

A Half de Sitter Holography

鈴木優樹

Taishi Kawamoto 氏, Shanming Ruan 氏, Tadashi Takayanagi 氏との共同研究
arXiv:2306.07575

基礎物理学研究所

August 3, 2023

弦理論と場の理論

従来の de Sitter Holography

- AdS/CFT 対応の発見以後、現実宇宙への応用として dS/CFT 対応が提案された [Strominger 01]
- 主張としては (d+1) 次元 de Sitter 空間は時間無限遠に space-like な境界が存在し、その上の d 次元のユークリッドな共形場理論が (d+1) 次元の de Sitter 重力と等価である。 [Strominger 01]

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 T} (-dT^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2), \quad (1)$$

$$T \in [-T/2, T/2], \theta \in [0, \pi].$$

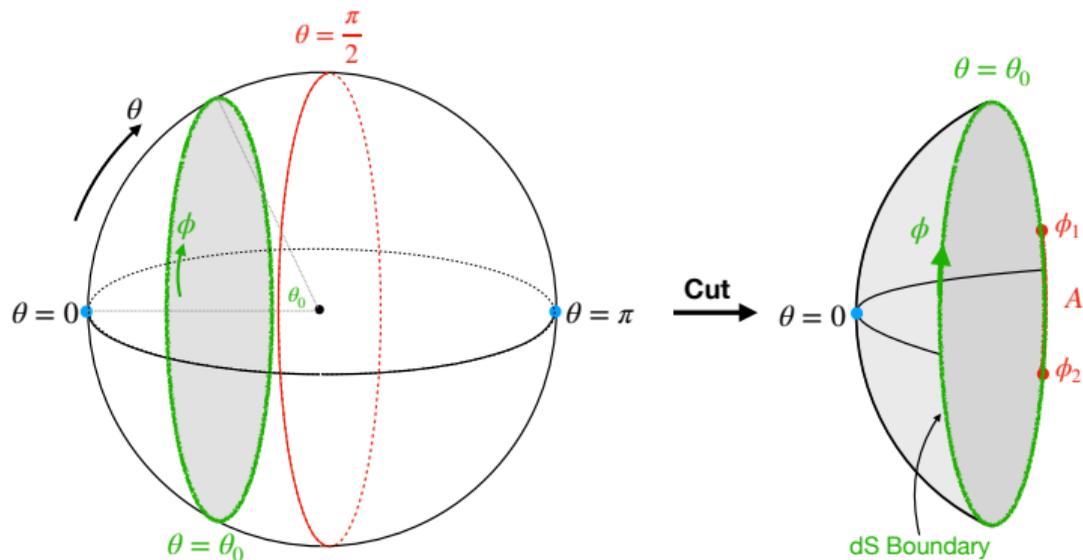
- GKPW 対応のような相関関数の対応は同様に知られており、境界での宇宙の波動関数が CFT での相関関数の生成汎関数になっている [Maldacena 02]

$$\Psi_{\text{dS}}[\phi|_{\text{bdy}} = \tilde{\phi}] = \langle \exp\left(\int d^d x \tilde{\phi}(x) \mathcal{O}(x)\right) \rangle_{\text{CFT}} \quad (2)$$

- 対応する CFT は非ユニタリーで次元によって負であったり純虚数であったりする。

我々のモデル

非ユニタリー性の問題を回避し、従来の AdS/CFT 対応でのテクニックを応用するために $\theta = \theta_0$ に **time-like** な境界を導入する。そこで Dirichlet 境界条件を課すことで (d+1) 次元の de Sitter 重力が d 次元の non-local な場の理論と等価であると予想した。



我々のモデル

また time-like な $\theta = \theta_0$ の CFT のみを双対に持つホログラフィーを考えるために時間無限遠にいる従来の Euclidean CFT の自由度を無視するために2つの処方を実施

- Case 1: Schwinger-Keldysh prescription まず $T=0$ で Hartle-Hawking state を Euclidean path integral で用意し Lorentzian な時間発展を考える。その後考えた時刻の状態はこれらから計算でき、Holographic Entanglement Entropy も同様に Schwinger-Keldysh 法で計算できる。この時 Schwinger-Keldysh 法によって時間無限遠の境界は全く役割を果たさない。
- Case 2: Final state projection 時間無限遠に end-of-the-world brane (ETW brane) を入れることで終状態をある特定の状態に指定するという projection を行う。

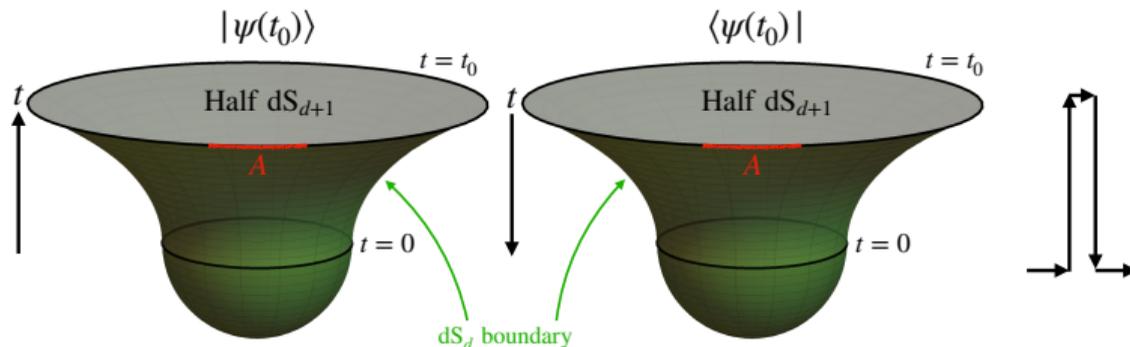
本論文では Exercise として global AdS 空間内での de Sitter ブレーン上で Case1,2 をまず初めに考えたが、ここでは bulk の重力が de Sitter の場合のみを紹介する。

Case 1: Schwinger-Keldysh in dS_3

計量は

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3)$$

で与えられる。



部分系 A は $\theta = \theta_0$ の境界上に $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ にとる。上の図は Schwinger-Keldysh の contour を表している。

Case 1: Schwinger-Keldysh in dS_3

測地線の長さを求めると

$$\cos D_{12} = (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0 \quad (4)$$

となる。Space-like な測地線が存在するためには

$$\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \cos(\phi_1 - \phi_2) \geq 1 - \frac{2}{\cosh^2 t_0} \quad (5)$$

が満たされないといけない。しかし $\Delta\phi_{\max} = \pi - 2 \arctan[\sinh t_0]$ であり、固定した ϕ_1, ϕ_2 に対して十分大きな t_0 を取るとこれは破れる。よって以下のような別の測地線を求める。ちなみに $\Delta\phi_{\max} = \pi$ の時

$$S_A = \frac{D_{12}}{4G} = \frac{1}{2} S_{\text{dS}} \quad (6)$$

となる。

Case 1: Schwinger-Keldysh in dS_3

複素化した測地線の長さは

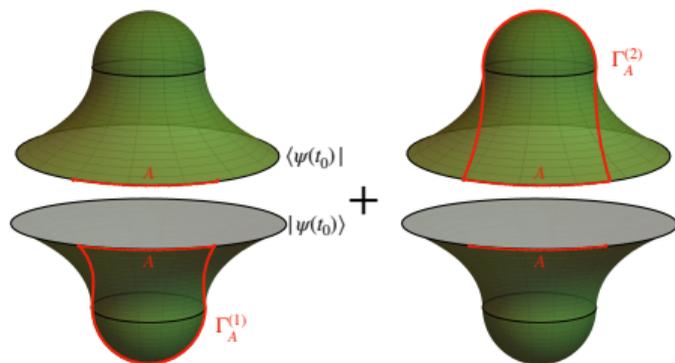
$$D_{12} = \pi + i \operatorname{arccosh}(\sinh^2 t_0 - (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \cosh^2 t_0) \quad (7)$$

しかし、今計算しているのは Entanglement Entropy なので実数なはず。

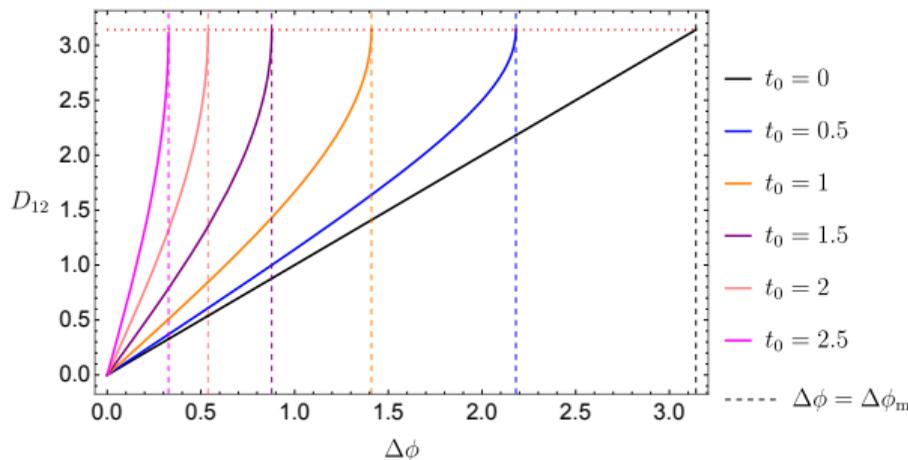
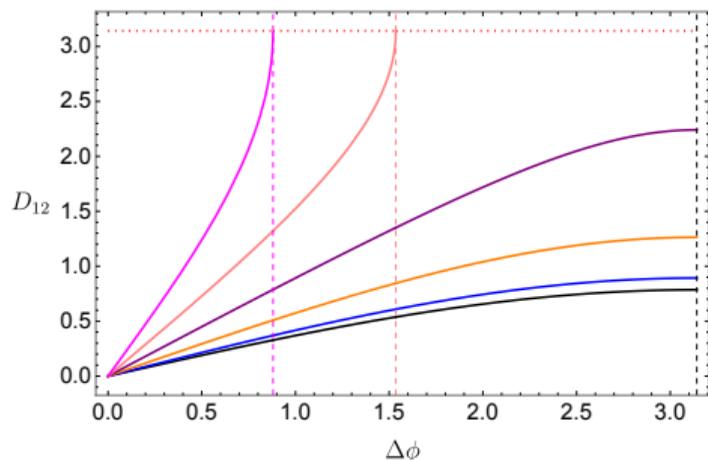
解決策：Schwinger-Keldysh を取るときに bra と ket で複素共役になっている

$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log(e^{(1-n)S_n} + e^{(1-n)S_n^*}) = \frac{S_1 + S_1^*}{2} = \Re[S] = \frac{1}{2} S_{\text{dS}} \quad (8)$$

となる。



Behavior of Holographic EE



The left figure shows the plot of D_{12} for $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$ as a function of $\Delta\phi$ for fixed t_0 . The right panel shows the plot of D_{12} for $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ as a function of $\Delta\phi$ for fixed t_0 , similarly.

Case 1から読み取れること

- 十分大きな時間において

$$\frac{d^2 D_{12}}{d(\Delta\phi)^2} > 0 \quad (9)$$

が確かめられ、(Strong) subadditivity が破れている事になる!

$$\text{Subadditivity : } S_A + S_B \geq S_{AB}$$

$$\text{Strong subadditivity : } S_{AB} + S_{BC} \geq S_A + S_{ABC}. \quad (10)$$

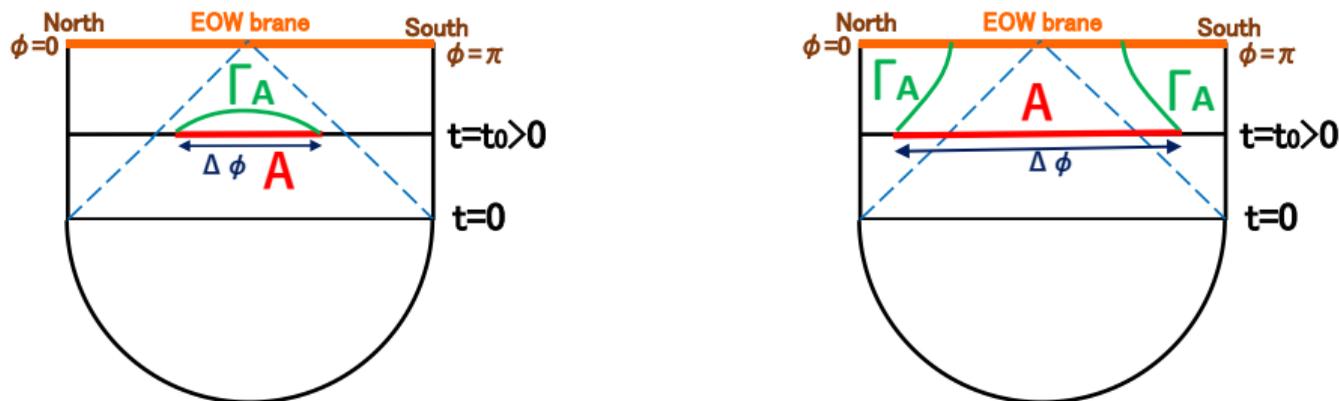
- 言い換えればとても non-local な場の理論の Entanglement を計算している事になる。
- 論文内ではさらにこの議論を進め、de Sitter 空間では physical な Hilbert space を定義するためには特別な時間一定面を取らなければならないことを主張している。

Case 2: Final state projection

同様に dS_3 を考え、時間無限遠に ETW brane を導入する。Entanglement Entropy は connected か disconnected なものの 2 種類が存在し、部分系の大きさにより

$$S_A = \begin{cases} \frac{D_{12}}{4G} & \text{for } 0 < \phi < \Delta\phi_{\max} \\ \Re[S_A] = 0 & \text{for } \phi > \phi_{\max} \end{cases} \quad (11)$$

となる。よって振る舞いは Case1 の場合と全く同じになる。



Summary

- 新たな de Sitter holography への提案を行い、Holographic Entanglement Entropy の計算を Case1,2 と行った。
- どちらの場合にも時間無限遠での境界条件が違っても関わらず同じ結果を出す。これは de Sitter holography において時間無限遠の境界が一種の projection のような役割を持つ可能性を示唆している。
- 計算されたエントロピーは (Strong) subadditivity を破っており、これらから de Sitter 空間では特別な time-slice 上でのみ物理的に意味のある Hilbert space が構成できることを示唆している。また、単に dS_d 上の CFT としてはとても non-local な理論であることを示している。

Thank you!