$U(1)\times U(1)$ ゲージ理論における非可逆的対称性

嶋守 聡一郎

大阪大学 素粒子理論研究室

名古屋 雄大氏との共同研究に基づく [To appear]

@場の理論と弦理論 (2023/08/04) ポスターセッション

トークの流れ

1. 導入
2. Half-space gaugingに基づく
   非可逆的対称性演算子の構成
3. 2つのコンパクトボソン系における非可逆的対称性
4. まとめ
5. 展望

1. 導入

◆通常の対称性 (Ordinary symmetry)

Noether theorem:

$$Q(M^{d-1}) = \int_{M^{d-1}} j$$

$$\Longrightarrow \quad \text{対称性演算子:} \quad U_g(M^{d-1}) = e^{\mathrm{i}gQ(M^{d-1})}$$

対称性演算子 $U_g(M^{d-1})$ の重要な性質

① $U_g(M^{d-1})$：トポロジカル

$$U_g(M^{d-1}) = U_g(M'^{d-1})$$

② 群構造がある:

- ➢ 結合則　$U_g(M^{d-1}) \times U_{g'}(M^{d-1}) = U_{gg'}(M^{d-1})$
- ➢単位元の存在
- ➢逆元の存在　$U_g(M^{d-1}) \times U_g^{-1}(M^{d-1}) = \mathbf{1}$

◆非可逆的対称性 (Non-invertible symmetry)

$\mathcal{D}_g(M^{d-1})$：非可逆的対称性演算子

① $\mathcal{D}_g(M^{d-1})$:トポロジカル　$\mathcal{D}_g(M^{d-1}) = \mathcal{D}_g(M'^{d-1})$

②

- 結合則　$\mathcal{D}_g(M^{d-1}) \times \mathcal{D}_{g'}(M^{d-1}) = \mathcal{D}_{gg'}(M^{d-1})$
- 単位元の存在
- ~~逆元の存在~~　$\mathcal{D}_g(M^{d-1}) \times \mathcal{D}_g^\dagger(M^{d-1}) \neq \mathbf{1}$

◆ 最近の発展 ~非可逆的対称性~

- RGフローの制限 [C. Chang, Y. Lin, S. Shao, Y. Wang, X. Yin, 2018; …]

- 4次元における非可逆的対称性の発見 (Duality defect)

  [M. Koide, Y. Nagoya, S. Yamaguchi 2021;
  Y. Choi, C.Cordova, P. Hsin, H.Lam, S. Shao, 2021;
  J. Kaidi, K. Ohmori, Y. Zheng, 2021;
  Y. Hayashi, Y. Tanizaki, 2022;
  Y. Choi, C. Cordova, P. Hsin, H. Lam, S. Shao, 2022; …]

Half-space gauging が鍵！

トークの流れ

~~1. 導入~~

2. Half-space gaugingに基づく
非可逆的対称性演算子の構成

3. 2つのコンパクトボソン系における非可逆的対称性

4. まとめ

5. 展望

2. Half-space gaugingに基づく 非可逆的対称性演算子の構成

[Y. Choi, C. Cordova, P. Hsin, H.Lam, S. Shao, 2021; J. Kaidi, K. Ohmori, Y. Zheng, 2021]

簡単のため, 2次元コンパクトボソン模型を扱う.

(注) 4次元純粋ゲージ理論の議論と本質的に同じ.

$$\boxed{S = \frac{R^2}{4\pi}\int_{M_2} d\phi \wedge \star d\phi \quad , \quad \phi \sim \phi + 2\pi}$$

$\Longrightarrow$ 非可逆的対称性をどう作るか?

$$S = \frac{R^2}{4\pi}\int_{M_2} d\phi \wedge \star d\phi \quad , \quad \phi \sim \phi + 2\pi$$

◆対称性

➢ $\mathrm{U}(1)^{(\mathrm{s})}$ シフト対称性： $\phi \mapsto \phi + \alpha$

電荷演算子: $V_n = e^{in\phi} \qquad n \in \mathbb{Z}$

$$V_n \mapsto e^{in\alpha} V_n$$

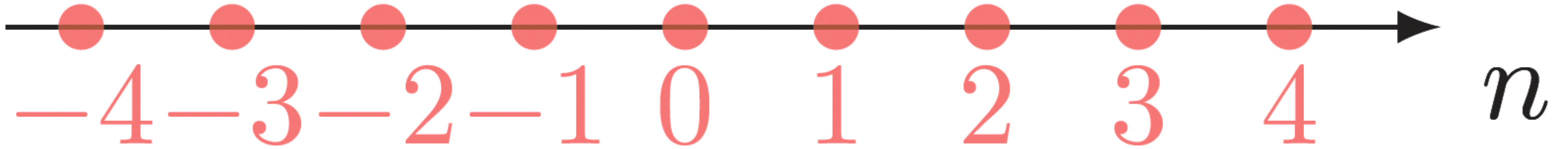
➢ $\mathrm{U}(1)^{(\mathrm{w})}$ トポロジカル対称性： $d(d\phi) = 0$

◆T 双対性

$$R \mapsto \frac{1}{R}$$

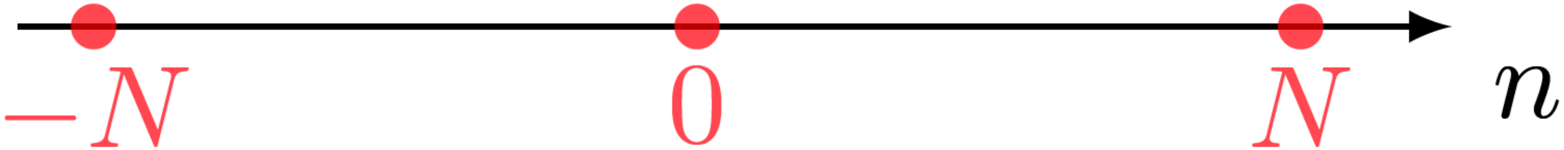
◆非可逆的対称性の構成法

Step 1. $\mathbb{Z}_N \subset \mathrm{U}(1)^{(\mathrm{s})}$ をゲージ化



$e^{\mathrm{i}n\phi}$ $\quad \phi \sim \phi + 2\pi$

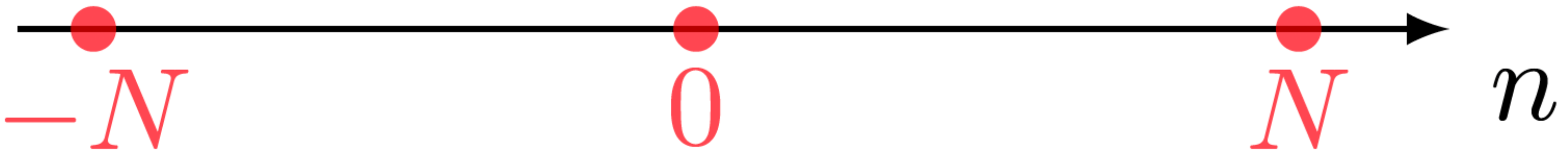
$\Downarrow \qquad \Downarrow$



$e^{\mathrm{i}Nn'\phi}$ $\quad n' \in \mathbb{Z}$

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{N}$$

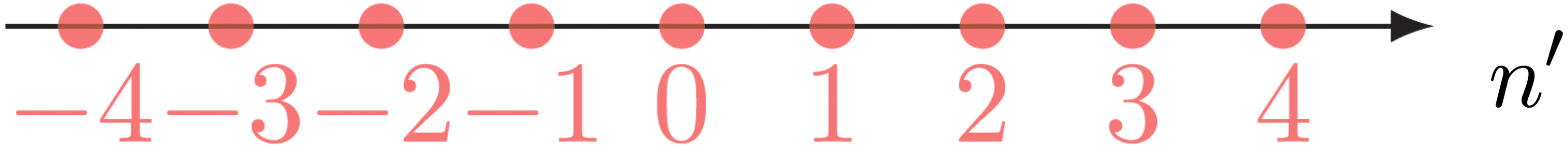
Step 2. 荷電格子のリスケール



$$e^{\mathrm{i}Nn'\phi} \qquad n' \in \mathbb{Z}$$

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{N}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$



$$e^{\mathrm{i}n'\phi'} \quad \phi' = N\phi$$

$$\phi' \sim \phi' + 2\pi$$

荷電格子が元に戻った!

Step 3. T 双対性

新たな場の基底 ϕ' で見た元のコンパクトボソンの作用:

$$S = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{N}\right)^2 \int_{M_2} d\phi' \wedge \star d\phi' \qquad , \qquad \phi' \sim \phi' + 2\pi$$

最後にT 双対性を用いて元の半径に戻す.

$$\frac{R}{N} \mapsto \frac{N}{R} = R \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{N}$$

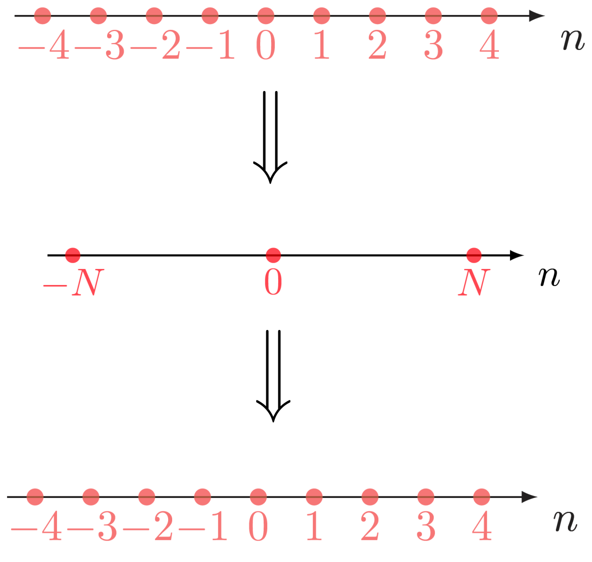
◆ これまでのまとめ

➢ コンパクトボソン半径を $R = \sqrt{N}$ のように取っておくと

Step 1. $\mathbb{Z}_N \subset \mathrm{U}(1)^{(\mathrm{s})}$ をゲージ化

Step 2. 荷電格子のリスケール

Step 3. T 双対性



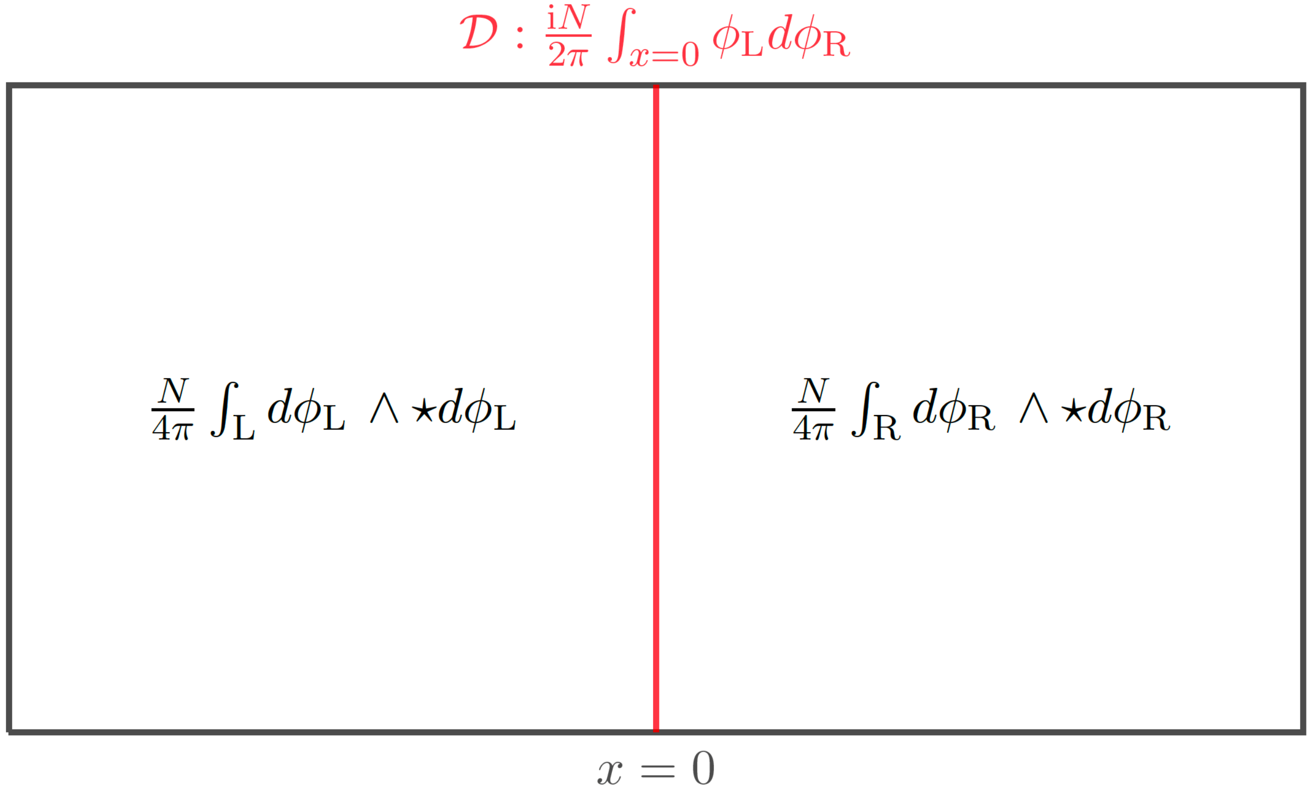
の3操作の前後で理論は等価になる.

➢ Step 1 でゲージ化という操作を含んでいるので,
以上の操作は非可逆である.

実は, 以上の操作は空間を2つに分けて, duality defectを挿入することで実現できる.

$$S = \frac{N}{4\pi}\int_{\mathrm{L}} d\phi_{\mathrm{L}} \wedge \star d\phi_{\mathrm{L}} + \frac{N}{4\pi}\int_{\mathrm{R}} d\phi_{\mathrm{R}} \wedge \star d\phi_{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{i}N}{2\pi}\int_{x=0} \phi_{\mathrm{L}} d\phi_{\mathrm{R}}$$

Duality defect $\mathcal{D}$



◆ フュージョン則

$$\eta \times \mathcal{D} = \mathcal{D} \times \eta = \mathcal{D}$$

$$\eta^N = 1$$

η: $\mathbb{Z}_N \subset \mathrm{U}(1)^{(\mathrm{s})}$の生成子

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D} = \sum_{i=0}^{N-1} \eta^i$$

コメント: 数学的には**Tambara-Yamagami**圏と同型

トークの流れ

1. ~~導入~~

2. ~~Half-spaceに基づく~~
~~非可逆的対称性演算子の構成~~

3. 2つのコンパクトボソン系における非可逆的対称性

4. まとめ

5. 展望

3. 2つのコンパクトボソン系における非可逆的対称性

[Y. Nagoya, S.S, to appear]

扱う模型

$$S[\phi^1, \phi^2] = \frac{1}{4\pi} \int_{M_2} G_{IJ}\, d\phi^I \wedge \star d\phi^J \quad , \qquad I, J = 1\,,2$$

$$G_{IJ} = \begin{pmatrix} R_1^2 & R_{12}^2 \\ R_{12}^2 & R_2^2 \end{pmatrix} \qquad \phi^I \sim \phi^I + 2\pi$$

◆研究で分かったこと

- Half-space gaugingの手法を用いて,
  2種類のコンパクトボソン系特有の新たなduality defectを構成した.

- 構成したduality defectのフュージョン則を計算し,
  Tambara-Yamagami 圏に属さない代数が得られた.

◆対称性 $\mathrm{U}(1)_1^{(\mathrm{s})} \times \mathrm{U}(1)_2^{(\mathrm{s})}$: $\phi^1 \mapsto \phi^1 + \xi_1 \quad , \quad \phi^2 \mapsto \phi^2 + \xi_2$

電荷演算子 $V_{n_1, n_2} := e^{\mathrm{i} n_1 \phi^1 + \mathrm{i} n_2 \phi^2}$

今の場合，２つのシフト対称性を混ぜるようにゲージ化を行うことができる.

$$(\mathbb{Z}_N^{[q]})_{\mathrm{mixed}} \subset \mathrm{U}(1)_1^{(\mathrm{s})} \times \mathrm{U}(1)_2^{(\mathrm{s})}$$

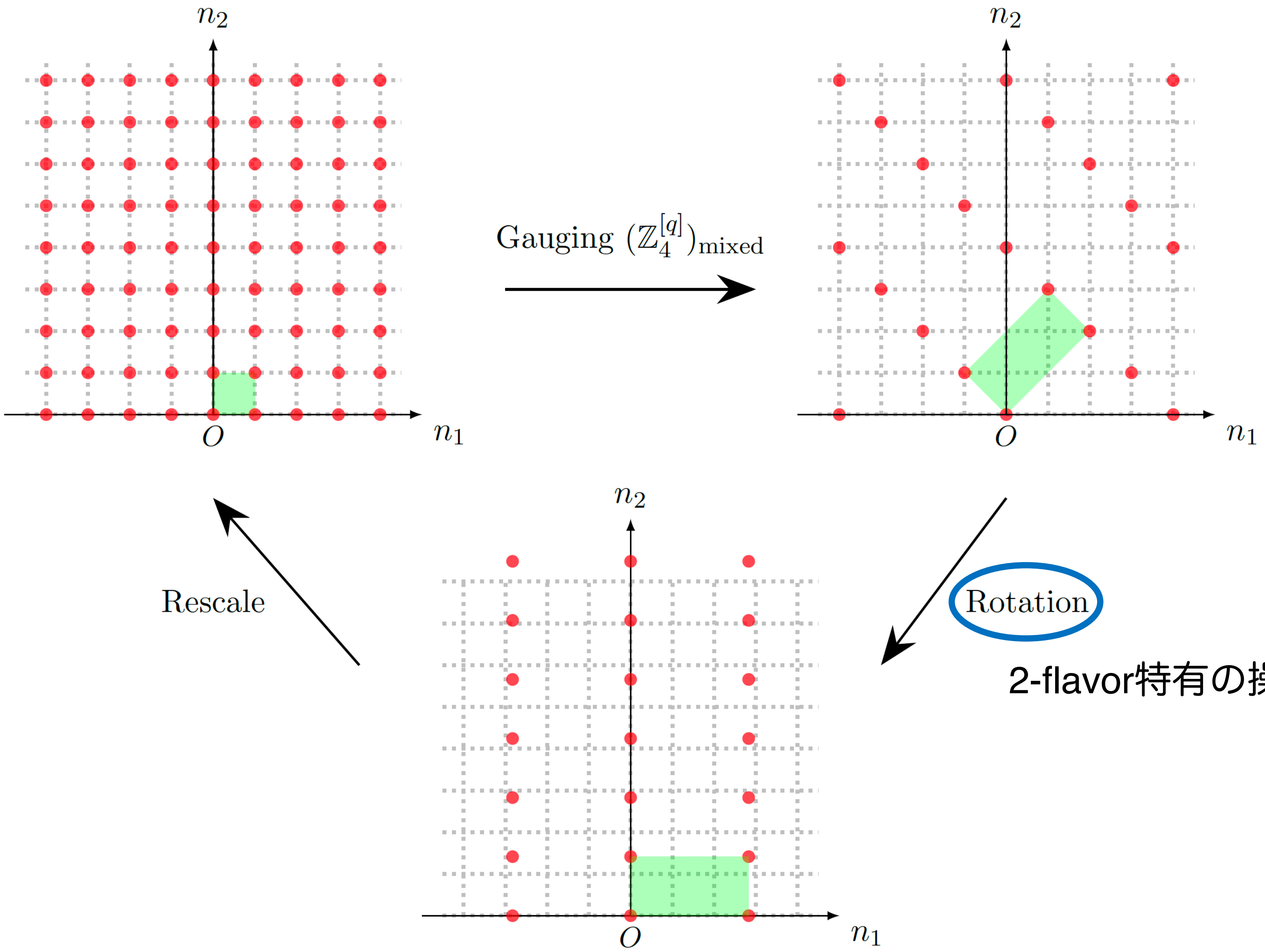
$$(\mathbb{Z}_N^{[q]})_{\mathrm{mixed}} = \langle\, e^{\mathrm{i}2\pi \frac{p^1}{N}}, e^{\mathrm{i}2\pi \frac{p^2}{N}} \,\rangle$$

(注) $p^1 = 0$ or $p^2 = 0$ の場合は
1つのコンパクトボソンのゲージ化
に帰着する.

◆ゲージ化条件

$$p^1 n_1 + p^2 n_2 = 0 \mod N$$

◆荷電格子の遷移 $(N, p^1, p^2) = (4, 1, 1)$



2-flavor特有の操作！

◆ Duality defectの構成

$$S = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{L}} G^{*}_{IJ}\, d\phi^{I}_{\mathrm{L}} \wedge \star d\phi^{J}_{\mathrm{L}} + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{R}} G^{*}_{IJ}\, d\phi^{I}_{\mathrm{R}} \wedge \star d\phi^{J}_{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=0} K_{IJ}\, \phi^{I}_{\mathrm{L}}\, d\phi^{J}_{\mathrm{R}}$$

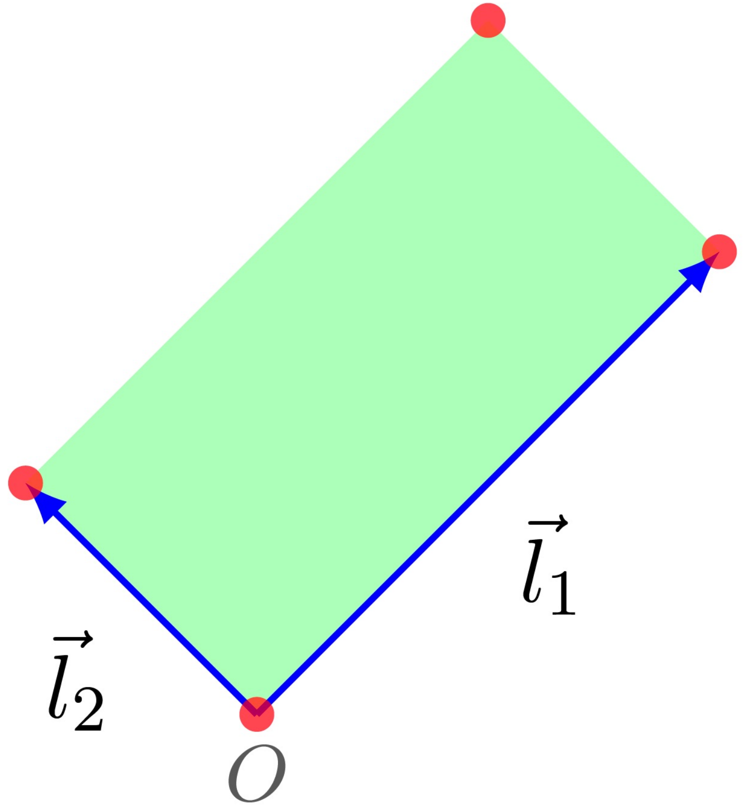
Duality defect $\mathcal{D}$

➢ 行列

$$K_{IJ} = (\vec{l}_1, \vec{l}_2)$$

➢ 自己双対条件

$$G^{*} = K^{\mathrm{T}}\, G^{*\,-1}\, K$$



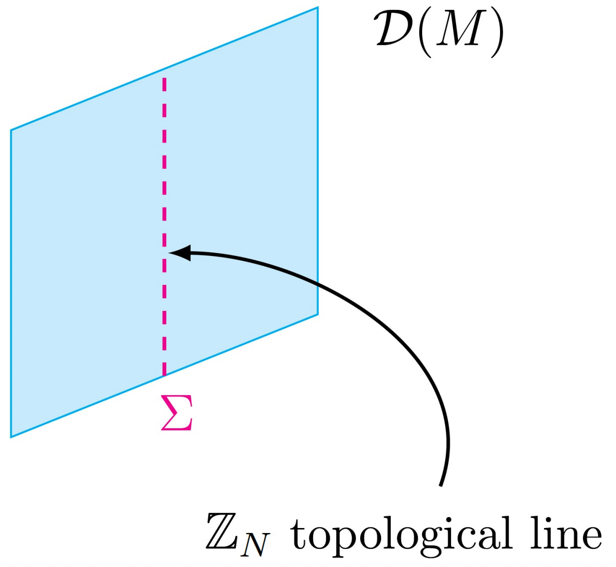
◆ フュージョン則　フュージョン則の詳細は論文を参照してください.

代数を閉じさせるために, duality defect $\mathcal{D}$ にトポロジカル対称性演算子がくっついたdefect $\mathcal{D}^s_{\vec{p}}(\Sigma, M)$ を定義する;

$$\mathcal{D}^s_{\vec{p}}(\Sigma, M) := \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\, s\, p^J K_{IJ}}{N}\int_\Sigma d\phi^I_{\mathrm{L}}\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}K_{IJ}\int_M \phi^I_{\mathrm{L}}\, d\phi^J_{\mathrm{R}}\right] \qquad s = 0, 1, \cdots N-1$$

$$\eta_{\vec{p}} \times \mathcal{D}^s_{\vec{p}} = \mathcal{D}^s_{\vec{p}}$$

$$\mathcal{D}^s_{\vec{p}} \times \eta_{\vec{p}} = \mathcal{D}^{s+1}_{\vec{p}}$$



トークの流れ

1. ~~導入~~

2. ~~Half-spaceの gaugingに基づく~~
~~非可逆的対称性演算子の構成~~

3. ~~2つのコンパクトボソン系における非可逆的対称性~~

4. まとめ

5. 展望

4. まとめ

- Half-space gaugingの手法を用いて,
  2種類のコンパクトボソン系特有の新たなduality defectを構成した.

$$\mathcal{D}\ :\quad \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=0} K_{IJ}\,\phi^I_{\mathrm{L}}\,d\phi^J_{\mathrm{R}}$$

- 構成したduality defectのフュージョン則を計算し,
  Tambara-Yamagami 圏に属さない代数が得られた.

5. 展望

- ダイナミクスへの制限 [Y. Nagoya, S.S, work in progress]

- 長方形以外の格子に対する非可逆的対称性演算子の構成
  [Y. Nagoya, S.S, work in progress]

- 弦理論コンパクト化への応用