheiri et.al. '19, ...]によりホーキング放射のエントロピーが正しく計算できることが分かった
 - ・ アイランド公式（とエンタングルメントウェッジ再構成）からの重要な示唆
 - ・ ページ時間以降は、ブラックホール内部にある領域（アイランド）の情報はホーキング放射にエンコードされている
- （ページ時間以降、）そのブラックホール内部の情報がホーキング放射にエンコードされている機構の性質を半古典的重力理論のトイモデル(West-coastモデル)で調べることが本研究の目標

✓ West-coast model = PSSY model [Penington et.al. '19]

• 2-dim AdS JT gravity with EOW brane

• Action

$$I = I_{JT} + \nu \int_{\text{brane}} ds$$

$$\left(I_{JT} = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{g} R + \int_{\partial M} \sqrt{h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{g} \phi R + \int_{\partial M} \sqrt{h} \phi K \right] \right)$$

• Entangled state between BH and Radiation

$$|\Psi_{i,i'}\rangle_{\text{PSSY}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\alpha=1}^k |\psi_{i,i'}^\alpha\rangle_B \otimes |\alpha\rangle_R$$

Non-gravitating

$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_{i,i'}^\alpha\rangle_B : \text{BH state with code index } \underset{\text{interior} \downarrow}{i}, \underset{\downarrow \text{exterior}}{i'}. \\ |\alpha\rangle_R : \text{HR state} \end{array} \right.$

→ Code information is embedded into the state.

Note that

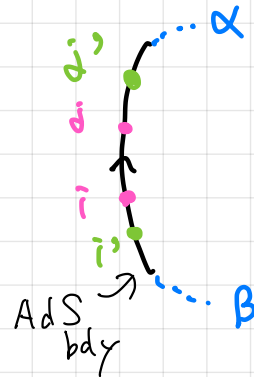
we need to consider gravitational path integral

to evaluate overlaps of BH states $|\varphi_{i,i'}^\alpha\rangle_B$,

unlike HR states ${}_R\langle\alpha|{}_R\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

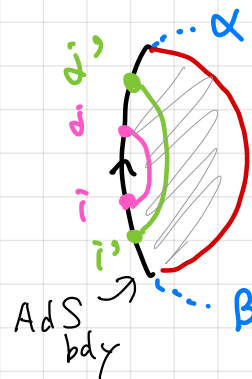
Ex.

$$\langle\varphi_{i,i'}^\alpha|\varphi_{j,j'}^\beta\rangle =$$



Gravitational path integral

$$\overline{\langle\varphi_{i,i'}^\alpha|\varphi_{j,j'}^\beta\rangle} =$$



$$= Z_1 \delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{\alpha\beta}$$

✓ Doubled PSSY model [Anderson - Parrikar - Soni '21]

$$|\Psi_{i,i'}\rangle_{\text{DPSSY}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^k |\psi_{i,i'}^{\alpha}\rangle_{B_1}^* \otimes |\psi^{\alpha}\rangle_{B_2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_{i,i'}^{\alpha}\rangle_{B_1} : \text{BH}_1 \text{ state with code index } \underset{\text{interior} \downarrow}{i}, \underset{\downarrow \text{exterior}}{i'} \\ |\psi^{\alpha}\rangle_{B_2} : \text{HR state in a Gravitating bath} \end{array} \right.$
= BH₂ state w/ $d_{\text{BH}_2} = d_{\text{BH}_1} \equiv d_{\text{BH}}$

N : Normalization factor

[We can also consider
 $|\psi^{\alpha}\rangle_{B_2} \rightarrow |\psi_{\tilde{i},\tilde{i}'}^{\alpha}\rangle_{B_2}$,]

レプリカワームホール

- ・ そのエンコードの機構を調べる上で、アイランド公式によりホーキング放射のエントロピーの計算でページ時間以降なぜアイランドが寄与してくるかが重要となっている

→アイランドが寄与してくる理由は、アイランド公式をレプリカトリックを使い導出する際の重力経路積分で、支配的となるサドルがページ時間前後で切り替わるため

[Pennington et.al. '19, Almheiri et.al. '19, ...] :

ページ時間前 → ホーキングサドル

ページ時間後 → レプリカワームホール (サドル)

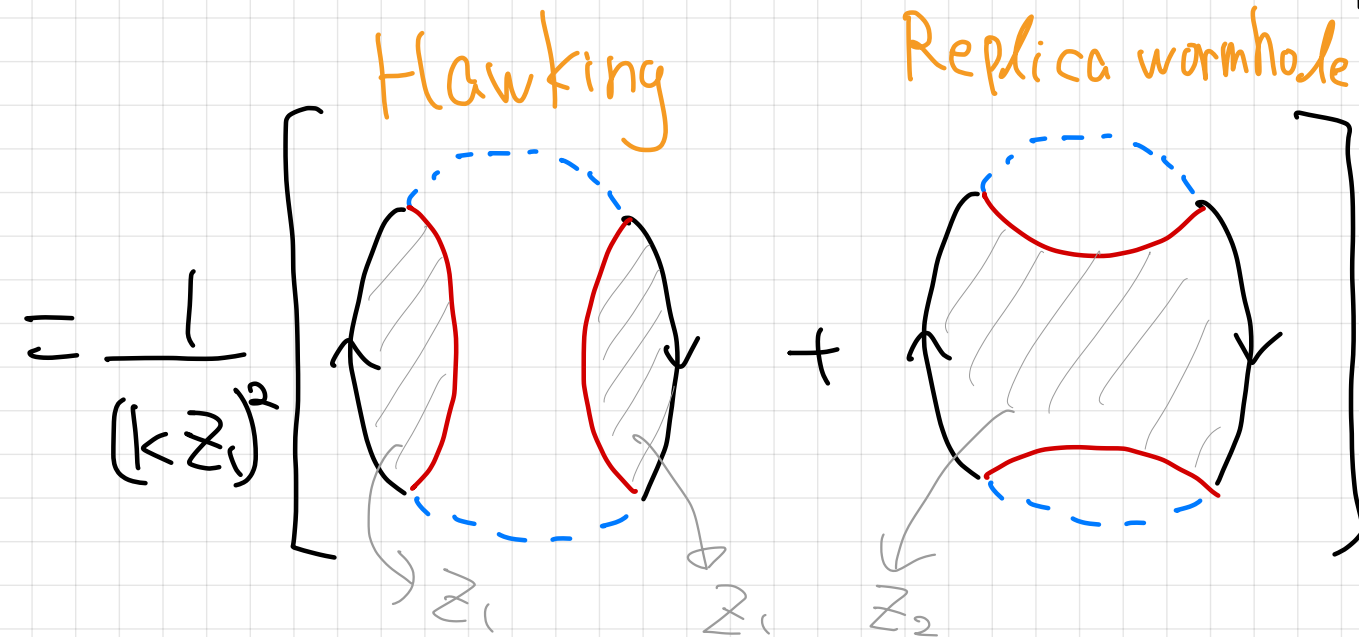
- レプリカワームホールサドルが支配的となっていることと、ブラックホール内部の情報がホーキング放射にエンコードされていることが対応

✓ Replica wormhole in the West-coast model

For simplicity, focus on the purity with omitting "i", "i'"

$$\overline{\text{tr}[\rho_R^2]} / (\overline{\text{tr}[\rho_R]})^2$$

$$\begin{aligned} \rho_R &= \text{Tr}_B[|\Psi\rangle_{\text{PSSY}}\langle\Psi|] \\ &= \frac{1}{K} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^K |\alpha\rangle_R \langle\alpha'|_R \langle\psi^{\alpha'}|_{\text{B}} \psi^{\alpha}\rangle_{\text{B}} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{(kZ_1)^2} \left[k(Z_1)^2 + k^2 Z_2 \right]$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{\sum_2}{(\sum_1)^2}$$

$$\stackrel{\text{Micro-canonical}}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{e^{S_{\text{BH}}}} \approx \begin{cases} \frac{1}{k} & k \ll e^{S_{\text{BH}}} \\ \frac{1}{e^{S_{\text{BH}}}} & k \gg e^{S_{\text{BH}}} \end{cases}$$

Below, let us assume
the microcanonical ensemble for simplicity.

注目するエンコードされている機構の性質

- ・ブラックホール内部の情報がホーキング放射にエンコードされている機構の性質の中で、特にそのエンコードがどれくらいRobustであるかに注目

今の文脈でのRobustとは、エンコード先のホーキング放射に“多少”の操作(エラー)を施しても、エンコードされたブラックホール内部の情報は壊されない (or 依然としてホーキング放射にエンコードされている) という性質のこと [Kim-Tang-Preskill '20]

→量子誤り訂正(Quantum Error Correction)

コード部分空間(ブラックホール内部の情報)をより大きな物理的ヒルベルト空間(ホーキング放射)に埋め込むことで、物理的ヒルベルト空間に対する多少の操作 (エラー) があっても、コード部分空間の情報は復元できる (エラーを訂正できる)

Robustnessと重力経路積分のサドル

- ブラックホール内部の情報がホーキング放射にエンコードされる機構の Robustness

→重力経路積分の言葉では、ホーキング放射に“多少”の操作(エラー)をした状況での重力経路積分の支配的なサドルが、“多少”のエラーに対しては支配的のままであるということに対応 [Balasubramanian-Kar-Li-Parrikar '22]

注：Robustnessを調べる際の重力経路積分のサドルは、ホーキング放射のエントロピーの際の重力経路積分とは若干異なる。

- Robustness→ホーキング放射に多少の操作(エラー)をしても支配的なサドルが変わらない
- 「ホーキング放射に対する操作(エラー)」が本研究の重要な部分
- 先行研究[Balasubramanian-Kar-Li-Parrikar '22]で注目していたToyモデルでは、ブラックホールとエンタングルしているホーキング放射が**重力が作用しない熱浴**に溜められている状況

→ホーキング放射に対する操作(エラー)はホーキング放射の状態を変えてしまい、それによって支配的な重力経路積分のサドルが変わってしまうことが発見された。

この際、ホーキング放射に対する操作(エラー)は直接的には重力の経路積分には影響を与えていない。

→エラーは間接的に重力経路積分に影響

✓ Error acting on the **Non-gravitating** bath

- Error can be modeled by an interaction with an environment.

$$U_{R,env} |\Psi_{i,i'}\rangle_{PSSY} \otimes |e_0\rangle_{env}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k N_{PSSY}}} \sum_{m=1}^{d_{env}} \sum_{\alpha=1}^k |\Psi_{i,i'}^\alpha\rangle_{B_1}^* \left(E_m |\alpha\rangle_R \right) \otimes |e_m\rangle_{env}$$

- $\tilde{E}_m \equiv \langle e_m | U_{R,env} | e_0 \rangle_{env}$: Kraus operator

$$\sum_m \tilde{E}_m^\dagger \tilde{E}_m = I$$

- $\tilde{E}_m$ acting on HR states ($k \times k$ matrix)

- Robustness=ホーキング放射に多少の操作(エラー)をしても支配的なサドルが変わらない
- 「ホーキング放射に対する操作(エラー)」が本研究の重要な部分
- (先行研究) **重力が作用しない熱浴**の状況→エラーは間接的に重力経路積分に影響
- 本研究では、ホーキング放射が**重力が作用する熱浴**に溜められている状況でのエラーに注目
 - 熱浴に重力がある時の性質として (エラーがなくても) 重力経路積分が影響を受ける
[Geng-Karch et.al. '20, Anderson-Parikkar-Soni '21, Balasubramanian-Kar-Ugajin '21,]

→ホーキング放射に対する操作(エラー)はホーキング放射の状態を変える。加えて、さらに、一般的にはその操作(エラー)からの時空への直接的なBack-reactionも存在。

→エラーは間接的＋直接的なBack-reactionにより重力経路積分に影響を及ぼす。

✓ Error acting on the **Gravitating bath**

- Error can be modeled by an interaction with an environment.

$$U_{B_2, \text{env}} |\Psi_{i,i'}\rangle_{\text{DPSSY}} \otimes |e_0\rangle_{\text{env}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^{\text{denv}} \sum_{\alpha=1}^k |\Psi_{i,i'}^\alpha\rangle_{B_1}^* \otimes (E_m |\Psi^\alpha\rangle_{B_2}) \otimes |e_m\rangle_{\text{env}}$$

- $E_m = \langle e_m | U_{B_2, \text{env}} | e_0 \rangle_{\text{env}}$: Kraus operator

$$\sum_m E_m^\dagger E_m = I$$

- E_m acting on **black hole microstates** ($d_{\text{BH}} \times d_{\text{BH}}$ matrix)

Unlike the Non-gravitating case,
we need to consider the gravitational path integral
to evaluate e.g. ${}_{B_2} \langle \psi^\alpha | E_m^\dagger E_n | \psi^\beta \rangle_{B_2}$.

Ex.

$$\begin{aligned} \overline{{}_{B_2} \langle \psi^\alpha | E_m^\dagger E_n | \psi^\beta \rangle_{B_2}} &= \frac{Z_1}{d_{BH_1}} \text{Tr}_{BH_2} [E_m^\dagger E_n] S_{\alpha\beta} \\ &= \text{Tr}_{BH_2} [E_m^\dagger E_n] S_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

✓ How to characterize the Robustness
 - Decoupling condition -

To study B1 interior and exterior code information generally,
 focus on the state

$$|\overline{\Psi}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_i d_e}} \sum_{i=1}^{d_i} \sum_{i'=1}^{d_e} |i\rangle_{\mathcal{R}_i} \otimes |i'\rangle_{\mathcal{R}_e} \otimes \bigcup_{B_2, \text{env}} |\overline{\Psi}_{i,i'}\rangle_{\text{DESSY}} \otimes |e_0\rangle_{\text{env}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d_i d_e N}} \sum_{i=1}^{d_i} \sum_{i'=1}^{d_e} \sum_{m=1}^{d_{\text{env}}} \sum_{\alpha=1}^k |i\rangle_{\mathcal{R}_i} \otimes |i'\rangle_{\mathcal{R}_e} \otimes |\psi_{i,i'}^\alpha\rangle_{B_1}^* \left(E_m |\psi^\alpha\rangle_{B_2} \right) \otimes |e_m\rangle_{\text{env}}$$

To study the robustness of the encoding,
one can study the decoupling condition

$$\rho'_{\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_e, \text{env}} \stackrel{?}{=} \rho'_{\mathcal{R}_i} \otimes \rho'_{\mathcal{R}_e, \text{env}} \quad \left(\rho'_A = \text{Tr}_{\bar{A}} |\Psi'\rangle \langle \Psi'| \right)$$

If this holds (approximately),

then code information on the black hole interior
is protected against the error.

$\Rightarrow$ Robustly encoded!!

In actual computations,

we study the Renyi-2 mutual information

$$I^{(2)'}(\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_e \cup \text{env}) := S^{(2)}(\rho'_{\mathcal{R}_i}) + S^{(2)}(\rho'_{\mathcal{R}_e, \text{env}}) - S^{(2)}(\rho'_{\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_e, \text{env}})$$

$$\left(S^{(2)}(\sigma) = -\log \text{Tr}[\sigma^2] \right)$$

and check

whether this mutual information vanishes.

✓ Result
under the assumption

that there is no direct back-reaction from the Kraus operators E_m .

$$\overline{I^{(2)}(\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_e \cup \text{env})} = \begin{cases} 0 & \text{"Disconnected saddle"} \\ 2 \log d_i & \text{"Connected saddle"} \end{cases}$$

This result is consistent

with the Non-gravitating case

[Balasubramanian-Kar-Li-Parrikar '22].

However,

saddles appearing here are different from

those of the Non-gravitating case.

Ex. Gravitating bath

$$\cdot |\overline{\mathcal{F}}_{\bar{i}, \bar{i}}\rangle_{\text{DPSSY}}$$

$$\text{tr}[\rho_{\mathcal{R}_{\bar{i}}}^{\prime 2}]$$

$$= \frac{1}{(\text{dof } N_{\text{DPSSY}})^2} \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^{d_{\bar{i}}} \sum_{\alpha, \beta=1}^k$$

$$\times \langle \mathcal{F}_{\bar{i}_1, \bar{i}'_1}^{\beta_1} | \mathcal{F}_{\bar{i}_2, \bar{i}'_2}^{\alpha_1} \rangle_{\beta_1} \langle \mathcal{F}_{\bar{i}_2, \bar{i}'_2}^{\beta_2} | \mathcal{F}_{\bar{i}_1, \bar{i}'_1}^{\alpha_2} \rangle_{\beta_1}$$

$$\times \langle \mathcal{F}^{\alpha_1} | \mathcal{F}^{\beta_1} \rangle_{\beta_2} \langle \mathcal{F}^{\alpha_2} | \mathcal{F}^{\beta_2} \rangle_{\beta_2}$$

No-gravitating bath

[Balasubramanian-Kar-Li-Parrikar '22]

$$\cdot |\overline{\mathcal{F}}_{\bar{i}, \bar{i}}\rangle_{\text{PSSY}}$$

$$\text{tr}[\rho_{\mathcal{R}_{\bar{i}}}^{\prime 2}]$$

$$= \frac{1}{(\text{dof } N_{\text{PSSY}})^2} \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^{d_{\bar{i}}} \sum_{\alpha=1}^k$$

$$\times \langle \mathcal{F}_{\bar{i}_1, \bar{i}'_1}^{\alpha_1} | \mathcal{F}_{\bar{i}_2, \bar{i}'_2}^{\alpha_1} \rangle_{\beta_1} \langle \mathcal{F}_{\bar{i}_2, \bar{i}'_2}^{\alpha_2} | \mathcal{F}_{\bar{i}_1, \bar{i}'_1}^{\alpha_2} \rangle_{\beta_1}$$

本研究の結果

- ホーキング放射が重力が作用する熱浴に溜められている状況で、ブラックホール内部の情報がホーキング放射にエンコードされている機構のRobustnessを、半古典的重力理論のトイモデル(Doubled PSSYモデル)において注目
- エラーによる直接的なBack-reactionが存在しない仮定(=エラーによる間接的な影響のみを考慮した状況)の下では、熱浴に重力が働いている影響で、重力経路積分に現れる可能なサドルが変わってくるが、熱浴に重力が働いていない状況と類似した振る舞いを示す
- 直接的なBack-reactionを入れた場合はin-progress。この際、そのBack-reactionによって、一部のサドルが影響を受けるため、そのようなサドルが支配的になると結果が変わってくる