ダイポールモーメントを保存する場の理論におけるフラクトンの記述とその有効理論について

京都大学基礎物理学研究所

中西泰一

本多正純氏，戎弘実氏との共同研究に基づく

本発表の概要

- X-cubeモデルと呼ばれる格子模型に現れるフラクトンと呼ばれる準粒子を記述する場の理論
  - Pretkoによるダイポールモーメントを保存する場の理論
  - Seiber, Shaoらによるsigma model-likeな場の理論（部分系対称性）
  - そのほかにも様々な場の理論的モデルがある
- ダイポールモーメントを保存する場の理論におけるいくつかの解析を行った
- ダイポールモーメントを保存する理論において，ヒッグスポテンシャルを導入し，場の期待値が十分大きいときの有効理論として，sigma model-likeな理論が得られることを示す.
  - フラクトンを記述する様々な理論を統一的にとらえるための一歩？

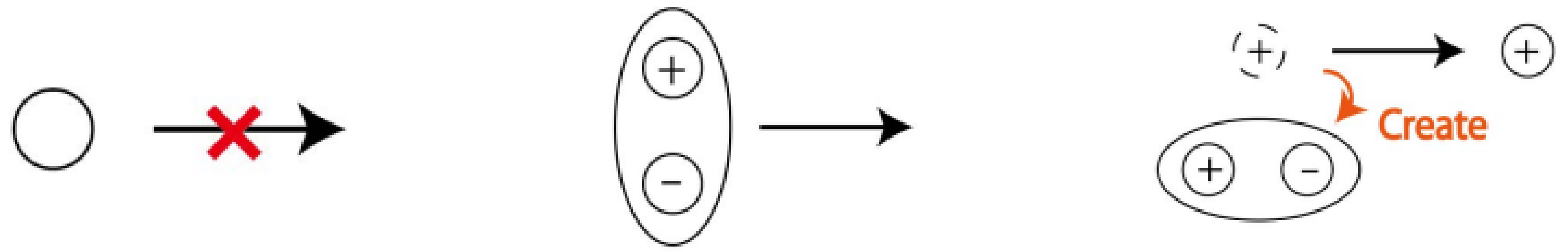
内容

- フラクトンとは？
- ダイポールモーメントを保存する場の理論の性質
- 大域的対称性とダイポール対称性の自発的破れ
- 対称性のゲージ化
- まとめと今後の展望

フラクトンとは？

- **単独で空間中を移動できない準粒子.**
- 格子スピンモデルの局所的励起として現れる.

最も有名な例（”X-cubeモデル”）



- ダイポールを組んで運動することは可能.
- 真空からダイポールを生成することで移動することは可能.

※さらに多重極モーメントを保存するようなモデルや，そもそも移動可能な束縛状態を持たないモデルもある.

フラクトンを考える動機

- 量子情報的な動機

  フラクトン的な励起を持ついくつかのモデルはエラーに対して強く，従来よりも多くのqubitを扱うことができる．[Vijay *et al.* 2016, Haah 2011]

  →量子コンピュータへの応用

- 物性的な動機

  いくつかのモデルの相は通常のトポロジカル相などとは異なり，多様体の葉層構造で特徴づけられる新しい相である．

  →物質の相に対する新しい分類

- 素粒子論的な動機（詳細は後述）

  フラクトンの場の量子論による記述を通して，既存の場の理論のクラスを超えた一般化や新しい概念が発見されてきた．[Seiberg-Shao 2020 *etc.*]

フラクトンへの素粒子論的な動機

- **これまでにない性質を持った場の理論**
  - 部分系対称性
    ゲージ対称性と大域的対称性の中間的な性質を持った新しいタイプの対称性
  - 葉層の場の理論
    位相的場の理論の一般化
    新しい数理物理理学を生み出す可能性
  - テンソルゲージ理論（ダイポールを保存する場の理論）
    一般化されたゲージ理論　閉じ込めなどを議論できる
- **テンソルゲージ理論と線形化重力理論との関係**
  対称性がbiform symmetryという概念でまとめられる[Hinterbichler *et al.* 2022]
- **弦理論の概念との関係**
  ホログラフィーとの関係やブレーンからの構成[Yan 2019, 2020, Geng *et al.* 2021]

内容

- フラクトンとは？
- ダイポールモーメントを保存する場の理論の性質
- 大域的対称性とダイポール対称性の自発的破れ
- 対称性のゲージ化
- まとめと今後の展望

ダイポールモーメントを保存する理論でのフラクトンの記述

- X-cubeモデルのフラクトンの特徴

単独で移動することができない
ダイポールを組むと移動することができる

- ダイポールモーメントを保存量として持つような場の理論を構成したい.

- 総電荷とダイポールモーメントは電荷密度分布ρを用いて以下のように書けるはずである.

$$Q = \int d^d x\, \rho, \qquad P^i = \int d^d x\, \rho x^i.$$

ダイポール対称性 [Pretko 2018]

- 以下のようなラグランジアンを考える

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \\
&= |\partial_t\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 - g\left|\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi\right|^2 \\
&- g'\{\Phi^{*2}\left(\Phi\partial_i\partial^i\Phi - \partial_i\Phi\partial^i\Phi\right) + \left(\Phi^*\partial_i\partial^i\Phi^* - \partial_i\Phi^*\partial^i\Phi^*\right)\Phi^2\}
\end{aligned}
$$

$$m, g, g' : \mathrm{const}$$

- このラグランジアンは時間微分項$\partial_t\Phi$, 空間微分項$\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi$からなる最も簡単な形のラグランジアン

ダイポール対称性

- このようにして構成したラグランジアンは以下の二つの対称性を持つ：
  - 大域的位相回転対称性

$$\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$$
$$\alpha\mathrm{: const}$$

  - ダイポール対称性

$$\Phi \to e^{i\lambda\cdot x}\Phi$$
$$\lambda\mathrm{: constant\ spatial\ vector}$$

*このことは空間微分項$\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi$が

$$\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi \to \left(e^{i\lambda\cdot x}\Phi\right)\partial_i\partial_j\left(e^{i\lambda\cdot x}\right) - \partial_i\left(e^{i\lambda\cdot x}\Phi\right)\partial_j\left(e^{i\lambda\cdot x}\right)$$
$$= e^{2i\lambda\cdot x}(\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi)$$

のように変換することからわかる.

対称性のネーターカレント

- 大域的位相回転対称性のネーターカレント

$\rho = i\{\Phi^* \partial_t \Phi - \partial_t \Phi^* \Phi\},$
$J^i = ig\partial_j \left\{\Phi^{*2}\left(\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \partial^i\Phi\partial^j\Phi\right) - \left(\Phi^*\partial^i\partial^j\Phi^* - \partial^i\Phi^*\partial^j\Phi^*\right)\Phi^2\right\}$

$$\partial_t \rho + \partial_i J^i = 0.$$

このカレント保存則は２つの空間の脚を持つ量を定義することで書き換えることができる.

$J^{ij} = ig\left\{\Phi^{*2}\left(\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \partial^i\Phi\partial^j\Phi\right) - \left(\Phi^*\partial^i\partial^j\Phi^* - \partial^i\Phi^*\partial^j\Phi^*\right)\Phi^2\right\}$

$$\partial_t \rho + \partial_i \partial_j J^{ij} = 0.$$

ダイポール対称性のネーターカレント

- ダイポール対称性のネーターカレントは大域的位相回転対称性のネーターカレントを用いて以下のように書くことができる.

$$\tilde{\rho}^k = x^k \rho,$$
$$\tilde{J}^{ki}$$
$$= x^k J^i - ig\delta_j^k \left\{ \Phi^{*2} \left(\Phi \partial^i \partial^j \Phi - \partial^i \Phi \partial^j \Phi \right) - \left(\Phi^* \partial^i \partial^j \Phi^* - \partial^i \Phi^* \partial^j \Phi^* \right) \Phi^2 \right\}$$

$$\partial_t \tilde{\rho}^k + \partial_i \tilde{J}^{ki} = 0$$

対応する保存量

- これらのネーターカレントに対応する保存量は

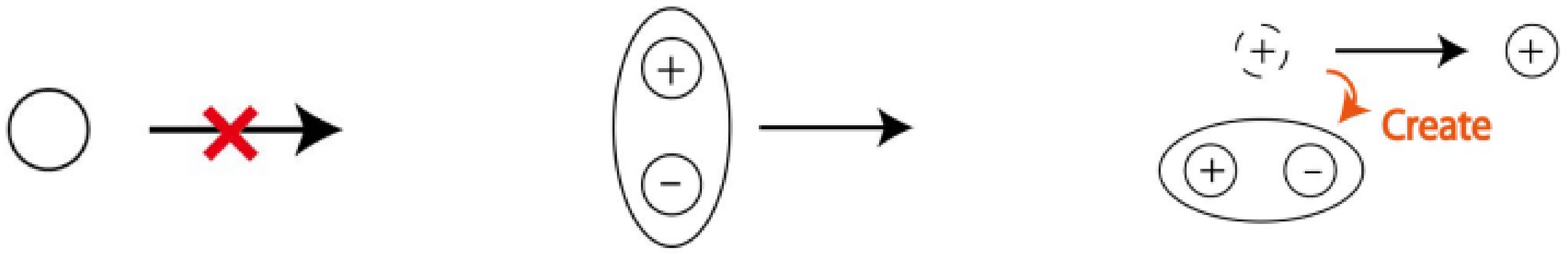
$$Q = \int d^d x \, \rho$$
$$P^k = \int d^d x \, \tilde{\rho}^k = \int d^d x \, x^k \rho$$

- これらの量はそれぞれ総電荷，ダイポールモーメントと解釈することができる．

フラクトン的振る舞い

- ダイポールモーメントが保存することからフラクトン的な振る舞いを読み取ることができる.
- 仮に荷電粒子が単独で移動したとすると，ダイポールモーメントの保存則を破ることになる.
- このことから，荷電粒子はダイポールを組むか，真空から新たなダイポールを生成することでしか移動することができない.

- この振る舞いはX-cubeモデルのフラクトンの特徴を再現する.



内容

- フラクトンとは？
- ダイポールモーメントを保存する場の理論の性質
- 大域的対称性とダイポール対称性の自発的破れ
- 対称性のゲージ化
- まとめと今後の展望

ダイポールを保存する理論におけるヒッグス機構

[Pretko 2018, Chen-Ye 2023, Ebisu-Honda-Nakanishi on-going work]

- ダイポール保存理論のラグランジアンにヒッグス項を加える：

$$\mathcal{L} = |\partial_t \Phi|^2 - m^2 |\Phi|^2 - g\left|\Phi \partial_i \partial_j \Phi - \partial_i \Phi \partial_j \Phi\right|^2 - g' \{ \Phi^{*2} \left(\Phi \partial_i \partial^i \Phi - \partial_i \Phi \partial^i \Phi\right) + \left(\Phi^* \partial_i \partial^i \Phi^* - \partial_i \Phi^* \partial^i \Phi^*\right) \Phi^2 \} - \lambda \left(|\Phi|^2 - \frac{1}{2} v^2 \right)$$

- このヒッグスポテンシャルは大域的位相回転対称性とダイポール対称性を自発的に破る.

ダイポールを保存する理論におけるヒッグス機構

- 複素スカラー場Φを，実スカラー場σ，ϕを用いて

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\sigma)e^{i\phi},$$

のように書き直す．この時ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\sigma)^2 + \frac{1}{2}(v+\sigma)^2(\partial_t\phi)^2 - \frac{m^2}{2}(v+\sigma)^2 - \frac{g}{4}\left\{\left((v+\sigma)\partial_i\partial_j\sigma - \partial_i\sigma\partial_j\sigma\right)^2 + (v+\sigma)^4\left(\partial_i\partial_j\phi\right)^2\right\} - \frac{g'}{4}(v+\sigma)^2\left\{2(v+\sigma)\partial_i\partial^i\sigma - 2\partial_i\sigma\partial^i\sigma\right\} - \lambda\left(v\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2$$

ダイポールを保存する理論におけるヒッグス機構

- 実スカラー場σの質量は$\sqrt{m^2 + 2\lambda v^2}$.
- パラメータvを十分大きくとると，σの質量が大きくなるので，σについての積分を行ってしまうことができ，ϕの有効的なラグランジアンが得られる.

$$\mathcal{L} = \frac{v^2}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{gv^4}{4}\left(\partial_i\partial_j\phi\right)^2.$$

- このラグランジアンは場の２次であり，以下のような場のシフト対称性を持っている：

$$\phi \to \phi + \alpha, \qquad \phi \to \phi + \lambda \cdot x.$$

保存量の代数と自発的対称性の破れ

- 大域的対称性の保存量をQ，ダイポール対称性をQ_iとすると，これらは
$$\left[iP_i, Q_j\right] = \delta_{ij} Q$$
という代数を満たす．ここでP_iは並進対称性の保存量．

- このことから，仮に大域的対称性が自発的に破れたとすると，ダイポール対称性と並進対称性のどちらかは破れていなければならないことが帰結される．
$$\langle\Omega|Q|\Omega\rangle \neq 0 \Rightarrow \langle\Omega|(iP_iQ_i - iQ_iP_i)|\Omega\rangle \neq 0$$
$$\Rightarrow \langle\Omega|P_i|\Omega\rangle \neq 0 \text{ or } \langle\Omega|Q_i|\Omega\rangle \neq 0$$

- 今回のヒッグス項は大域的対称性とダイポール対称性の両方を破る．ダイポール対称性だけを破るような項は作れるか？

内容

- フラクトンとは？
- ダイポールモーメントを保存する場の理論の性質
- 大域的対称性とダイポール対称性の自発的破れ
- 対称性のゲージ化
- まとめと今後の展望

対称性のゲージ化 [Ebisu-Honda-Nakanishi on-going work]

- 通常の大域的対称性のゲージ化

- ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \rho A_t + J^i A_i - (A_t)^2 - \left(\partial_j A_i\right)^2$$

このラグランジアンはゲージ変換

$$\Phi \to e^{i\alpha}\Phi, \qquad A_t \to A_t + \partial_t \alpha, \qquad A_i \to A_i + \partial_i \alpha$$

のもとで不変

- ゲージ場を改めて

$$A_t, \qquad A_{ij} := \partial_i A_j$$

$$A_t \to A_t + \partial_t \alpha, \qquad A_{ij} \to A_{ij} + \partial_i \partial_j \alpha$$

と定義する.

対称性のゲージ化

- ゲージ化されたラグランジアンは元の微分を共変微分に置き換えたものに一致する

$$\partial_t\Phi - A_t\Phi, \qquad \Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi - A_{ij}\Phi^2$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\\&= |(\partial_t - iA_t)\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 - g\left|\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi - iA_{ij}\Phi^2\right|^2\\&- g'\left\{\Phi^{*2}\left(\Phi\partial_i\partial_j\Phi - \partial_i\Phi\partial_j\Phi - iA_{ij}\Phi^2\right)\right.\\&\left.+\left(\Phi^*\partial_i\partial_j\Phi^* - \partial_i\Phi^*\partial_j\Phi^* + iA_{ij}\Phi^{*2}\right)\Phi^2\right\}\end{aligned}$$

- ダイポール対称性のカレントをゲージ場とカップリングさせることでの対称性のゲージ化を行うことはできるか？

内容

- フラクトンとは？
- ダイポールモーメントを保存する場の理論の性質
- 大域的対称性とダイポール対称性の自発的破れ
- 対称性のゲージ化
- まとめと今後の展望

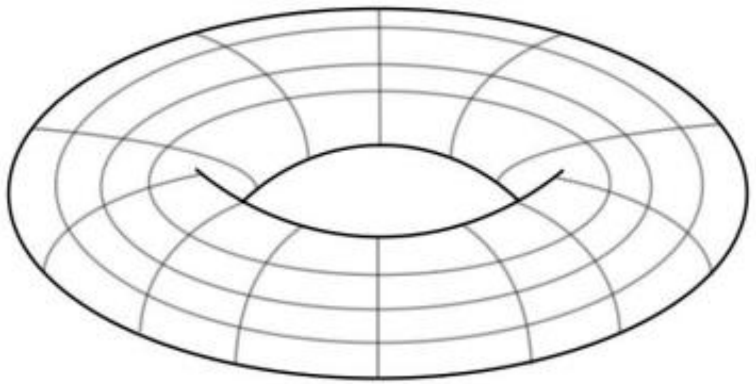
まとめと今後の展望

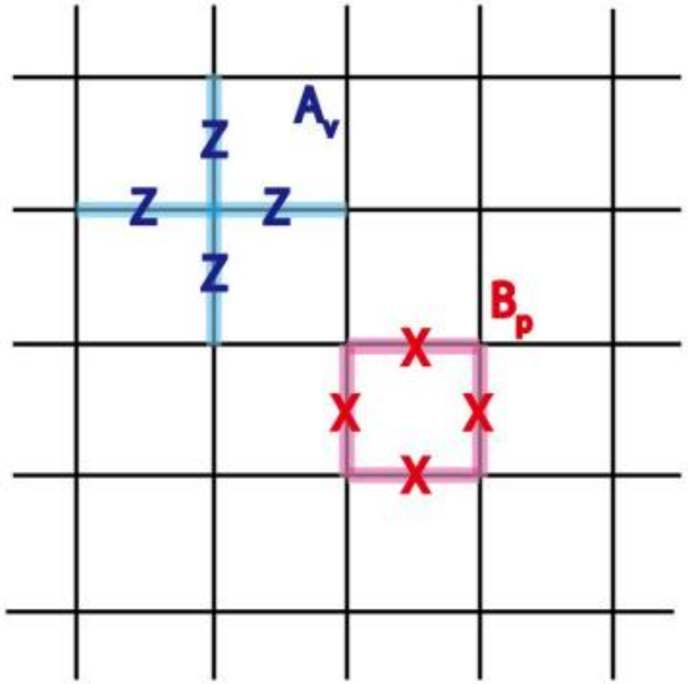
- 近年，素粒子論を含む様々な分野においてフラクトンと呼ばれるタイプの準粒子が注目を集めている．
- フラクトンの中でも特に注目されているX-cubeモデルと呼ばれる理論の特徴を再現するように，ダイポールモーメントを保存する理論が作られた．
- ダイポールモーメントを保存する理論における対称性の自発的破れを考えることで，空間微分の形が通常とは異なる実スカラー理論が得られることを見た．

- 大域的対称性を保ったままダイポール対称性だけを自発的に破るようなポテンシャル項を見つけられるか？
- ダイポール対称性のゲージ化の手続きはどうなるか？

BACK UP SLIDES

2D Toric Code





$X := \sigma_x, \quad Y := \sigma_y, \quad Z := \sigma_z$

- Square lattice with periodic boundary condition
- Qubits on each edge
- Hamiltonian

$$H = -\sum_v A_v - \sum_p B_p$$

2D Toric Code

- $[A_v, A_{v'}] = [A_v, B_p] = [B_p, B_{p'}] = 0$
- $A_v^2 = B_p^2 = 1$

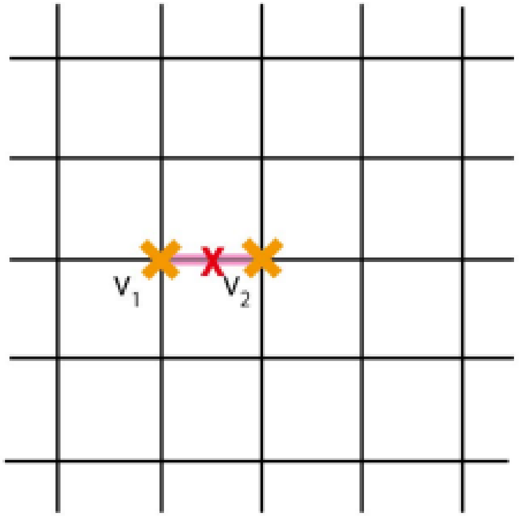
- The Ground states of the toric code are +1 eigenstates of all the A_v's and B_p's.

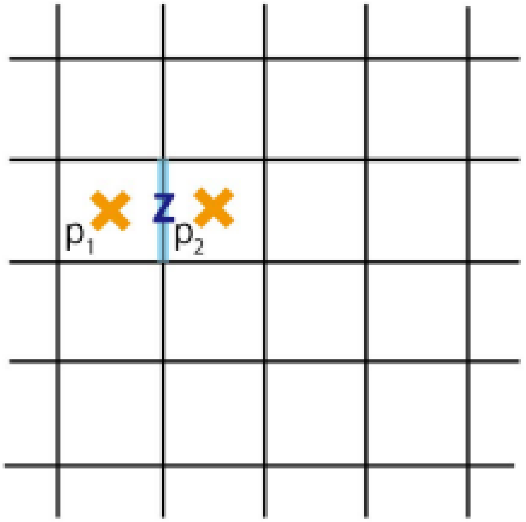
- One of such states can be constructed easily:

$$|\Omega\rangle \propto \prod_p \left(1 + B_p\right) |0 \cdots 0\rangle$$

2D Toric Code

- If one act a X or Z operator on a certain edge, it result the rise of the energy because such X or Z operator does not commute with edge or plaquette operators in the Hamiltonian.

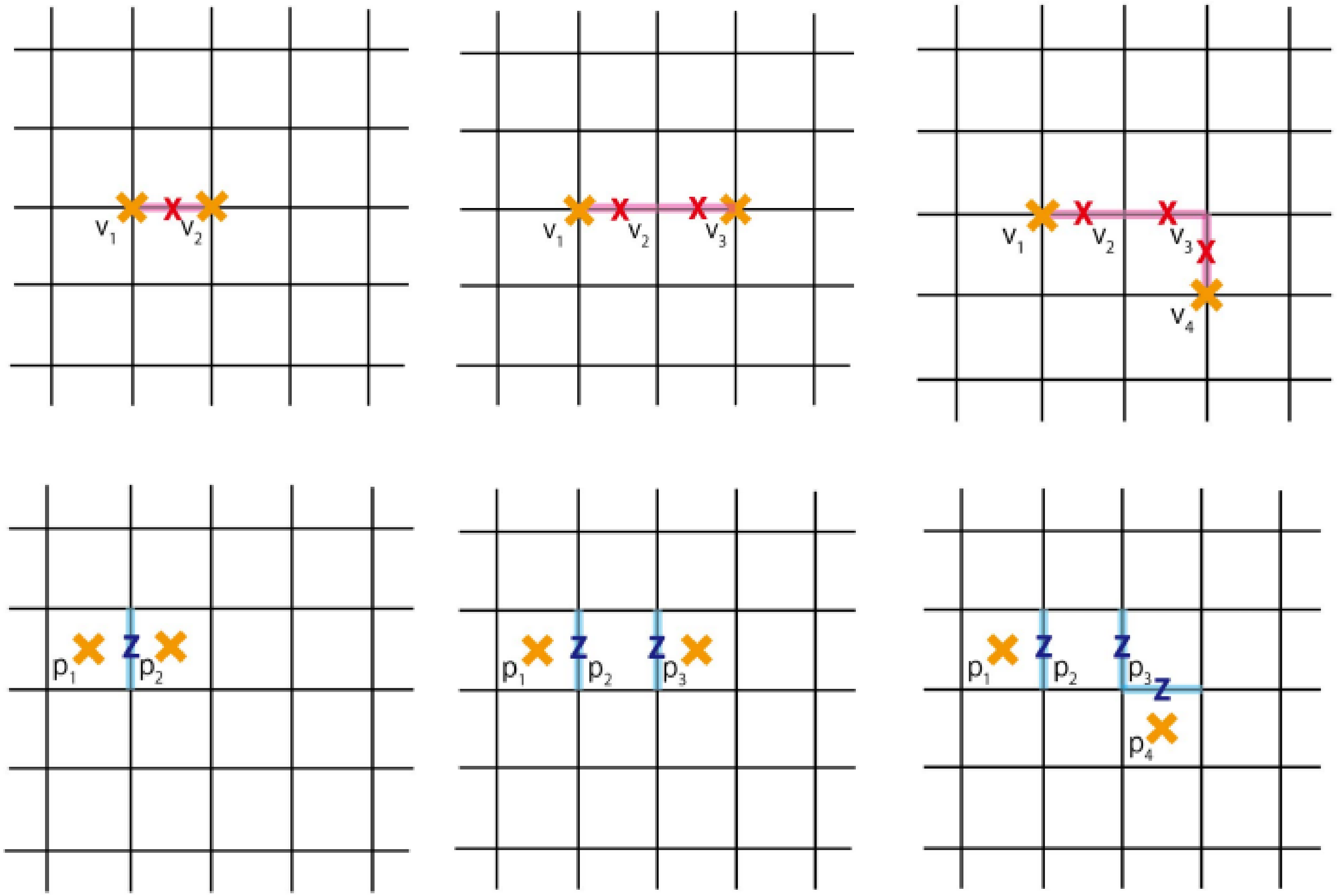




×: energy excitation

(The eigenvalues of corresponding vertex or plaquette operators turn to -1)

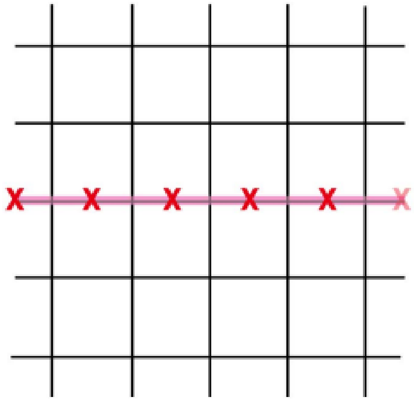
2D Toric Code



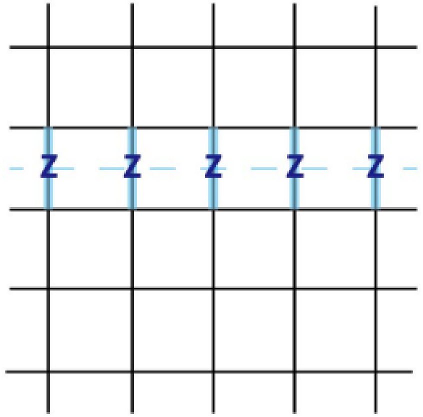
- We can deform the excitation without raising up the energy any more by successively multiplying X or Z operators.
- We can recognize the excitations in the endpoints of these string operators as (quasi-)particles.

2D Toric Code

- If two quasi-particles are carried to the same vertex (plaquette), the excitations are annihilated



X_{l1}



Z_{l1}

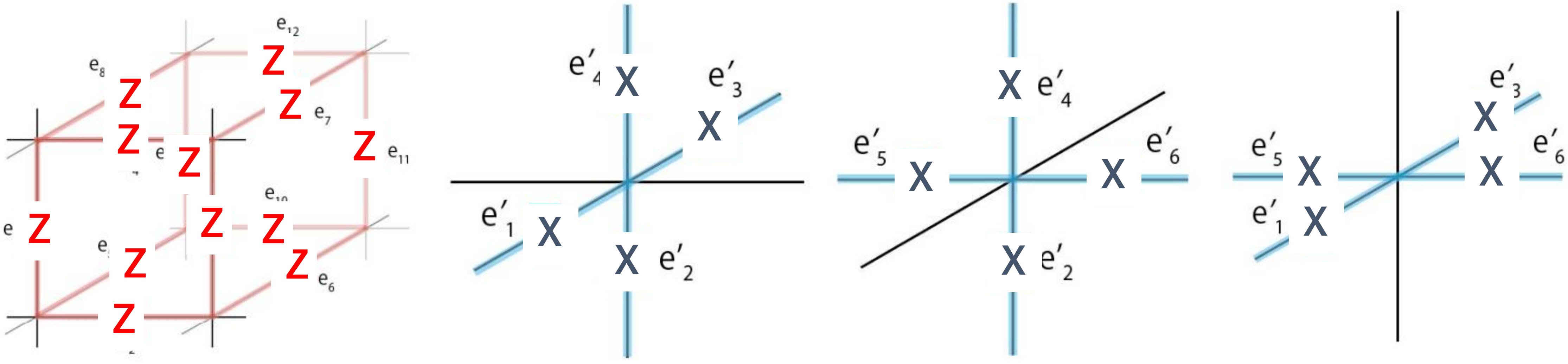
- Ground state degeneracy

Non-trivial X- or Z-loop operators map ground states to ground states.

$X_{l1}Z_{l2} = -Z_{l2}X_{l1},\ X_{l2}Z_{l1} = -Z_{l1}X_{l2}$, other operators commute

They acts on GS's like 2-qubit Pauli operators $\Rightarrow$ $GSD = 2^2$

X-cube Model



- Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -\sum_{+} X^{+} - \sum_{\square} Z^{\square}$$

One of the 3D generalizations of 2D toric code

X-cube Model

- $[X^{+}, X^{+\prime}] = [X^{+}, Z^{\square}] = [Z^{\square}, Z^{\square\prime}] = 0$
- ${X^{+}}^{2} = {Z^{\square}}^{2} = 1$

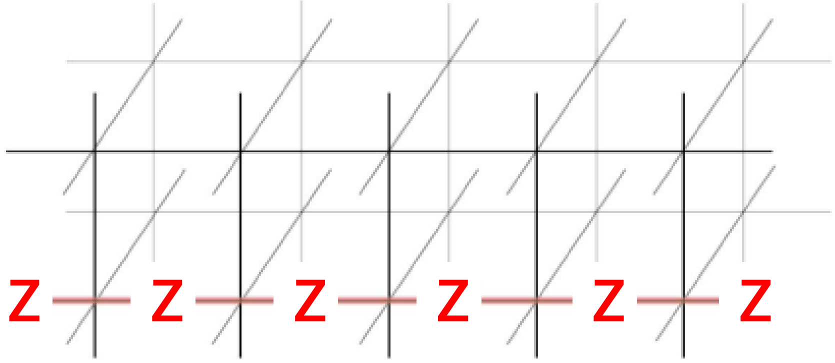
- The ground states of 3D toric code are +1 eigenstates of all the X^{+}'s and $Z^{\square}$'s.

- One of the ground states can be constructed easily:

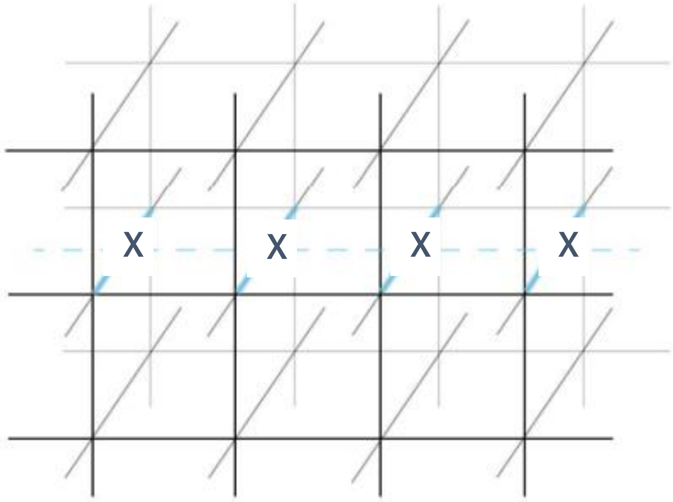
$$|\Omega\rangle \propto \prod_{*} (1 + X^{+}) |0 \cdots 0\rangle$$

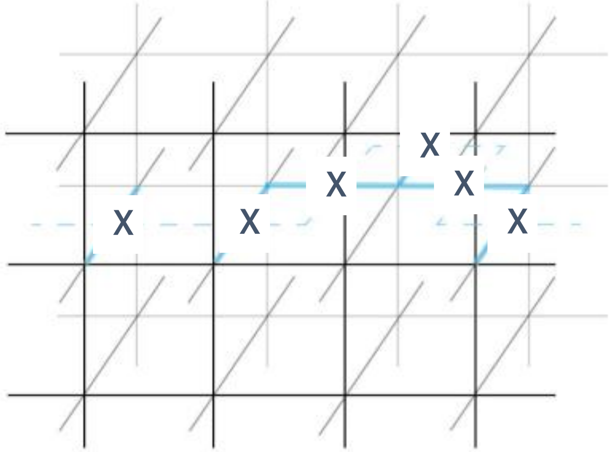
X-cube Model

- Non-trivial rigid loop operators map ground states to ground states.



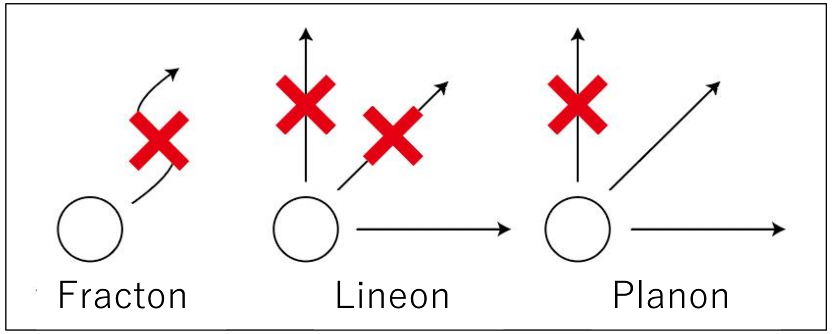
- Non-trivial loop operators embedded in a certain plane map ground states to ground states.



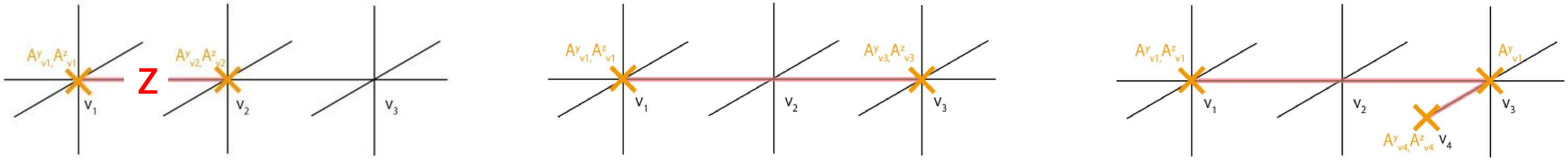


$$GSD = 2^{2L_x+2L_y+2L_z-3}$$

Fracton, Linenon and Planon



- Lineon: the endpoint of rigid string operators cannot bend without increasing the energy.



- Fracton: the corner of membrane operators cannot move alone without increasing the energy.

- Planon: dipole of lineons or fractons can only move in a plane.