On non-invertible symmetry with gravity

京都大学　基礎物理学研究所
田中隆寛

August 5, 2023

本研究は本多正純氏との共同研究に基づく。

今回の発表内容

4d massless QED in flat spacetime に非可逆対称性あり [Choi, Lam, Shao, 2022]
$\rightarrow$ curved spacetime でもあるのか? [Putrov, Wang, 2023]
$\rightarrow$ ある！

4d QCD にも適用し、$\pi^0 \mathrm{tr}\left(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\right)$ の係数を再導出する。

高次対称性と非可逆対称性

p-form $U(1)^{(p)}$ symmetry

保存則 $\mathrm{d} \star j^{(p+1)} = 0$

$\Longrightarrow$

- topological な symmetry operator
  on close submfd M_{d-p-1} ($\because$ Stokes' theorem)

$$U_\alpha(M_{d-p-1}) = \exp\left(i\alpha \int_{M_{d-p-1}} \star j^{(p+1)} \right) \quad (\text{for } \mathrm{e}^{i\alpha} \in U(1))$$

- p-dim extended object に作用する。

非可逆対称性

symmetry operator に必要な条件

- topological
- gauge invariant
- framing anomaly free $\leftarrow$ 今回特に!

このために、symmetry operator が可逆でなくなる (ユニタリでなくなる) ことあり

$\Longrightarrow$ 非可逆対称性

4d massless QED

4d massless QED with N_f massless Dirac fermion を考える。

<u>古典論</u>

以下の global $U(1)_\mathrm{A}$ 対称性がある。

$$U(1)_\mathrm{A} : \Psi_i(x) \to \mathrm{e}^{i\alpha\gamma_5/2}\Psi_i(x) \ (i = 1, \cdots, N_f)$$

Noether current は

$$j^\mu_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_i$$

量子論

ABJ anomaly と't Hooft anomaly により、保存則が破れる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} \star j_{\mathrm{A}} =& \frac{1}{4\pi^2}\left\{ \frac{\kappa_{\mathrm{A}^3}}{3!} F^{(2)} \wedge F^{(2)} + \frac{\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{2!} f^{(2)} \wedge f^{(2)} \right. \\
& \left. + \frac{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}{48} \mathrm{tr}\left(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& a^{(1)} : \text{dynamical } U(1)_{\mathrm{V}} \text{ gaugefield}, \; f^{(2)} = \mathrm{d}a^{(1)} \\
& A^{(1)} : \text{background } U(1)_{\mathrm{A}} \text{ gaugefield}, \; F^{(2)} = \mathrm{d}A^{(1)} \\
& \omega^{(1)} : \text{spin connection}, \; R^{(2)} = \mathrm{d}\omega^{(1)} + \omega^{(1)} \wedge \omega^{(1)}
\end{aligned}
\right.
$$

$U(1)_{\mathrm{A}} - gravity^2$ anomaly の効果

まず、$U(1)_{\mathrm{A}} - gravity^2$ anomaly だけ考える。

$$\mathrm{d} \star j_{\mathrm{A}} = \frac{\kappa_{\mathrm{AP^2}}}{192\pi^2}\mathrm{tr}\big(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\big)$$
$$\to \mathrm{d}\left(\star j_A - \frac{\kappa_{\mathrm{AP^2}}}{48\pi}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega)\right) = 0$$

$$\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left(\omega^{(1)} \wedge \mathrm{d}\omega^{(1)} + \frac{2}{3}\omega^{(1)} \wedge \omega^{(1)} \wedge \omega^{(1)}\right)$$
$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{dGCS}^{(3)}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\big(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\big)$$

topological な operator

$$U_\alpha(M_3) := \exp\left[i\frac{\alpha}{2}\int_{M_3}\left(\star j_A - \frac{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}{48\pi}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega)\right)\right]$$

を考える。

しかし、framing anomaly による ambiguity あり!

使う式

$$U_\alpha(M_3) := \exp\left[i\frac{\alpha}{2}\int_{M_3}\left(\star j_A - \frac{\kappa_{\mathrm{AP^2}}}{48\pi}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega)\right)\right]$$

frame を $f \in \mathbb{Z}$ だけ twist すると [Witten, 1989]、

$$\int_{M_3}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega) \to \int_{M_3}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega) + 2\pi f$$

$$\therefore U_\alpha(M_3) \to U_\alpha(M_3)\mathrm{e}^{-i\alpha\kappa_{\mathrm{AP^2}}f/48}$$

ここで、

fact[Witten, 1989]

Witten-Reshetikhin-Turaev 3d TQFT T の分配関数は、

$$Z_T(M_3) \to Z_T(M_3)\mathrm{e}^{2\pi i f c/24}$$

と変換する。($c \in \mathbb{Q}$: ある CFT の central charge)

使う式：

$$U_\alpha(M_3) \to U_\alpha(M_3)\mathrm{e}^{-i\alpha\kappa_{\mathrm{AP}^2}f/48}$$
$$Z_T(M_3) \to Z_T(M_3)\mathrm{e}^{2\pi i f c/24}$$

$\to$ topological で、ambiguity のない operator：

$$\begin{aligned} U'_{(c,T)}(M_3) &:= U_{\alpha=4\pi c/\kappa_{\mathrm{AP}^2}}(M_3) Z_T(M_3) \\ &= \exp\left[ic\int_{M_3}\left(\frac{2\pi}{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}\star j_A - \frac{1}{24}\mathrm{GCS}\right)\right] Z_T(M_3) \end{aligned}$$

$U(1)_\mathrm{A}^3$ anomaly と $U(1)_\mathrm{A}-U(1)_\mathrm{V}^2$ anomaly の効果

次に、$U(1)_\mathrm{A}^3$ anomaly と $U(1)_\mathrm{A}-U(1)_\mathrm{V}^2$ anomaly を考える。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\star j_\mathrm{A} = \frac{1}{4\pi^2}\Bigg\{ & \frac{\kappa_{\mathrm{A}^3}}{3!}F^{(2)}\wedge F^{(2)} + \frac{\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{2!}f^{(2)}\wedge f^{(2)} \\
& + \frac{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}{48}\mathrm{tr}(R^{(2)}\wedge R^{(2)})\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\to \mathrm{d}\Bigg(& \star j_\mathrm{A} - \frac{\kappa_{\mathrm{A}^3}}{24\pi^2}A^{(1)}\wedge F^{(2)} - \frac{\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{8\pi^2}a^{(1)}\wedge f^{(2)} \\
& - \frac{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}{48\pi}\mathrm{GCS}^{(3)}(\omega)\Bigg) = 0
\end{aligned}
$$

topological な operator として

$$U''_{(c,T)}(M_3) := U'_{(c,T)}(M_3)\exp\Big[-ic\int_{M_3}\Big(\frac{\kappa_{\mathrm{A}^3}}{12\pi\kappa_{\mathrm{AP}^2}}A^{(1)}\wedge F^{(2)} + \frac{\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{4\pi\kappa_{\mathrm{AP}^2}}a^{(1)}\wedge f^{(2)}\Big)\Big]$$

を考える。

しかし、これは gauge invariant でない!

そこで代わりに、

$$Z_{(\Lambda,n)}(M_3;A^{(1)}) := \int \prod_{i=1}^{L}[\mathcal{D}B_i]$$

$$\exp\left[\frac{i}{2\pi}\int_{M_3}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{L}K_{ij}B_i^{(1)}\wedge \mathrm{d}B_j^{(1)} + \sum_{i=1}^{L}n_i B_i^{(1)}\wedge \mathrm{d}A^{(1)}\right)\right]$$

をかける。

$$B_i : \text{dynamical } U(1) \text{ gaige field on } M_3$$

$$\Lambda, n \in \mathbb{Z}^L, K \in M(L,\mathbb{Z}) : \text{symmetric}$$

使う式

$$U''_{(c,T)}(M_3) := U'_{(c,T)}(M_3)\exp\left[-ic\int_{M_3}\left(\frac{\kappa_{\mathrm{A}^3}}{12\pi\kappa_{\mathrm{AP}^2}}A^{(1)}\wedge F^{(2)} + \frac{\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{4\pi\kappa_{\mathrm{AP}^2}}a^{(1)}\wedge f^{(2)}\right)\right]$$

ガウス積分を実行すると、

$$Z_{(\Lambda,n)}(M_3;A^{(1)}) = \exp\left[-\frac{i}{4\pi}(n^{\mathrm{T}}K^{-1}n)\int_{M_3}A^{(1)}\wedge \mathrm{d}A^{(1)}\right]$$

$$\to n^{\mathrm{T}}K^{-1}n = \frac{c\kappa_{\mathrm{A}^3}}{3\kappa_{\mathrm{AP}^3}},\ \tilde{n}^{\mathrm{T}}\tilde{K}^{-1}\tilde{n} = \frac{c\kappa_{\mathrm{AV}^2}}{\kappa_{\mathrm{AP}^2}}$$

とすれば良い！

$Z_{(\Lambda,n)}(M_3;A^{(1)})\tilde{Z}_{(\tilde{\Lambda},\tilde{n})}(M_3;a^{(1)})$ からの framing anomaly もある。
$\to$ central charge を $c-\mathrm{sign}\Lambda-\mathrm{sign}\tilde{\Lambda}$ に修正して、symmetry operator は

$$
\begin{aligned}
&D_{(c,T,\Lambda,n,\tilde{\Lambda},\tilde{n})}(M_3)\\
&:=U'_{(c,T)}(M_3)Z_{(\Lambda,n)}(M_3;A^{(1)})\tilde{Z}_{(\tilde{\Lambda},\tilde{n})}(M_3;a^{(1)})
\end{aligned}
$$

4d massless QED には $2\pi(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の non-invertible symmetry あり！

4d QCD

UV theory として、massless up quark $\mathcal{U}$ と down quark $\mathcal{D}$ のいる QCD を考える。

古典論

以下の global $U(1)_{\mathrm{A3}}$ 対称性がある。

$$U(1)_{\mathrm{A3}} : \begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \exp(i\beta\gamma_5)\mathcal{U} \\ \exp(-i\beta\gamma_5)\mathcal{D} \end{pmatrix}$$

Noether current は

$$j^{\mu}_{\mathrm{A3}} = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{U}}\gamma^{\mu}\gamma_5\mathcal{U} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}\gamma^{\mu}\gamma_5\mathcal{D}$$

量子論

ABJ anomaly により、保存則が破れる。

$$\mathrm{d} \star j_{\mathrm{A}3} = \frac{1}{8\pi^2} f^{(2)} \wedge f^{(2)}$$

$U(1)_{\mathrm{A}3}$charge の和が 0 $\rightarrow U(1)_{\mathrm{A}3} - gravity^2$ anomaly の寄与なし!

同様の手順で、symmetry operator は

$$D_{(c,T,\Lambda,n)}(M_3) := \exp\left[ic\int_{M_3} 2\pi \star j_{\mathrm{A3}}\right] Z_{(\Lambda,n)}(M_3; a^{(1)}) Z_T(M_3)$$

$$\left(n^{\mathrm{T}} K^{-1} n = c \in \mathbb{Q}\right)$$

となる。

$\pi^0 \mathrm{tr}\left(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\right)$ がないこと

この IR theory として、pion theory

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IR}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\pi^0 \wedge \star\mathrm{d}\pi^0 + \frac{1}{2e^2} f^{(2)} \wedge \star f^{(2)} + ia^{(1)} \wedge \star j_{\mathrm{EM}} + \frac{i}{8\pi^2 f_\pi}\pi^0 f^{(2)} \wedge f^{(2)} + \frac{ig}{f_\pi}\pi^0 \mathrm{tr}\left(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\right) + \cdots$$

を考える。

pion の shift symmetry からも同様の手順で、symmetry operator が構成できる。

この 2 つの non-invertible symmetry を UV と IR で matching
$\rightarrow \ g = 0$ (photon が 2 つの graviton に崩壊しない!)

まとめ

- gauge invariant $\to Z_{(\Lambda,n)(M_3,A^{(1)})}$ をかける
- framing anomaly の解消　$\to Z_T(M_3)$ をかける

$\Longrightarrow$ symmetry operator の構成!

同様にして、

$$\begin{cases} \text{4d axion electrodynamics} \\ \text{4d } PSU(N_c) \text{ gauge theory with matter} \\ \text{4d axion Yang} - \text{Mills}(PSU(N_c)) \end{cases}$$

においても non-invertible symmetry が構成できる。

メリット

$\pi^0 f^{(2)} \wedge f^{(2)}$ や $\pi^0 \mathrm{tr}\big(R^{(2)} \wedge R^{(2)}\big)$ の係数決定は、

通常 $\cdots$ e が小さい $\rightarrow$ background として (どこまでいける?)'t Hooft anomaly matching

今回 $\cdots$ non-invertible symmetry matching

であり、e が有限の大きさでも使える!

Appendix 1(Witten-Reshetikhin-Turaev 3d TQFT のとりかた)

$\alpha = 2\pi p/N \in 2\pi(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ $(p, N > 0)$ のとき

$\rightarrow$ 例えば、pN_f copies of $SU(2)$ level $-(6N-2)$ Chern-Simons theory

total central charge : $c = \dfrac{pN_f}{N} - 3pN_f \equiv \dfrac{pN_f}{N} \pmod 1$

Appendix 2(n と K のとりかた)

例えば、$c\kappa_{\mathrm{A}^3}/3\kappa_{\mathrm{AP}^2} = p/q$ with $p, q > 0,\ \gcd(p,q) = 1$
のときは、

$$K = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & q \end{pmatrix} \in M(p, \mathbb{Z}),\ \ n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^p$$

とすれば良い。