Magnetic operators in 2D compact scalar field theories on the lattice

Soma Onoda(Kyushu U.)
based on arXiv:2304.14815 [hep-lat]
with Motokazu Abe, Hiroshi Suzuki(Kyushu U.)
Okuto Morikawa(Osaka U.), Yuya Tanizaki(YITP)

「場の理論と弦理論 2023」,8/4 2023(online)

Motivation

・QFTは連続無限自由度の量子論

➡ 具体的な計算をしようとすると発散を含む。➡ 正則化

格子正則化：ゲージ対称性を保ち、非摂動的で厳密な枠組みを提供。

我々の興味：理論にトポロジカル項（θ項）を含む物理。

一般化対称性に付随する't Hooft anomalyの議論において
このトポロジカル項が重要な場合がある。

[Gaiotto, et al, 2017]

やったこと

・２D compact scalar理論において、admissibility conditionと consistentなmagnetic operator (monopole)を格子上で定義した。 [Lüscher, 1982]

・２D Single compact scalar理論における混合't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

・２D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。

・２D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

Single compact scalar field

連続理論

Action: $\dfrac{R^2}{4\pi}\displaystyle\int_{M_2} d\phi \wedge \star d\phi$ （M_2:compact manifold, $\phi(x) \sim \phi(x) + 2\pi$ ）

この理論には$U(1)_{(e)} \times U(1)_{(m)}$ <u>0-form global symmetry</u>が存在。

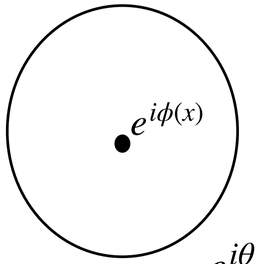
保存カレントは　　(ϕのshift symmetry（とそのdual））

$$j^{(e)}(x) \equiv -\, i \star \frac{R^2}{2\pi} d\phi(x), \quad j^{(m)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi} d\phi(x),$$

保存則は、EoMと、Bianchi恒等式に対応。

$U(1)_{(e)}$に対するcharged objectは、$e^{i\phi(x)}$（wilson loopのアナロジー）

$$\langle e^{i\theta\int_{S^1} j^{(e)}} e^{i\phi(x)}\rangle = \langle$$



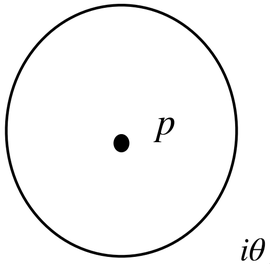
$$\rangle = e^{i\theta}\langle e^{i\phi(x)}\rangle$$

$e^{i\theta\int_{S^1} j^{(e)}}$(shrinkできる。)

$U(1)_{(m)}$に対するcharged objectは、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1_p} d\phi = 1$　なる場所p

(S^1_pは場所p周りを一周するS^1)

$$\langle e^{i\theta\int_{S^1_p} j^{(m)}} M(p)\rangle = \langle$$



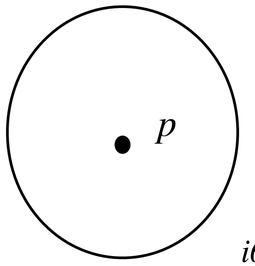
$$\rangle = e^{i\theta}\langle M(p)\rangle$$

$e^{i\theta\int_{S^1_p} j^{(m)}}$(shrinkできる。)

$U(1)_{(m)}$に対するcharged objectは、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1_p} d\phi = 1$　なる場所p

(S^1_pは場所p周りを一周するS^1)

$$\langle e^{i\theta\int_{S^1_p} j^{(m)}} M(p)\rangle = \langle$$



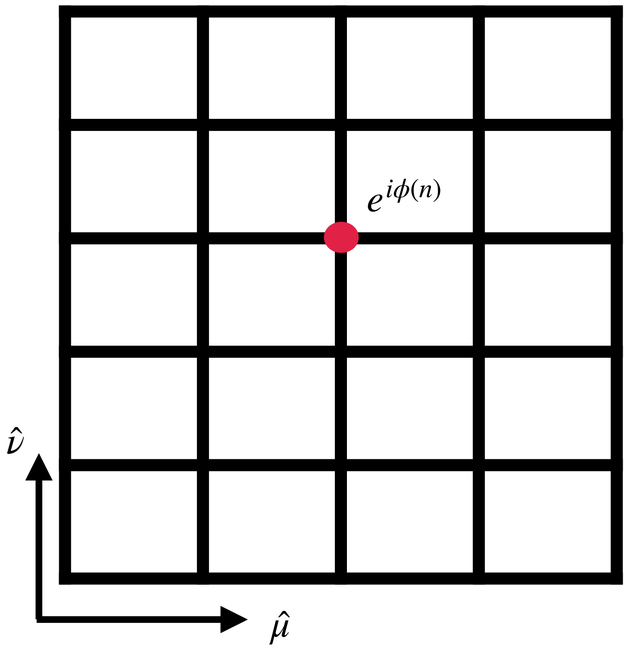
$$\rangle = e^{i\theta}\langle M(p)\rangle$$

$e^{i\theta\int_{S^1_p} j^{(m)}}$(shrinkできる。)

これをlatticeの言葉で定式化したい。

Setting

$M_2 = T^2$とし、これをsquare latticeで近似する。



"ゲージ不変"な基本自由度は、$e^{i\phi(n)} \in U(1)$

$$\phi(n) \equiv \frac{1}{i}\ln[e^{i\phi(n)}], \quad -\pi < \phi(n) \leq \pi\,.$$

"微分"に対応するものを以下のように定義

$$\partial\phi(n,\mu) \equiv \frac{1}{i}\ln[e^{-i\phi(n)}e^{i\phi(n+\hat{\mu})}], \quad -\pi < \partial\phi(n,\mu) \leq \pi\,.$$

$$\partial\phi(n,\mu) = \underbrace{\phi(n+\hat{\mu}) - \phi(n)}_{\equiv \Delta_\mu \phi(n)} + 2\pi\ell_\mu(n), \quad \ell_\mu(n) \in \mathbb{Z}$$

Admissibility condition

$$\boxed{\sup_{n,\mu} |\partial\phi(n,\mu)| < \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}}$$

格子上でtopological sectorを定義するために必要（後述）

[Lüscher, 1982][Fujiwara, Suzuki, Wu, 2000]

配位が連続理論に有限の寄与を与えるための必要条件になっている。

この仮定の元で、

$$\left| \sum_{(n,\mu)\in p} \ell_\mu(n) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{(n,\mu)\in p} \left| \partial\phi(n,\mu) \right| < \frac{2}{\pi}\epsilon < 1$$

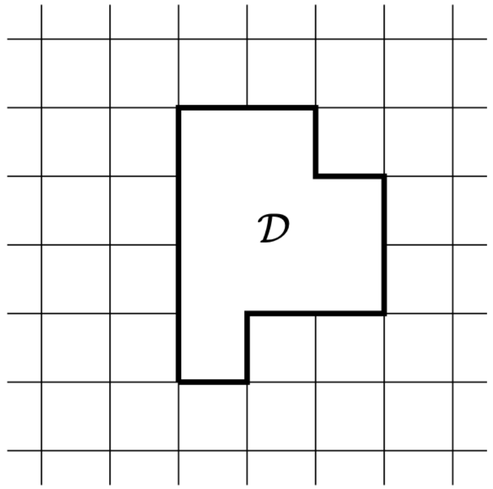
故に、 $\displaystyle\sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\Delta_\mu \frac{1}{2\pi}\partial\phi(n,\nu) = 0$ ➡ <u>Bianchi恒等式</u>

Magnetic defect

Admissibilityのもとで $\displaystyle\sum_{(n,\mu)\in\partial S} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{p\in S}\sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu) = 0$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{S^1_p} d\phi = 0\right)$$

Magnetic defect(monopole)は？➡<u>世界をくり抜く（格子に穴を開ける）</u>



$$\sum_{(n,\mu)\in\partial S} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{(n,\mu)\in\partial D} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{(n,\mu)\in\partial D} \ell_\mu(n) = m \neq 0$$

$$(D \in S)$$

Dirac quantization

$$e^{i\phi(x)} = e^{i\phi(x')} \exp\left(i \sum_{(n,\mu)\in C_{xx'}} \partial\phi(n,\mu) \right)$$

一般にmagnetic defectを囲むような経路で一周すると、

$$e^{i\phi(x)} = e^{i\phi(x)} \exp\left(i \sum_{(n,\mu)\in C_{xx}} \partial\phi(n,\mu) \right) = e^{i\phi(x)} e^{2\pi i m} = e^{i\phi(x)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Single valued!

by definitionでDirac quantization condition $m \in \mathbb{Z}$が守られている。

応用

（Single compact scalar field）

’t Hooft anomaly（連続理論）

先ほどの理論に 1 -form back ground gauge fields $A^{(e)}, A^{(m)}$をcoupleさせる。

$$S[\phi, A^{(e)}, A^{(m)}] = \frac{R^2}{4\pi}\int_{M_2} \left| d\phi + A^{(e)} \right|^2 + \frac{i}{2\pi}\int_{M_2} A^{(m)} \wedge \left[d\phi + A^{(e)} \right]$$

electric gauge変換：$\phi \mapsto \phi - \Lambda^{(e)}, A^{(e)} \mapsto A^{(e)} + d\Lambda^{(e)}$に対しては不変にできる

しかし、magnetic gauge変換：$A^{(m)} \mapsto A^{(m)} + d\Lambda^{(m)}$の元では、

$$Z[A^{(e)} + d\Lambda^{(e)}, A^{(m)} + d\Lambda^{(m)}] = \exp\left[-\frac{i}{2\pi}\int_{M_2} d\Lambda^{(m)} \wedge A^{(e)} \right] Z[A^{(e)}, A^{(m)}]$$

（backgroundのみのphase）(mixed ’t Hooft anomaly)

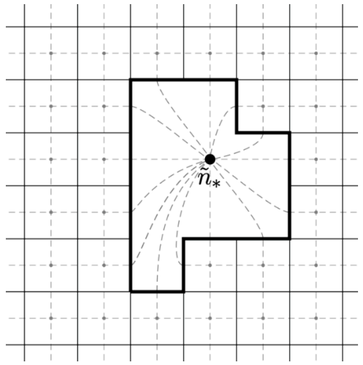
’t Hooft anomaly（格子）

$$S \equiv \frac{R^2}{2\pi}\sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}}\sum_{\mu}\left\{1-\cos[D\phi(n,\mu)]\right\} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}A_{\mu}^{(m)}(\tilde{n})D\phi(n+\hat{\mu},\nu) + \frac{i}{2}\sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}N_{\mu\nu}^{(m)}(\tilde{n})\phi(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})$$

連続理論をrespect

’t Hooft anomalyのための

local counter term



この時、electric and magnetic gauge変換を施す

$$e^{-S} \to e^{-S}\exp\left\{\frac{i}{2\pi}\sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\Lambda^{(m)}(\tilde{n})F_{\mu\nu}^{(e)}(n) - 2\pi L_{\mu}^{(m)}(\tilde{n})A_{\nu}^{(e)}(n+\hat{\mu})\right]\right\} \times \underline{\exp\left[im\Lambda^{(m)}(\tilde{n}_*)\right]}$$

$\mathscr{D}$の存在による

magnetic gauge symmetry breaking term

Open ’t Hooft line $\exp\left[-im\sum_{(\tilde{n},\mu)\in P}^{\tilde{n}_*}A_{\mu}^{(m)}(\tilde{n})\right]$

でcancelできる。

Gauge invariant Admissibility

$$\sup_{n,\mu} \left| D\phi(n,\mu) \right| < \epsilon, \qquad 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$\sup_{n,\mu,\nu} \left| F^{(e)}_{\mu\nu}(n) \right| < \delta, \qquad \sup_{\tilde{n},\mu,\nu} \left| F^{(m)}_{\mu\nu}(\tilde{n}) \right| < \delta, \qquad 0 < \delta < \min(\pi, 2\pi - 4\epsilon)$$

これらは、（いわゆるBianchiではなく）gauge 不変な関係式

$$\sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \left[\Delta_\mu \ell^{(e)}_\nu(n) - \frac{1}{2} N^{(e)}_{\mu\nu}(n) \right] = 0$$を保証

もっというと$\Delta_\mu D\phi(n,\nu) - \Delta_\nu D\phi(n,\mu) = F^{(e)}_{\mu\nu}(n)$

Two compact scalar fields

連続理論(Witten効果)

[Witten, 1979]

２つのcompact scalarが存在する理論を考える。

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_{M_2} d\phi_1 \wedge d\phi_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{(Topological charge)}$$

$$S_\theta[\phi_a] = \int_{M_2} \sum_a d\phi_a \wedge \star d\phi_a - \frac{i\theta}{4\pi^2}\int_{M_2} d\phi_1 \wedge d\phi_2$$

$$\Big\langle \underbrace{M_1(x)}_{\substack{\text{Magnetic}\\(0,1)}} \Big\rangle_{\theta+2\pi} = \Big\langle \underbrace{M_1(x)e^{i\phi_2(x)}}_{\substack{\text{Dyonic}\\(1,1)}} \Big\rangle_\theta$$

Witten効果（格子）

$$S \equiv \frac{R^2}{2\pi} \sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}} \sum_{\mu,a} \sum_{a} \left\{1 - \cos[\partial\phi_a(n,\mu)]\right\} + \underbrace{\frac{i\theta}{4\pi^2} \sum_{n\in\Gamma-\mathscr{D}} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\partial\phi_2(\tilde{n},\mu)\partial\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)}_{\text{Topological term}}$$

Admissibility conditionのもとで（変形の途中でBianchi恒等式を使った）

$$\mathscr{Q} \equiv -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\partial\phi_2(\tilde{n},\mu)\partial\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)\,.$$

$$= -\sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\ell_{2,\mu}(\tilde{n})\ell_{1,\nu}(n+\hat{\mu}) \in \mathbb{Z}$$

次に、「穴」を開けた場合

$\theta \to \theta + 2\pi$のもとで

$$S \to S - i\phi_2(\tilde{n}_*) \sum_{(n,\mu)\in\partial\mathscr{D}} \ell_{1,\mu}(n) + 2\pi i\mathbb{Z} = S - im\phi_2(\tilde{n}_*) + 2\pi i\mathbb{Z}$$

つまり、格子正則化のもとで、

$$\Big\langle \underbrace{M_1(\tilde{n}_*)}_{\substack{\text{Magnetic}\\(0,m)}} \Big\rangle_{\theta+2\pi} = \Big\langle \underbrace{M_1(\tilde{n}_*)e^{im\phi_2(\tilde{n}_*)}}_{\substack{\text{Dyonic}\\(m,m)}} \Big\rangle_{\theta}$$

が確かめられた。

’t Hooft anomaly（連続）

先ほどの理論にbackground gauge fields $A^{(e,a)}$ $A^{(m,a)}$ $(a = 1, 2)$を

coupleさせる。

$$S_\theta[\phi_a, A^{(e,a)}, A^{(m,a)}]$$

$$= \int_{M_2} \sum_a \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right] \wedge \star \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right] - \frac{i\theta}{4\pi^2} \int_{M_2} \left[d\phi_1 + A^{(e,1)}\right] \wedge \left[d\phi_2 + A^{(e,2)}\right]$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{M_2} \sum_a A^{(m,a)} \wedge \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right]$$

$$\theta \to \theta + 2\pi, \qquad A^{(m,1)} \to A^{(m,1)} - A^{(e,2)}, \qquad A^{(m,2)} \to A^{(m,2)} + A^{(e,1)}$$

とすると

$$Z_{\theta+2\pi}[A^{(e,a)}, A^{(m,1)} - A^{(e,2)}, A^{(m,2)} + A^{(e,1)}]$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2\pi}\int_{M_2} A^{(e,1)} \wedge A^{(e,2)}\right] Z_\theta[A^{(e,a)}, A^{(m,1)}, A^{(m,2)}]$$

’t Hooft anomaly（格子）

$$S \equiv \frac{R^2}{2\pi}\sum_{n\in\Gamma}\sum_{\mu,a}\sum_{a}\left\{1-\cos[D\phi_a(n,\mu)]\right\}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\sum_{n\in\Gamma}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\left[A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n})D\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)-D\phi_2(\tilde{n},\mu)A_\nu^{(m,2)}(n+\hat{\mu})\right]$$

$$+\frac{i}{2}\sum_{n\in\Gamma}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\left[N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n})\phi_1(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})+\phi_2(\tilde{n})N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n)\right]$$

’t Hooft anomalyのための

local counter term

$$+\frac{i\theta}{4\pi^2}\sum_{n\in\Gamma}\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}D\phi_2(\tilde{n},\mu)D\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)$$

$$\theta \to \theta + 2\pi, \qquad A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n}) \to A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n}) - A_\mu^{(e,2)}(\tilde{n}), \qquad A_\mu^{(m,2)}(n) \to A_\mu^{(m,2)}(n) + A_\mu^{(e,1)}(n)$$

$$\boxed{N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) \to N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) - N_{\mu\nu}^{(e,2)}(\tilde{n}), \qquad N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) \to N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) + N_{\mu\nu}^{(e,1)}(n)}$$

連続理論では見えなかったshift[respect to gauge-invariant shift

$F_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) \to F_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) - F_{\mu\nu}^{(e,2)}(\tilde{n}), F_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) \to F_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) + F_{\mu\nu}^{(e,1)}(n)$]

のもとで

$$S \to S - \underbrace{\frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu^{(e,2)}(\tilde{n}) A_\nu^{(e,1)}(n + \hat{\mu})}_{\text{'t Hooft anomaly(on lattice)}} + 2\pi i \mathbb{Z}$$

Summary

・compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentなmagnetic operator (monopole)を格子上で定義した。

・Single compact scalar理論における混合't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

・Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。

・back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

重要なのは

・（少なくとも２D compact scalar理論では）格子上に「穴」をあけることでMagnetic defect(monopole)を置くことができる。

・gauge invarianceをrespectしたadmissibility conditionは実際に構成出来、これから得られるBianchi恒等式likeな関係式が't Hooft anomalyの導出において重要だった。

Future direction: このmonopole構成のU(1), SU(N),...への拡張

（具体的にはWitten効果で't Hooft loopにWilson loopが伴うようなことを見たい。）

Back up

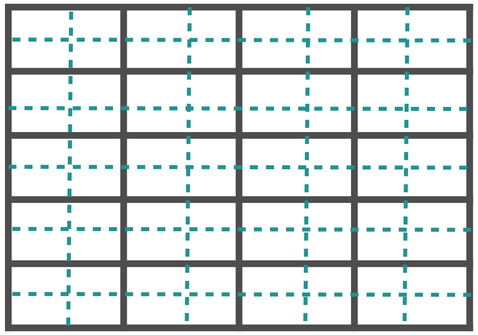
Setting（格子）

1 -form back ground gauge fields $A^{(e)}, A^{(m)}$に対応するlink変数

$$U^{(e)}(n,\mu), \quad U^{(m)}(\tilde{n},\mu) \quad \tilde{n} \equiv n + \frac{1}{2}\hat{1} + \frac{1}{2}\hat{2} \text{（dual lattice）}$$

$$A_\mu^{(e)}(n) \equiv \frac{1}{i}\ln U^{(e)}(n,\mu), \qquad -\pi < A_\mu^{(e)}(n) \leq \pi,$$

$$A_\mu^{(m)}(\tilde{n}) \equiv \frac{1}{i}\ln U^{(m)}(\tilde{n},\mu), \qquad -\pi < A_\mu^{(m)}(\tilde{n}) \leq \pi,$$



$$F^{(e)}_{\mu\nu}(n) \equiv \frac{1}{i}\ln\left[U^{(e)}(n,\mu)U^{(e)}(n+\hat{\mu},\nu)U^{(e)}(n+\hat{\nu},\mu)^{-1}U^{(e)}(n,\nu)^{-1}\right]$$
$$= \Delta_\mu A^{(e)}_\nu - \Delta_\nu A^{(e)}_\mu + 2\pi N^{(e)}_{\mu\nu}$$ (magneticは$e \to m, n \to \tilde{n}$としたもの)

また、共変微分に対応するものは次の通り

$$D\phi(n,\mu) \equiv \frac{1}{i}\ln\left[e^{-i\phi(n)}U^{(e)}(n,\mu)e^{i\phi(n+\hat{\mu})}\right], \qquad -\pi < D\phi(n,\mu) \leq \pi$$
$$= \Delta_\mu\phi(n) + A^{(e)}_\mu(n) + 2\pi\ell^{(e)}_\mu(n)$$

gauge変換性は、

$$\phi \mapsto \phi - \Lambda^{(e)}, \qquad A^{(e,m)}_\mu \mapsto A^{(e,m)}_\mu + \Delta_\mu\Lambda^{(e,m)} + 2\pi L^{(e,m)}_\mu$$

$$N^{(e,m)}_{\mu\nu} \mapsto N^{(e,m)}_{\mu\nu} - \Delta_\mu L^{(e,m)}_\nu + \Delta_\nu L^{(e,m)}_\mu, \qquad \ell^{(e)}_\mu(n) \mapsto \ell^{(e)}_\mu(n) - L^{(e)}_\mu(n)$$

Anomaly 詳しい計算

B.g. coupled two compact scalar理論において

$$S_{\theta+2\pi} - S_\theta = -\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\left[d\phi_1 + A^{(e,1)}\right]\wedge\left[d\phi_2 + A^{(e,2)}\right]$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\Big[\underbrace{d\phi_1\wedge d\phi_2}_{\in\mathbb{Z}} + A^{(e,1)}\wedge d\phi_2 - A^{(e,2)}\wedge d\phi_1 + A^{(e,1)}\wedge A^{(e,2)}\Big]\,.$$

’t Hooft anomalyを出したいので右辺をback groundのみで書きたい

Actionの相互作用項$\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\sum_a A^{(m,a)}\wedge\left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right]$を睨むと$A^{(m)}$

を$A^{(e)}$だけずらせば良いと分かる。