

$\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の Giant graviton expansion

arXiv: to appear

(SM, Y. Imamura, T. Mori, S. Fujiwara, D. Yokoyama)

村山 修一

東京工業大学 素粒子理論研究室

2023/08/07 場の理論と弦理論 2023

今村氏，森氏，藤原氏，横山氏との共同研究に基づく

Abstract(一部抜粋)

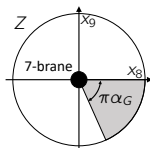
7-brane 背景上で構成される，特定の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論について，超共形指数をGiant graviton expansionを用いて計算する．

本発表ではまず，下線部の用語について解説していく．

D3 & 7-brane system

Z-plane に deficit angle $\pi\alpha_G$ を与え, 原点に対称性 G を持つ 7-brane を挿入することで, N 枚の D3-brane 上に $\mathcal{N} = 2$ 超対称性理論を構成できる.

[Aharony et al.(1998)]



$X, Y, Z \in \mathbb{C}$

	0	1	2	3	X	Y	Z
D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓	

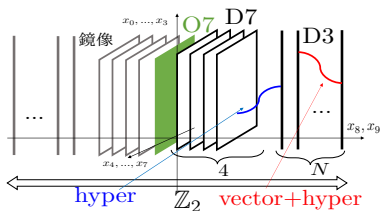
構成できる CFT の系列

Type	α_G	G	Theory
H_0	$\frac{1}{3}$	None	
H_1	$\frac{1}{2}$	A_1	AD
H_2	$\frac{2}{3}$	A_2	
D_4	1	D_4	$Sp(N)$
E_6	$\frac{4}{3}$	E_6	
E_7	$\frac{3}{2}$	E_7	MN
E_8	$\frac{5}{6}$	E_8	

ここでは D_4 に注目して考える.

D_4 の理論

- deficit angle $\pi \leftrightarrow$ Orientifold 理論
- 7-brane は O7-plane と RR-charge を打ち消すように入れられた 4 枚の D7-brane



D7-brane 上に $SO(8)$ global symm. が存在し, D3-brane 上に $Sp(N)$ gauge 理論が存在する.

理論に存在する状態は開弦の mode として見る事ができる.

- ① $Sp(N)$ adjoint の vector multiplet
- ② $Sp(N)$ anti-symmetric の hyper multiplet
- ③ $Sp(N)$ fund. & D_4 fund. の hyper multiplet

超共形指数

超共形指数は、BPS 状態を数え上げる分配関数である。

[Römelsberger(2005)][Kinney et al.(2005)]

理論の持つ対称性 (右下は charge)

$$\frac{SO(2) \times SO(4)_{j_1, j_2}}{\text{共形対称性}} \times \frac{SO(4)_{R_x, R_y} \times SO(2)_{R_z}}{\text{R-対称性 \& Flavor 対称性}} \times G$$

超共形指数

$$I = \text{tr} \left[(-1)^F q^{j_1} p^{j_2} x^{R_x} y^{R_y} z^{R_z} \right] \quad (qp = xyz \text{ } (\because \text{BPS cond.}))$$

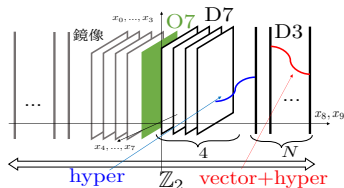
F : fermion 数 (Boson は even, Fermion は odd)

q, p, x, y, z : fugacities ($e^{-\text{chemical potential}}$)

D_4 理論の超共形指数

存在している状態がわかれば，超共形指数を直接 (局所化) 計算できる．

- ① 状態の持つ charge から，1 粒子指数を得る．



- ① $i_{\text{vec}} = 1 - \frac{(1+xy)(1-z)}{(1-q)(1-p)}$

- ② $i_{\text{hyp}'} = \frac{(x+y)(1-z)}{(1-q)(1-p)}$

- ③ $i_{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{xy}(1-z)}{(1-q)(1-p)}$

- ② character の形で gauge fugacities を追加し，Plethystic exponential (Pexp) で多粒子状態に

$$\text{Pexp}[f(x)] := \exp\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n}\right]$$

$$\text{Pexp}[i_{\text{vec}} \chi_{\text{adj}}^{Sp(N)} + i_{\text{hyp}'} \chi_{\text{a-}}^{Sp(N)} + i_{\text{hyp}} \chi_{\text{fund}}^{Sp(N)}]$$

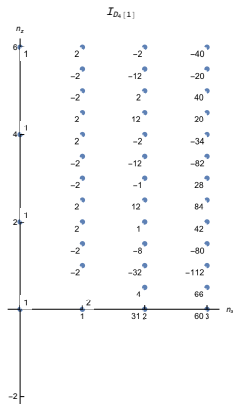
- ③ Haar measure $[d\mu]$ をかけ gauge fugacities について周回積分することにより, gauge singlet を取り出す

$$I_{D_4[N]} = \int [d\mu] P \exp[i_{\text{vec}} \chi_{\text{adj}}^{Sp(N)} + i_{\text{hyp}'} \chi_{\text{a-sym}}^{Sp(N)} + i_{\text{hyp}} \chi_{\text{fund}}^{Sp(N)}]$$

$y \rightarrow x, q, p \rightarrow x\sqrt{z}$ と変換して
 z の order (n_z) - x の order (n_x)
 で超共形指数を級数展開

$$\begin{aligned} I_{D_4[1]} = & (z^2 + z^4 + z^6 \cdots) \\ & + x(2 - 2z - 2z^{\frac{3}{2}} + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

右図のように 2d plot で表すことにする.



AdS/CFT 対応

Brane 構成から，以下のような AdS/CFT 対応が考えられる。

[Fayyazuddin,Spalinski(1998)][Aharony et al.(1998)]

	0	1	2	3	X	Y	Z			0	1	2	3	4	X	Y	Z
D3	✓	✓	✓	✓				⇒		AdS_5					S^5		
7	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓			7	✓	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓	

AdS/CFT 対応

AdS

$AdS_5 \times S^3$ に 7-brane が存在する,
 $AdS_5 \times S^5/\mathbb{Z}_2$ 時空上の IIB 型超
 弦理論



CFT

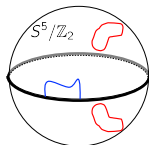
D_4 理論

この AdS/CFT 対応において、両者の超共形指数の対応関係について調べる.

KK mode のみの超共形指数 (Large N limit)

理論が古典的な超重力理論 ($N \rightarrow \infty$) だと思えば, 寄与は Kaluza-Klein(KK) mode のみであり, 超共形指数は. rank $N \rightarrow \infty$ の CFT のものと一致する. [Witten(1998)][Kinney et al.(2005)]

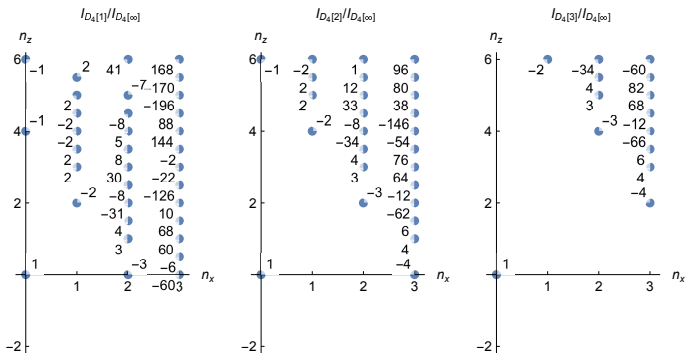
- ① Bulk KK mode (閉弦の mode)
- ② 7-brane 上の KK mode [Aharony et al(1998)]



超共形指数における AdS/CFT 対応

$$\begin{aligned} I_{D_4[\infty]} &= I_{\text{KK}} \\ &= \text{Pexp} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} - \frac{q}{1-q} - \frac{p}{1-p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{(1+x)(1+y)(1-z)(1+q)(1+p)}{(1-x)(1-y)(1+z)(1-q)(1-p)} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi_{28}^{D_4} xy(1-z)}{(1-p)(1-q)(1-x)(1-z)} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{I_{D_4[N]}}{I_{KK}} \quad (N = 1, 2, 3)$$



rank N が大きくなるにつれ, Error は少なくなっていく

$\Rightarrow N \rightarrow \infty$ で両者は一致 $\therefore I_{D_4[\infty]} = I_{KK}$

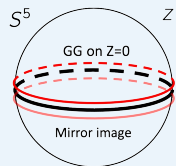
Giant graviton

N が有限の場合 (Finite N) は, Giant graviton の寄与が重要.

Giant graviton(GG)

時間 1 次元 (0 方向) とコンパクト空間の 3 次元に 3-cycle を巻くように広がる D3-brane [McGreevy,Susskind,Toumbas(2000)]

	0	1	2	3	4	X	Y	Z
	AdS_5					S^5		
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓	
GG($Z=0$)	✓					✓✓	✓✓	



大円に巻いた GG の charge R_z は $2N$ になる

$$R_z = \frac{N}{\pi^2} \int_{S^3} dx^3 \sqrt{g_{3\text{-cycle}}} = N \rightarrow \text{GG の指数} \propto z^{2N}$$

CFT 側では GG の寄与は determinant(BPS) とその modification に相当 [Gaiotto, Lee(2021)]

Giant graviton expansion

Finite N の指数 $I_{D_4[N]}$ と KK mode $I_{D_4[\infty]}$ との比は, $Z = 0$ に巻いた n_z 枚の GG の寄与 $z^{2n_z N} F_{n_z}$ の和になっている.

Giant graviton expansion (Simple-sum)

$$\frac{I_{D_4[N]}}{I_{D_4[\infty]}} = \sum_{n_z=0}^{\infty} z^{2n_z N} F_{n_z}$$

F_{n_z} : fluctuation (GG 上の CFT から計算可)

Fluctuation と Analytic continuation

Fluctuation F_{n_z} の計算方法

- ① GG 上の CFT の 1 粒子指数を boundary CFT のように見做して計算

	0	1	2	3	X	Y	Z			0	1	2	3	X	Y	Z
GG	✓				✓	✓		$\longleftrightarrow$	D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓		σ_z	7	✓	✓	✓	✓	✓✓	✓✓	

Brane construction は D_4 理論と変わらない (Self-dual)

$$I_{D_4[n_z]} = \int [d\mu] \text{Pexp} [i_{\text{vec}} \chi_{\text{adj}}^{Sp(n_z)} + i_{\text{hyp}'} \chi_{\text{a-sym}}^{Sp(n_z)} + i_{\text{hyp}} \chi_{\text{fund}}^{Sp(n_z)}]$$

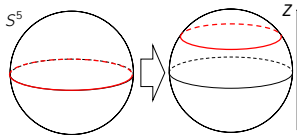
- ② GG 上の対称性になるように fugacity を変換 (boundary と見做して計算したものを戻す)

GG への変換演算子

$$\sigma_z : (q, p) \rightarrow (x, y), z \rightarrow z^{-1} \quad [\text{Arai, Imamura(2019)}]$$

$\sigma_z : (q, p) \rightarrow (x, y), z \rightarrow z^{-1}$ になる理由

- GG 上では座標 1, 2, 3 上の Spin 回転対称性 $SO(4)_{j_1, j_2}$ と座標 X, Y 上の内部対称性 $SO(4)_{R_x, R_y}$ が入れ替わっている
- z 方向への変化では GG の体積は減少する (tachyonic shift)



③ その際, Pexp は解析接続的に行う

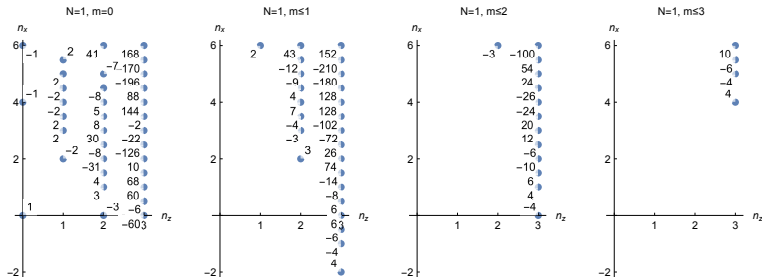
$$\text{Pexp}[x^{-1}] = \frac{1}{1-x^{-1}} \stackrel{!}{=} \frac{-x}{1-x} = -x - x^2 - x^3 + \dots$$

$$\therefore F_{m_z} = \sigma_z I_{D_4[n_z]}$$

$$= \sigma_z \left(\int [d\mu] \text{Pexp} [i_{\text{vec}} \chi_{\text{adj}}^{Sp(n_z)} + i_{\text{hyp}'} \chi_{\text{a-sym}}^{Sp(n_z)} + i_{\text{hyp}} \chi_{\text{fund}}^{Sp(n_z)}] \right)$$

Numerical test (1)

$$I_{D_4[N]}/I_{D_4[\infty]} = \sum z^{2m} F_m$$



GGを足せば足すほど, Finite N と Large N の間の Error は小さくなっていく

GG expansion が正しく再現できた！

D_4 以外の理論: AD 理論と MN 理論

D3-brane と 7-brane で構成できる CFT の系列の中で, H_0, H_1, H_2 は Argyres-Douglas(AD) 理論, E_6, E_7, E_8 は Minahan-Nemeschansky(MN) 理論と呼ばれる. [\[Ahalony et al.\(1998\)\]](#)

Type	α_G	G	Theory
H_0	$\frac{1}{3}$	None	AD
H_1	$\frac{1}{2}$	A_1	
H_2	$\frac{2}{3}$	A_2	
D_4	1	D_4	$Sp(N)$
E_6	$\frac{4}{3}$	E_6	MN
E_7	$\frac{3}{2}$	E_7	
E_8	$\frac{5}{6}$	E_8	

- どちらの理論も gauge 理論ではなく, 弦の mode から状態を知ることができない
- 超共形指数もごく一部しか計算できていない

N	H_0	H_1	H_2	D_4	E_6	E_7	E_8
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
2				✓			
3				✓			

✓ : a-maximization

[\[Maruyoshi, Song\(2016\)\]](#)

[\[Agarwal, Maruyoshi, Song\(2018\)\]](#)

✓ : Argyres-Seiberg duality

[\[Gadde et al.\(2010\)\]](#)

Argyres-Douglas 理論の GG expansion

gauge 理論でなくとも, $D_4[N]$ の GG expansion を応用すれば, 7 種の理論全てで GG expansion が得られるはず.

Type	α_G	G	Theory
H_0	$\frac{1}{3}$	None	AD
H_1	$\frac{1}{2}$	A_1	
H_2	$\frac{2}{3}$	A_2	
D_4	1	D_4	$Sp(N)$
E_6	$\frac{4}{3}$	E_6	MN
E_7	$\frac{3}{2}$	E_7	
E_8	$\frac{5}{6}$	E_8	

- 系列の中の理論同士の違いは deficit angle α_G の値と 7-brane 上の global symmetry G のみ
- Brane construction に大きな違いはない

系列の理論 $G[N]$ の GG expansion

7 種の理論全てで, D_4 理論と同様の GG expansion ができるはず

$$\frac{I_{G[N]}}{I_{G[\infty]}} = \sum_{n_z=0}^{\infty} z^{\frac{2n_z}{2-\alpha_G}} F_{n_z}$$

$Z = 0$ の GG は self-dual であり, Fluctuation は CFT 側の理論をもとに計算できる.

$G[N]$ の GG の Fluctuation

$$F_{n_z} = \sigma_z I_{G[n_z]}$$

超共形指数がまだ計算できていない理論もあるが, ある程度の order までなら

- 途中までの GG expansion

$$I_{G[\infty]} \sum_{n_z=0}^{N-1} z^{\frac{2n_z}{2-\alpha_G}} \sigma_z I_{G[n_z]}$$

- D_4 理論の指数 $I_{D_4[N]}$

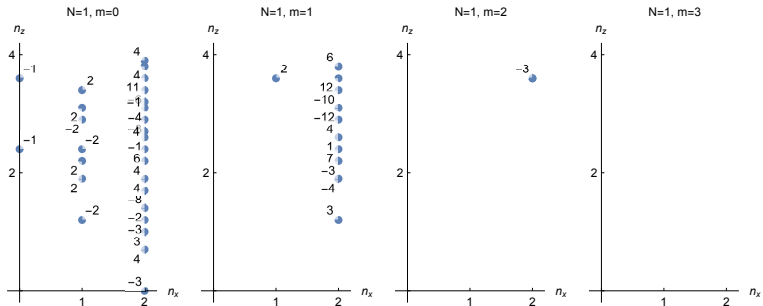
をもとに $I_{G[N]}$ を推測できる

N	H_0	H_1	H_2	D_4	E_6	E_7	E_8
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
2				✓			
3				✓			

本研究では, x^2 まで指数を得ることができたため, GG expansion を確認する.

Numerical test (2)

$$I_{H_0[1]}/I_{H_0[\infty]} - \sum z^{\frac{6}{5}m} \sigma_z I_{H_0[m]}$$



GG expansion の形になっている！

- 7-brane により構成される $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の超共形指数について, Giant graviton expansion の関係が成り立っていることを確認した.
- H_0 や H_1 といった Argyres-Douglas 理論についても, Giant graviton expansion の関係性が成り立つことを確認した.
- 系列の理論に対し, より高次まで超共形指数を Giant graviton expansion を介して計算することが今後の課題として挙げられる.

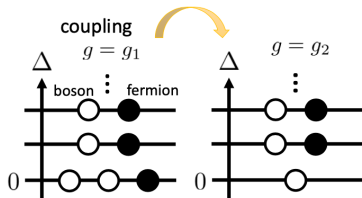
ご清聴ありがとうございました

超共形指数

超共形指数の特徴

- 超共形指数は分配関数のように、理論の operator spectrum の情報を持つ。
- 超共形指数は理論の結合定数に依存しない。

[Kinney, Maldacena, Minwalla, Raju(2005)]



結合定数が変わると、boson と fermion が pair になって変化 $\Delta \neq 0$ の状態は boson と fermion で cancel

$\Delta = 0$ の状態 $\Leftrightarrow$ BPS 状態のみが寄与する

なんで一致しないの？

ランク N = 同時対角化できる, adjoint 表現の数
operator が N 回より多くかかった状態は, 独立な状態ではない!

eg) $U(2)$ (rank2) adjoint scalar の場合

$$\mathrm{tr}(X^3) = \frac{3}{2}\mathrm{tr}(X^2)\mathrm{tr}X - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}X)^3 \quad \mathrm{tr}(X^3) \text{ は独立ではない}$$

AdS 側で KK mode のみが寄与するのは, large N 極限だけ (関係式: $L_{AdS}^4 l_p^{-4} = N$)

Finite N では, 何かしらの補正が必要

- CFT 側では, Finite N 補正は “determinant modification” として理解できる [Gaiotto, Lee (2021)]
- AdS 側の finite N での補正とは何か? → Giant graviton [Arai, Imamura(2019)]

Giant graviton expansion

Finite N の指数 $I_{D_4[N]}$ は, KK mode の寄与 $I_{D_4[\infty]}$ に, $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \\ Z=0 \end{cases}$

に巻いた $\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$ 枚の GG の寄与 $x^{n_x N} y^{n_y N} z^{2n_z N} F_{n_x, n_y, n_z}$ を補正を加えて求められる.

Giant graviton expansion

$$\frac{I_G[N]}{I_G[\infty]} = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} x^{n_x N} y^{n_y N} z^{2n_z N} F_{n_x, n_y, n_z}$$

F_{n_x, n_y, n_z} : fluctuation (GG 上の CFT から計算可)

eg) Fluctuation $F_{n_x,0,0}$ の計算方法

- ① GG 上の CFT の 1 粒子指数を boundary CFT のように見做して計算

	0	1	2	3	X	Y	Z			0	1	2	3	X	Y	Z
GG	✓					✓	✓	→	D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓			7	✓	✓			✓	✓	✓

$SO(4)_{j_1,j_2} \rightarrow SO(2)_{j_1} \times SO(2)_{j_2}$ に破れた $O(N)$ SCFT

- ② GG 上の対称性になるように解析接続的に fugacity を変換
 $\sigma_x: (q, p) \leftrightarrow (y, z), x \rightarrow x^{-1}$ [Arai,Imamura(2019)]

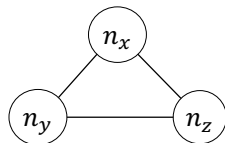
- ③ 解析接続的に Pexp して多粒子状態も取得

$$\text{Pexp}[f(x)] := \exp\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n}\right]$$

$$\text{Pexp}[x^{-1}] = \frac{1}{1-x^{-1}} = \frac{-x}{1-x} = -x - x^2 - x^3 + \dots$$

Multiple-sum と simple-sum

複数方向に跨った GG の fluctuation の計算は難しい



- 解析接続をどう取ればいいかが難しい
- $SO(8)$ triality が再現できない

しかし、級数展開の中で指数が 0 となる GG が 2 種類あれば、1 方向の GG だけの級数で簡単に指数を計算できる

Simple-sum expansion

$$\frac{I_{G[N]}}{I_{G[\infty]}} = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} x^{n_x N} F_{n_x, 0, 0}$$

まずは $F_{1,0,0}$, $F_{0,1,0}$, $F_{0,0,1}$ を計算して、Simple-sum になるかどうかを確認したい

GG の Fluctuation mode

$F_{m,0,0}, F_{0,m,0}$ GG 上の CFT($\tilde{D}_4[m]$) の gauge 群は $O(m)$

	0	1	2	3	X	Y	Z			0	1	2	3	X	Y	Z
GG	✓					✓	✓	→	D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓			7	✓	✓			✓	✓	✓

$$\begin{aligned}
 F_{m,0,0} &= \sigma_x I_{\tilde{D}_4[m]} \\
 &= \sigma_x \left(\int [d\mu] \text{Pexp} [f_{\text{even}} \chi_{\text{sym}}^{O(m)} + f_{\text{odd}} \chi_{\text{a-sym}}^{O(m)} + \chi_{\mathbf{28}}^{D_4} f_{3-7} \chi_{\text{fund}}^{O(m)}] \right)
 \end{aligned}$$

級数展開の中で指数が 0 となるかどうかは, gauge 群の Cartan part を見て判別する

$F_{m,0,0}$ の Cartan part

$$\text{Pexp} \left[m \frac{(x^{-1} - 1)(1 - q)(1 - p)}{(1 - y^2)(1 - z)} \right] = \text{Pexp} \left[m \sum_{n_y, n_z=0}^{\infty} x^{-1} y^{n_y} z^{2n_z} + \dots \right]$$

$F_{1,0,0}$ と $F_{0,1,0}$ は $SO(4)$ 対称性により $x \leftrightarrow y$ で入れ替えられる

$F_{0,0,m}$ GG は O7-plane に並行
 CFT($D_4[m]$) は boundary と同じ $Sp(m)$

	0	1	2	3	X	Y	Z			0	1	2	3	X	Y	Z
GG	✓					✓	✓	→	D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓			7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Brane construction は変わらない (Self-dual)

$$F_{0,0,m} = \sigma_z I_{D_4[m]}$$

$$= \sigma_z \left(\int [d\mu] \text{Pexp} [f_{\text{odd}} \chi_{\text{sym}}^{Sp(m)} + f_{\text{even}} \chi_{\text{a-sym}}^{Sp(m)} + \chi_{\mathbf{28}}^{D_4} f_{\text{hyp}} \chi_{\text{fund}}^{Sp(m)}] \right)$$

$F_{0,0,m}$ の Cartan part

$$\text{Pexp} \left[m \frac{(z^{-1} - 1)(1 + xy)(1 - q)(1 - p)}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right] = \text{Pexp} \left[m \sum_{n_x, n_y=0}^{\infty} z^{-1} x^{n_x} y^{n_y} + \dots \right]$$

級数展開の仕方では、Fluctuation は 0 になりうる

eg) $F_{1,0,0}$ を y で級数展開

$$\begin{aligned} F_{1,0,0} &= P \exp \left[\sum_{n_z=0}^{\infty} x^{-1} y^0 z^{2n_z} + \mathcal{O}(y^{\frac{1}{2}}) \right] \\ &= y^0 \prod_{n_z=0}^{\infty} \frac{-xz^{-2n_z}}{1-xz^{-2n_z}} \propto x^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

① x で展開すると $F_{0,1,0}, F_{0,0,1} \rightarrow 0$ に,

② z で展開すると $F_{1,0,0}, F_{0,1,0} \rightarrow 0$ に

結論として、2 種類の simple-sum expansion が得られる

Simple-sum expansion

$$\begin{aligned} I_{D_4[N]} / I_{D_4[\infty]} &= \sum_{n_x=0}^{\infty} x^{n_x N} F_{n_x,0,0} \\ &= \sum_{n_x=0}^{\infty} z^{2n_z N} F_{0,0,n_z} \end{aligned}$$

Numerical test of x-y direction

① $I_{D_4[N]}/I_{D_4[\infty]} - \sum x^m F_{m,0,0} (z \rightarrow y \text{ として } x-y \text{ で展開})$

$\begin{array}{r} -4 \\ -57^* \\ -29^* \\ -1 \\ 27^* \\ 14 \\ 15 \\ 44 \\ 156 \\ 12 \\ 29^* \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -446 \\ -362^* \\ -3466^* \\ -282^* \\ -2121^* \\ -116^* \\ -1348^* \\ 52^* \\ -463^* \\ 164^* \\ 381^* \\ 232^* \\ 871^* \\ 188^* \\ 921^* \\ 53^* \\ -27^* \\ -28^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -7020 \\ -12482^* \\ -9402^* \\ -1462^* \\ -24201^* \\ -10264^* \\ -29429^* \\ -6162^* \\ -25756^* \\ -1298^* \\ -16465^* \\ 2462^* \\ -5473^* \\ 3574^* \\ 1769^* \\ 2164^* \\ 3620^* \\ 54 \\ 1724^* \\ -56^* \\ 165 \\ -4^* \\ -27^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -2 \\ -29^* \\ 27^* \\ 55^* \\ 16 \\ 83 \\ 163 \\ 220^* \\ 164 \\ 164 \\ 224^* \\ 1010^* \\ 114 \\ 678^* \\ 183^* \\ 103^* \\ 387^* \\ 114 \\ 678^* \\ 183^* \\ 103^* \\ 387^* \\ 114 \\ 678^* \\ 183^* \\ 103^* \\ 387^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -390 \\ -2337^* \\ -13193^* \\ -2339^* \\ -12184^* \\ -23433^* \\ -461^* \\ -12039^* \\ -314^* \\ 220^* \\ 933^* \\ 273^* \\ 1010^* \\ 224^* \\ 1060^* \\ 114 \\ 678^* \\ 183^* \\ 103^* \\ 387^* \\ 114 \\ 678^* \\ 183^* \\ 103^* \\ 387^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -26 \\ -282^* \\ -15^* \\ -226^* \\ -12^* \\ -5876^* \\ -758^* \\ -114^* \\ -454^* \\ -3154^* \\ -230^* \\ -1820^* \\ -26^* \\ -1^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -1400 \\ -7309^* \\ -12344^* \\ -48111^* \\ -1012^* \\ -27436^* \\ -2557^* \\ -2134^* \\ -60103^* \\ -16888^* \\ -51729^* \\ -9888^* \\ -37652^* \\ -636^* \\ -22111^* \\ -780^* \\ -10557^* \\ -3494^* \\ -24^* \\ -955^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -28242 \\ -32328^* \\ -28384^* \\ -49359^* \\ -27436^* \\ -2557^* \\ -2134^* \\ -60103^* \\ -16888^* \\ -51729^* \\ -9888^* \\ -37652^* \\ -636^* \\ -22111^* \\ -780^* \\ -10557^* \\ -3494^* \\ -24^* \\ -955^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -194^* \\ -30^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ 58^* \\ 26^* \\ 1^* \\ 1908^* \\ 80^* \\ 765^* \\ 2210^* \\ 194^* \\ 30^* \\ 1^* \\ 984^* \\ 185^* \\ 30^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 896 \\ 56400^* \\ 251105^* \\ 460^* \\ 3812^* \\ 17165^* \\ 17444^* \\ 156179^* \\ 17444^* \\ 765^* \\ 2210^* \\ 194^* \\ 30^* \\ 1^* \\ 984^* \\ 185^* \\ 30^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 56400 \\ 251105 \\ 460 \\ 3812 \\ 17165 \\ 17444 \\ 156179 \\ 17444 \\ 765 \\ 2210 \\ 194 \\ 30 \\ 1 \\ 984 \\ 185 \\ 30 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -2 \\ -154^* \\ -30^* \\ -1^* \\ -2^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -5122 \\ -64626^* \\ -1984^* \\ -28946^* \\ -450^* \\ -11314^* \\ -42^* \\ -36700^* \\ -2^* \\ -985^* \\ -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -64626 \\ -1984 \\ -28946 \\ -450 \\ -11314 \\ -42 \\ -36700 \\ -2 \\ -985 \\ -195 \\ -30 \\ -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$
$N = 1$	$m \leq 1$	$m \leq 2$	$m \leq 3$	$m \leq 4$

$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 55^* \\ 83^* \\ 86^* \\ 84 \\ 45 \\ 84 \\ 45 \\ 20^* \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -62 \\ -1399^* \\ -5934^* \\ -71^* \\ 4376 \\ 852^* \\ 234^* \\ 1414^* \\ 170^* \\ 1085^* \\ -2 \\ -27^* \\ -2 \\ -28^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -13496^* \\ -54838^* \\ -5934^* \\ -37583^* \\ 440^* \\ -19130^* \\ 4506^* \\ 3437^* \\ 5896^* \\ 8167^* \\ 2238^* \\ 6130^* \\ 119^* \\ 105 \\ -272^* \\ 245^* \\ -274^* \\ -430^* \\ -4^* \\ -162^* \\ -29^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 83^* \\ 111 \\ 88^* \\ 112 \\ 113^* \\ 113^* \\ 157 \\ 20^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -6 \\ -13418^* \\ -54130^* \\ -5616^* \\ -36875^* \\ 724^* \\ -18442^* \\ -37209^* \\ 974^* \\ 1204^* \\ 114^* \\ 707^* \\ 294^* \\ 6^* \\ 953^* \\ 194^* \\ 30^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -8 \\ -114^* \\ -456^* \\ -58^* \\ -2 \\ -1848^* \\ -1^* \\ -194^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -700 \\ -5165^* \\ -18764^* \\ -5318^* \\ -230^* \\ -1848^* \\ -765^* \\ -782^* \\ -10846^* \\ -56^* \\ -3659^* \\ 2096^* \\ 6838^* \\ 3192^* \\ -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -28670 \\ -92224^* \\ -18764^* \\ -48257^* \\ -10260^* \\ -45112^* \\ -406^* \\ -24672^* \\ -782^* \\ -10846^* \\ -56^* \\ -3659^* \\ 2096^* \\ 6838^* \\ 3192^* \\ -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 194^* \\ 30^* \\ 1^* \\ 985^* \\ 185^* \\ 30^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 2312^* \\ 26639^* \\ 454^* \\ 11312^* \\ 62^* \\ 3690^* \\ 2^* \\ 985^* \\ 185^* \\ 30^* \\ 1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 2312 \\ 26639 \\ 454 \\ 11312 \\ 62 \\ 3690 \\ 2 \\ 985 \\ 185 \\ 30 \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} -195^* \\ -30^* \\ -1^* \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$
$N = 2$	$m \leq 1$	$m \leq 2$	$m \leq 3$	$m \leq 4$

逆に, $AdS_3 \times S^5$ 上の 7-brane を考えれば, $O(N)$ CFT ($\tilde{D}_4[N]$) の GG expansion が得られる.

	0	1	2	3	X	Y	Z
D3	✓	✓	✓	✓			
7	✓	✓			✓	✓	✓

GG 上の CFT はいずれも $D_4[N]$

$D_4[N]$ と同様の議論により, GG expansion は Simple-sum で書ける

$\tilde{D}_4[N]$ の GG expansion

$$I_{\tilde{D}_4[N]} / I_{\tilde{D}_4[\infty]} = \sum_{n_x=0}^{\infty} x^{n_x} \sigma_x I_{D_4[n_x]}$$

Numerical test (2)

$$I_{\tilde{D}_4[N]}/I_{\tilde{D}_4[\infty]} - \sum x^m \sigma_x I_{D_4[m]} \quad (z \rightarrow y \text{ として } x-y \text{ で展開})$$

Figure 1 displays a 4x4 grid of plots showing the distribution of the number of nodes in the largest component of a network. The rows are labeled $N = 1, 2, 3, 4$ and the columns are labeled $m \leq 1, m \leq 2, m \leq 3, m \leq 4$. Each plot shows a distribution curve with a peak at $m=1$. The distributions become more complex and multi-modal as N increases. The x-axis is labeled m and the y-axis is labeled N .