

# Toward the application of large- $N$ deconfinement to $SU(3)$ QCD

Hiromasa Watanabe / 渡辺 展正 (京大基研)

花田政範氏(Queen Mary U.)、大畑宏樹氏(京大基研)、島田英彦氏(京大基研)  
との共同研究(in progress)

2023/08/08 @ 場の理論と弦理論 2023, YITP

# Introduction

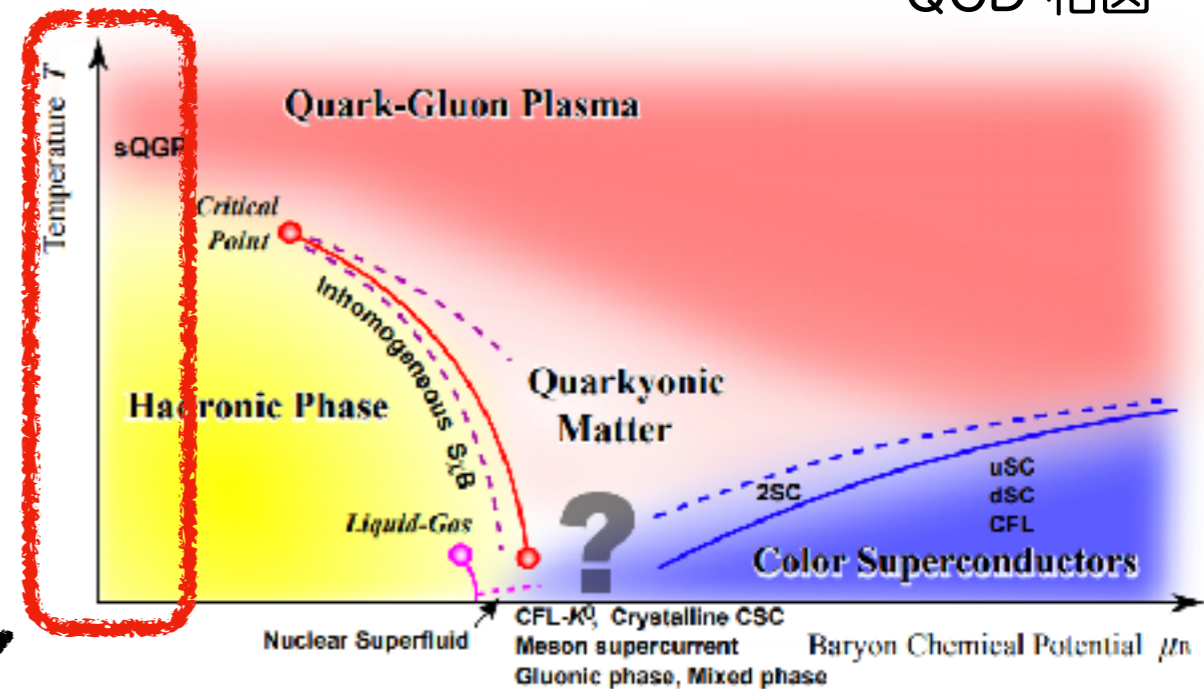
QCD 相図

SU(3) QCD w/  $N_f$  quarks

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (\mathcal{D} + m_f) \psi_f$$

$$Z_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}A \prod_f \det(\mathcal{D}[A] + m_f) e^{-S_{\text{YM}}[A]}$$

格子QCD計算で精力的に研究



From [Fukushima, Hatsuda, (2011)]

- なぜ Polyakov loop が閉じ込めのよい“秩序変数”なのか？

Center symmetry は厳密な対称性ではない

- “相転移”の過程での中間領域はどうなっている？

相転移ではなく、crossoverとされる c.f. [Aoki, Endrodi, Fodor, Katz, Szabo, ('06)]

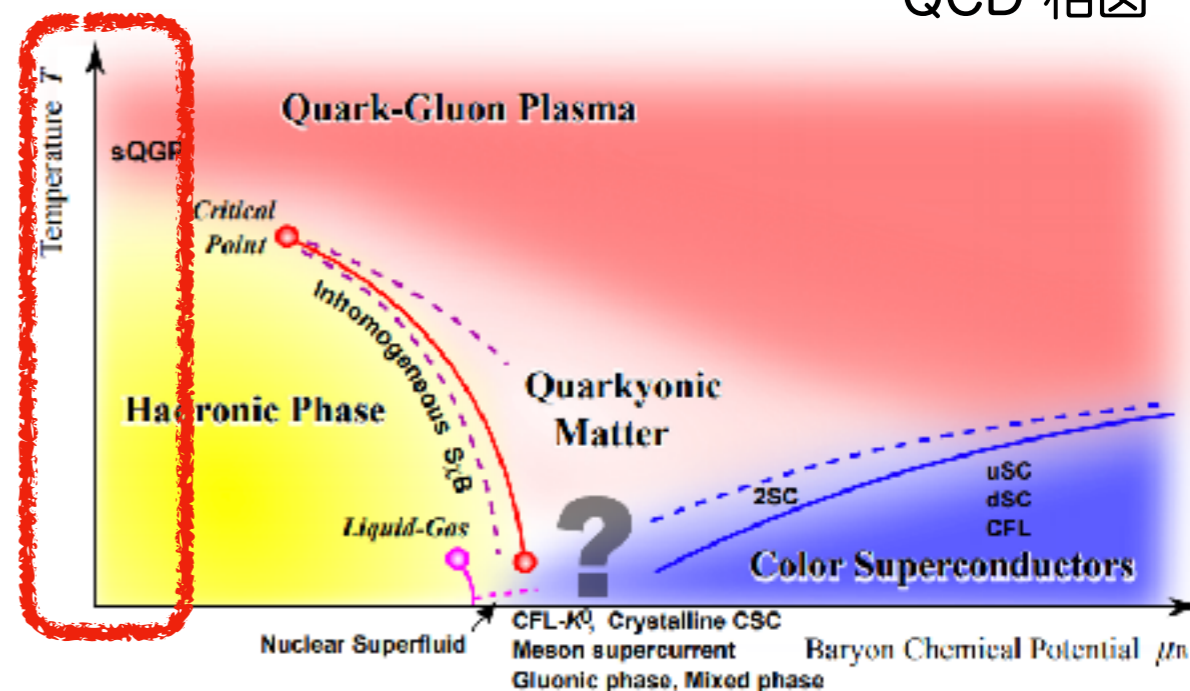
# Main message

QCD 相図

SU(3) QCD w/  $N_f$  quarks

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (\mathcal{D} + m_f) \psi_f$$

$$Z_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}A \prod_f \det(\mathcal{D}[A] + m_f) e^{-S_{\text{YM}}[A]}$$



【本発表】 格子QCD配位を使って研究

From [Fukushima, Hatsuda, (2011)]

• なぜ Polyakov loop が閉じ込めのよい“秩序変数”なのか？

→ SU(3) Haar random distributionからのズレを特徴づける

• “相転移”の過程での中間領域はどうなっている？

→ 非自明な中間領域の存在を示唆

our work



Large N 理論からの知見を活用

# Contents

- Introduction
- Deconfinement at large  $N$
- Deconfinement at finite  $N$  ( $N = 3$  QCD)
- Summary & Prospects

# Deconfinement

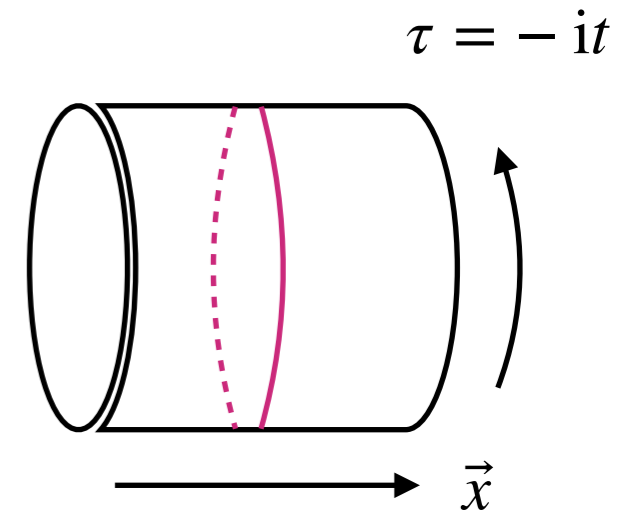
- Polyakov loop が (非) 閉じこめを特徴づける (finite/large N)

[Polyakov, (1978) / Wilson, (1974)]

$$P = \frac{1}{N} \text{tr} P \exp \left[ i \int_0^\beta dt A_t \right] \sim \text{静的クォーク生成に必要な自由エネルギー}$$

$P = 0$  : **Confined** ← クォーク生成に無限大の自由エネルギーが必要

$P \neq 0$  : **Deconfined**



- Large N での 't Hooft countingによる特徴づけ

[Witten, (1998)]

鞍点近似が厳密な結果を与える



熱力学量のkinematicalな振る舞いから相転移を判定できる

$F \sim O(N^0)$  : **Confined** ← color singlets (e.g. glueball, meson)

$F \sim O(N^2)$  : **Deconfined** ← each color d.o.f. (e.g. QGP)

Polyakov loopによる記述と関係がある

# Weakly-coupled YM on $\mathbb{R} \times S_R^{d-1}$

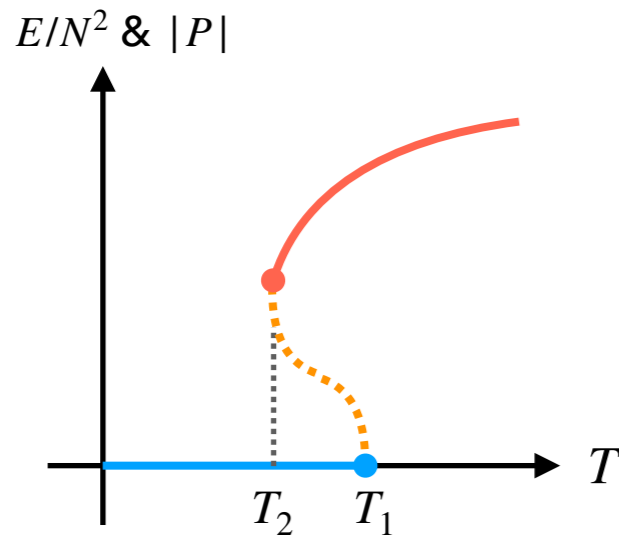
随伴場のみでの  $U(N)$  large  $N$  ゲージ理論の相構造が一般的に調べられている

[Sundborg, (1998) / Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, V.Raamsdonk, (2003)]

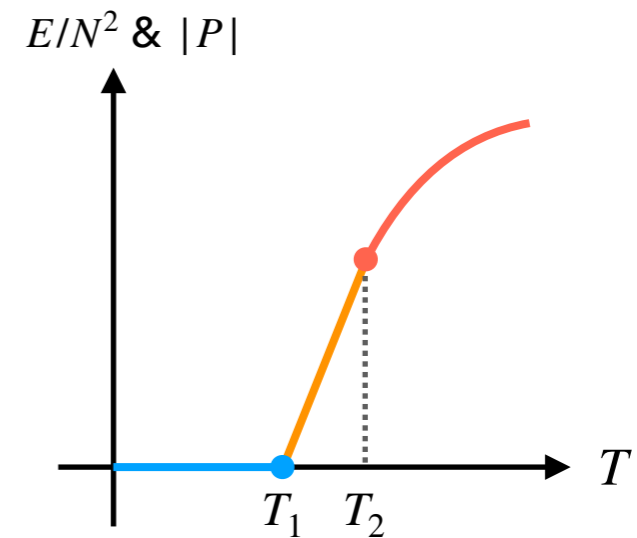
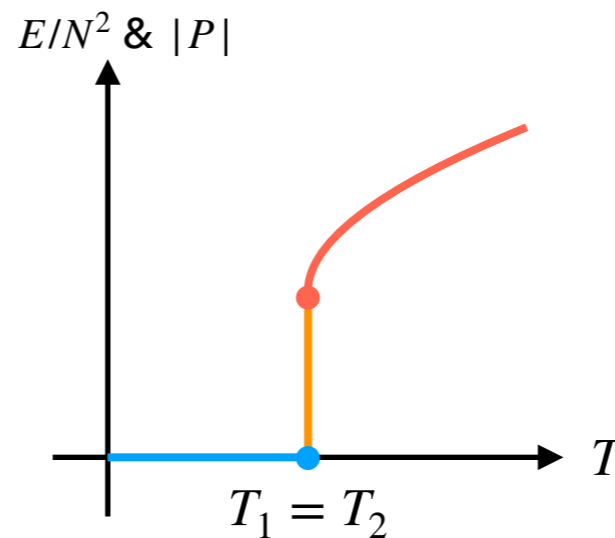
- 作用や経路積分が 多重巻き Polyakov loop を使って記述される

$$u_n(T) = \frac{1}{N} \text{tr} P \exp \left[ in \oint A_t \right] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{in\theta_j} \stackrel{\text{large } N}{\approx} \int d\theta \rho^{(P)}(\theta; T) e^{in\theta}$$

- $V_{\text{eff}}(\{u_n\})$  の停留条件から、自由エネルギー  $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z(T)$  が計算できる



“heavy quark mass”



“light quark mass”

→ 2つの相転移と、中間相が存在

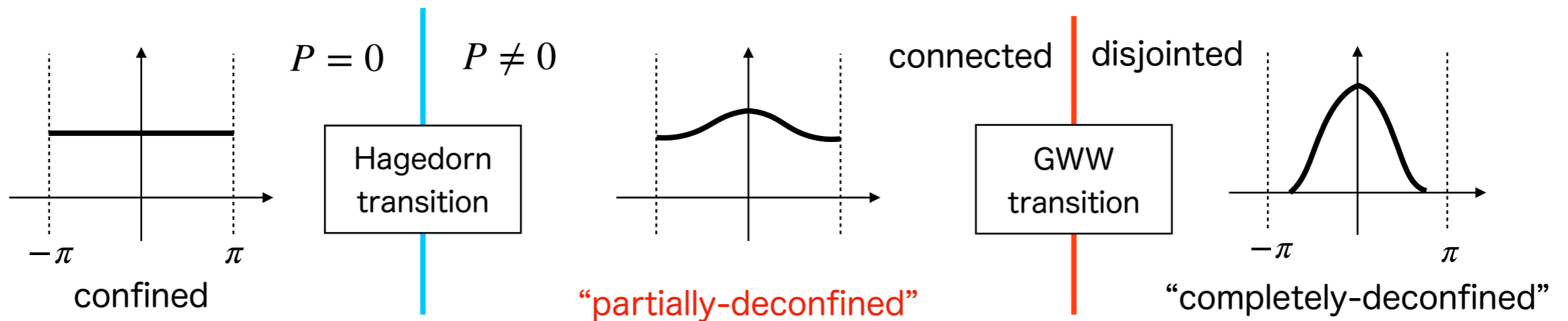
( : 部分閉じこめ)

# Two phase transitions at large N

[Hanada, Ishiki, HW, (2018) / Hanada, Maltz, (2016) / Berenstein (2016) / ...]

部分閉じ込め相では、カラー自由度の二相分離が起きている；

$$u_n(T) = \int d\theta \rho^{(P)}(\theta; T) e^{in\theta} \quad \longleftrightarrow \quad \rho^{(P)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{-in\theta}$$



[Hagedorn, (1965), ...]

[Gross, Witten, (1980) / Wadia, (1980)]

中間相では

$$\rho^{(P)}(\theta) = \left(1 - \frac{M}{N}\right) \rho_{\text{con}}^{(P)}(\theta) + \frac{M}{N} \rho_{\text{dec}}^{(P)}(\theta), \quad E_{\text{PD}} = E_{\text{con}} + E_{\text{dec}}(M), \dots$$

$M/N$  によって物理量が決まっている →  $M$ 個のカラー自由度だけ (非) 閉じ込め

# Contents

- Introduction
- Deconfinement at large  $N$
- Deconfinement at finite  $N$  ( $N = 3$  QCD)
- Summary & Prospects

## Large $N$ 理論での教訓

- なぜ Polyakov loop が閉じ込めのよい“秩序変数”なのか？
  - Large  $N$  理論での 't Hooft counting (カラー自由度の数え上げ)
- “相転移”の過程での中間領域はどうなっている？
  - 2つの相転移で隔てられた中間相が厳密に存在



# Contents

- Introduction
- Deconfinement at large  $N$
- **Deconfinement at finite  $N$  ( $N = 3$  QCD)**
- Summary & Prospects

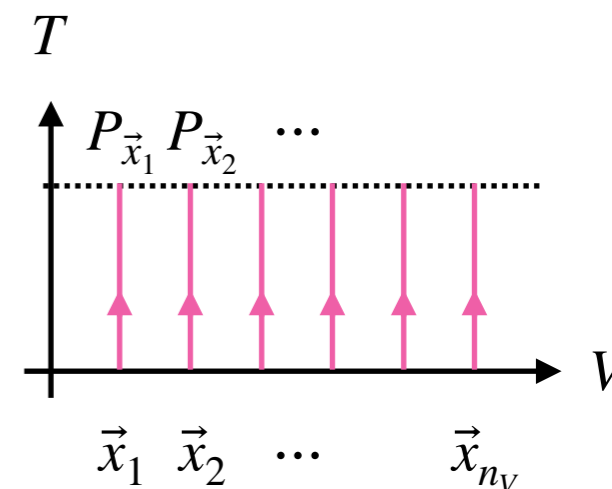
# With finite Nc & infinite Volume

[Hanada, Ohata, Shimada, HW, (in progress)]

重要な考察：相転移するには、large N 極限の代わりに無限体積極限が必要

$$P = \langle P_{\vec{x}} \rangle_{\text{space}} = \int d\theta \rho_s(\theta) e^{i\theta}$$

$$\rho_s(\theta) = \frac{1}{V} \int d^3x \rho_{\vec{x}}(\theta) = \frac{1}{NV} \int d^3x \sum_{j=1}^N \delta(\theta - \theta_j^{(\vec{x})})$$



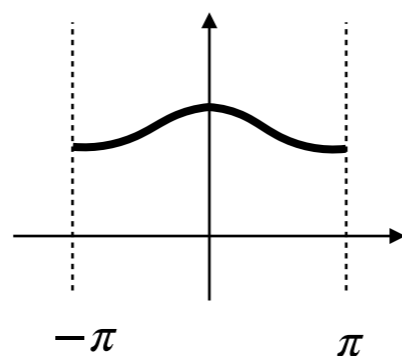
$$\rho_s(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n>0} (u_n e^{-in\theta} + u_{-n} e^{+in\theta})$$

$$u_n^{(s)} = \int d\theta \rho_s(\theta) e^{in\theta}$$

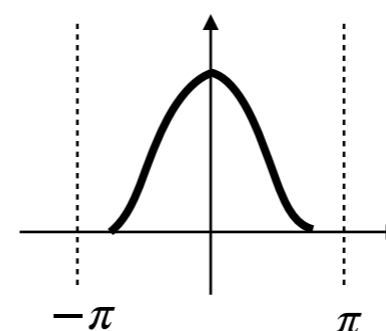
A naive guess;

GWV相転移の  
対応物が存在し、  
“中間相”を特徴付ける

connected



disjointed



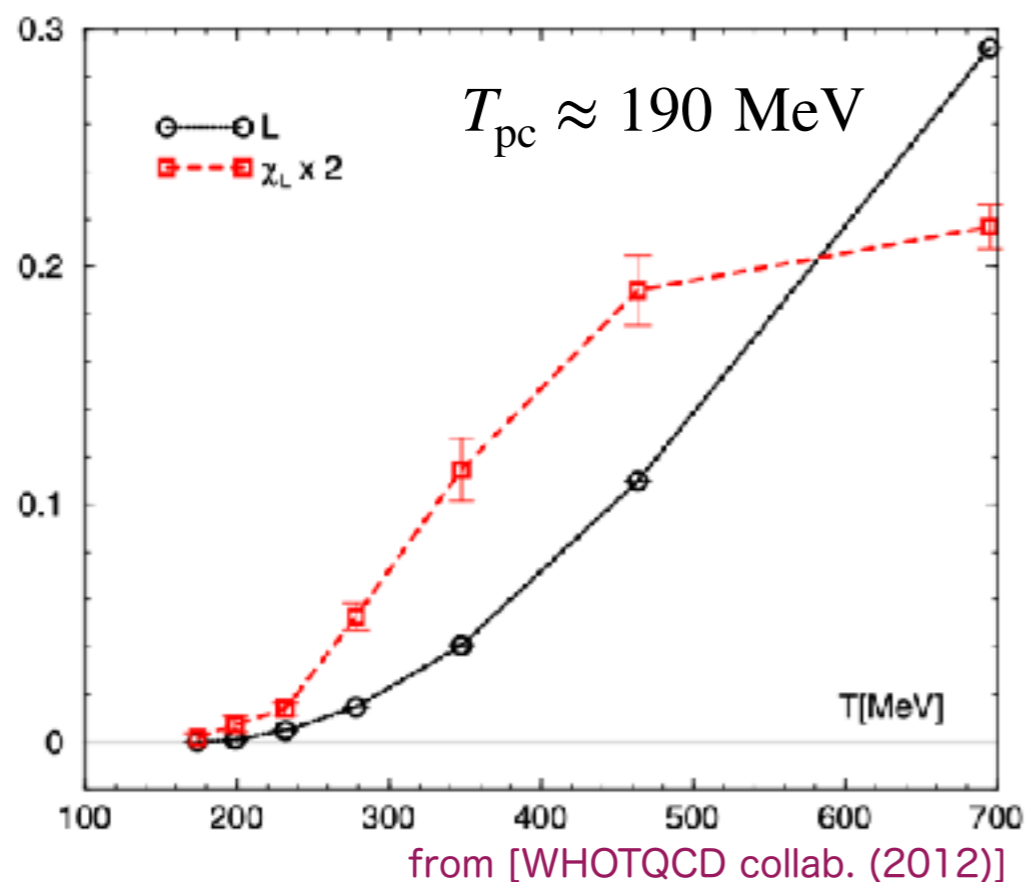
- 端が不連続になる点は一般のQFTでも出るはず。
- N = 3 は large か?

SU(3) QCDでは何が起こるか？ → 格子QCD配位を使って数値解析

# Exploration by lattice QCD

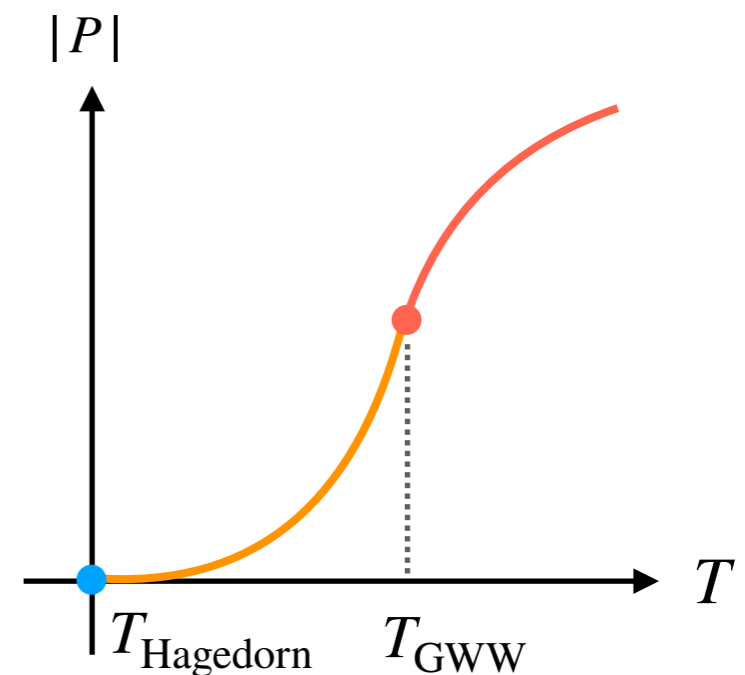
Gauge config. by WHOT-QCD collaboration [Phys. Rev. D. 85, 094508 (2012)]

- 2+1 flavor, RG-improved Iwasaki gauge + NP  $O(a)$ -improved Wilson quarks
  - $T = 0$  config. of CP-PACS & JLQCD collaboration [Phys. Rev. D. 78, 011502 (2008)]
- $32^3 \times n_t$  lattice with  $n_t = 4, 6, \dots, 16$
- $\beta = 2.05$ ,  $a^{-1} = 2.79$  GeV, ( $a \simeq 0.07$  fm),  $m_\pi/m_\rho \simeq 0.63$  : **heavy quark**



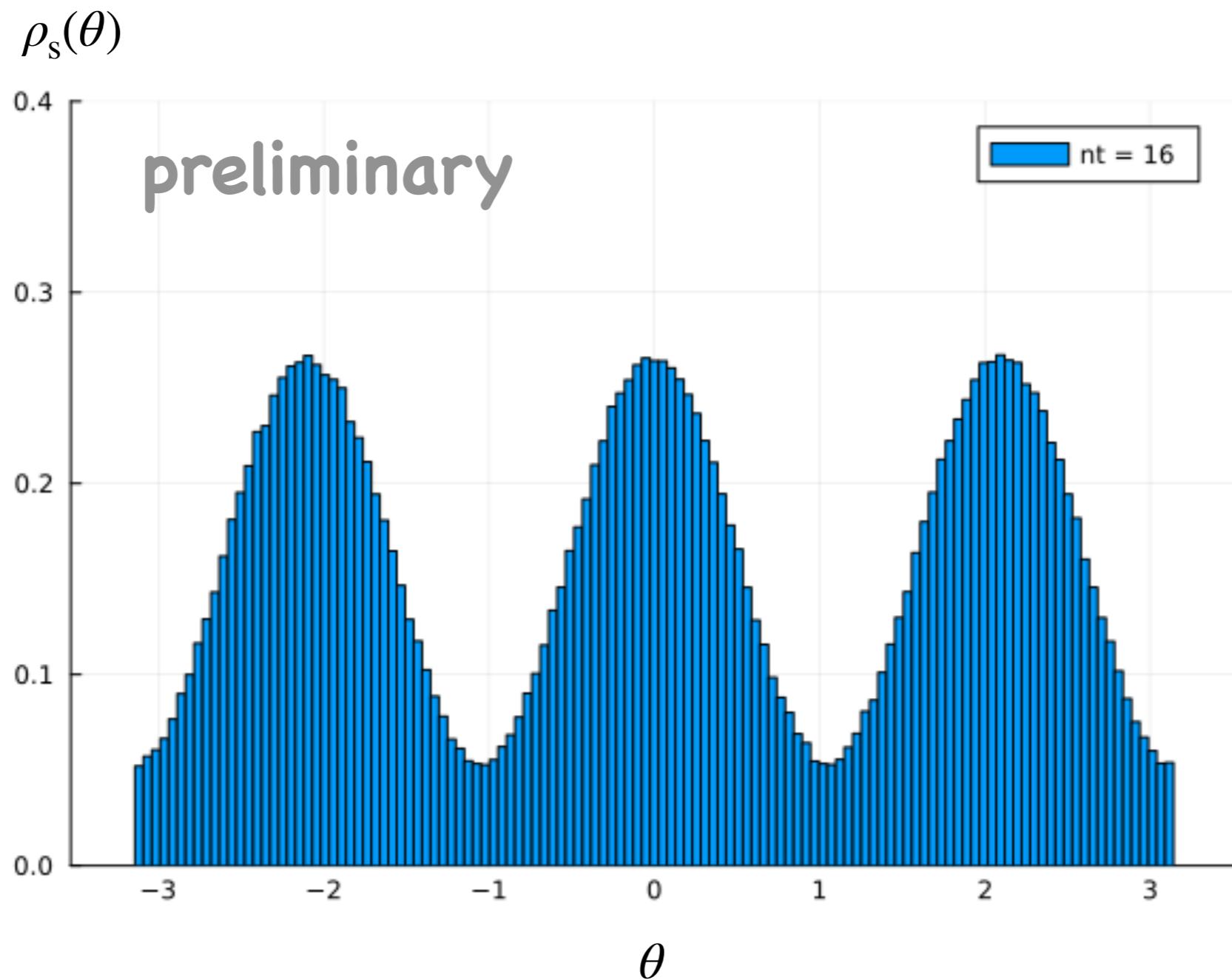
Nt    16 - 10    8    6    4  
 $T \simeq 174, 199, \dots, 697$  MeV

c.f.) phase structure of large-N theories with fund. matters (e.g. large  $N_c$  QCD)



[Schnitzer, (2004) / Hanada, Robinson, (2019) / ...]

# Phase distribution $\rho_s(\theta; T)$

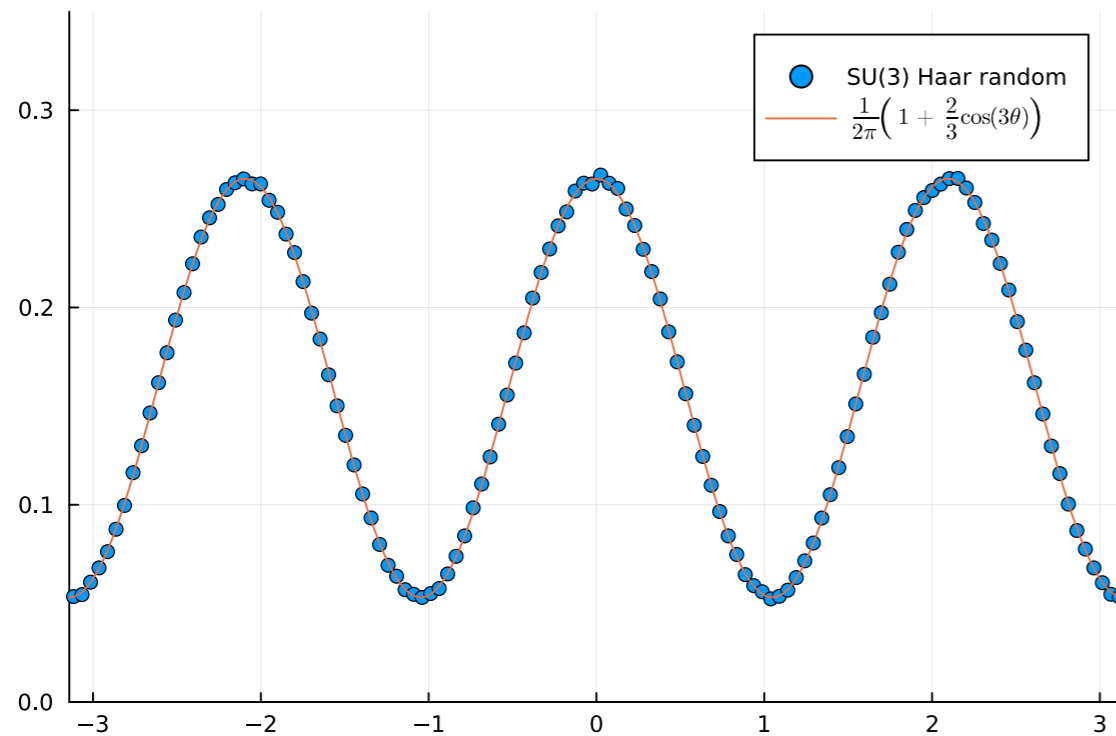
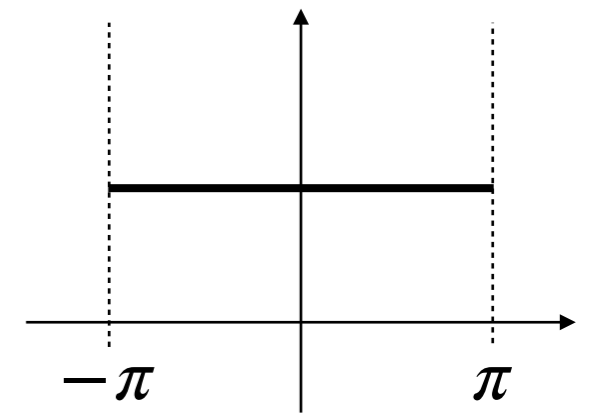


# Haar randomness

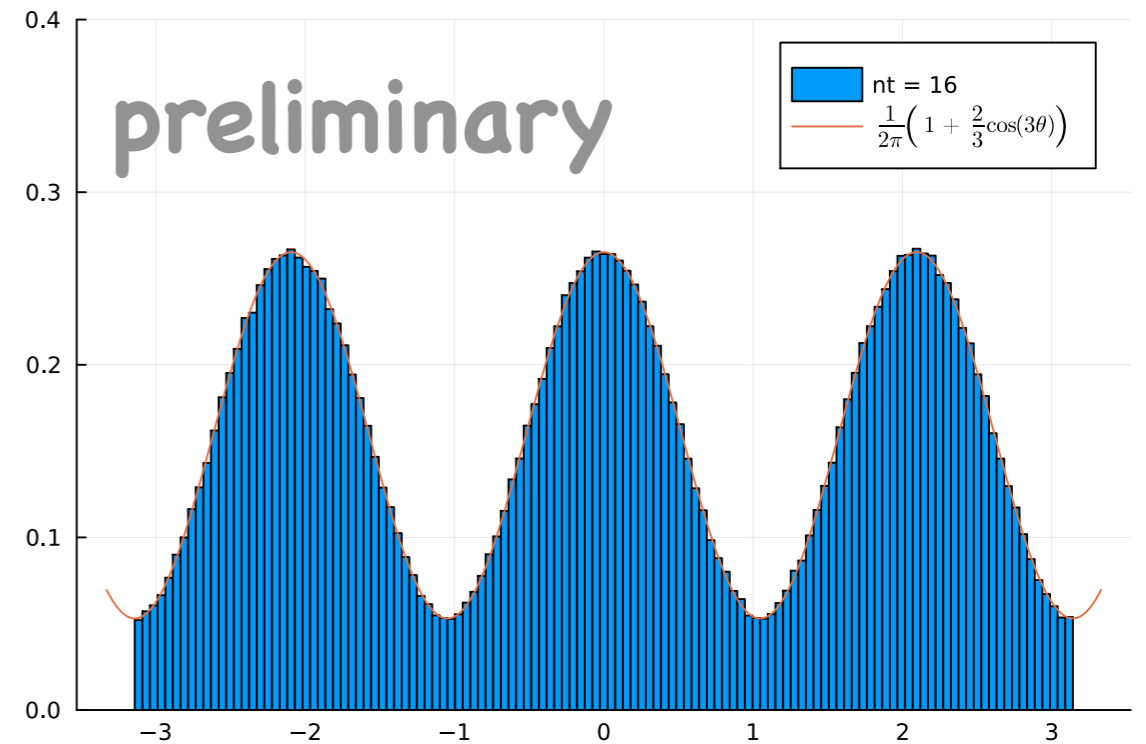
そもそも、Large N での uniform phase distributionとは？

→ SU(N) Haar-random distribution

“SU( $\infty$ )” Haar random



Haar random generator by [Fasi, Robol]



Distribution  $\frac{1}{2\pi} \left( 1 - (-1)^N \frac{2}{N} \cos(N\theta) \right)$

(少なくとも  $N = 2, 3$  は平坦から遠い)

- Random SU(3) matrix が時空各点に住んでいる
- Center symmetry よりも強い理論的拘束を与えうる (後述)

c.f. [Polyakov, (1975)/(1978)]

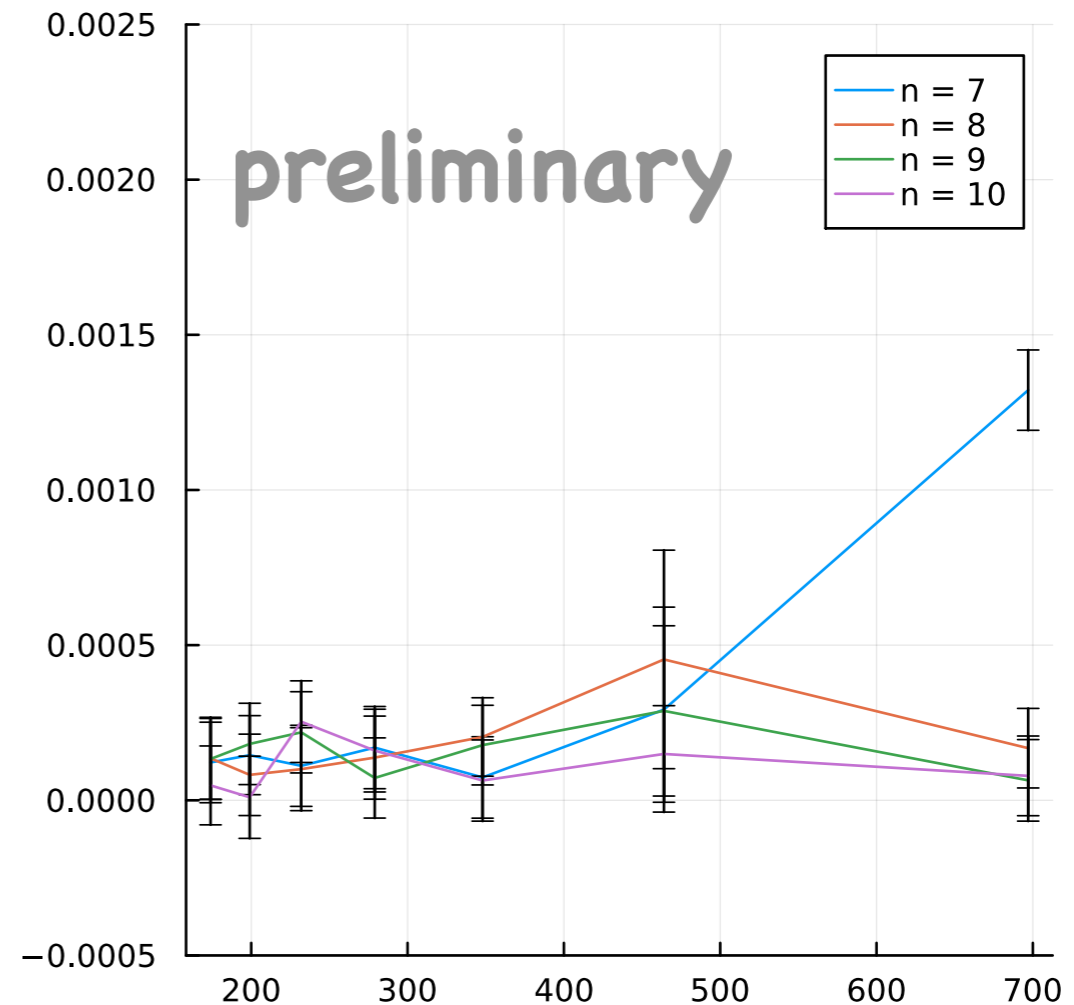
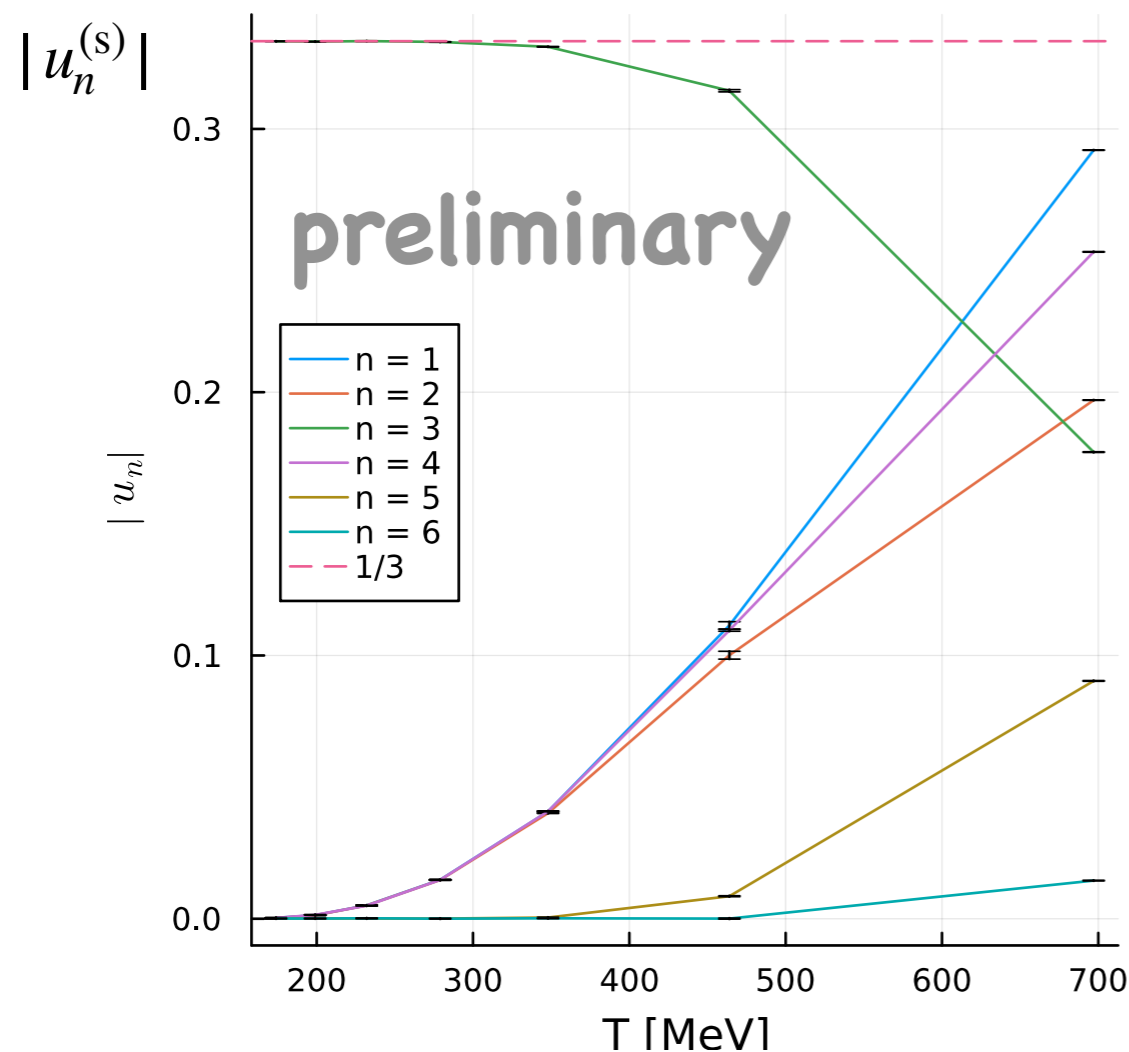
# n-wound Polyakov loops

$$u_n^{(s)} = \frac{1}{N_c} \left\langle \text{tr P exp} \left[ in \oint A_t(x) \right] \right\rangle_{\text{space}} = \int d\theta \rho_s(\theta) e^{in\theta}$$

: n回巻き Polyakov loops

SU(3) Haar random であれば、

$$u_3^{(s)} = \frac{1}{3}, \quad u_n^{(s)} = 0$$



$u_n$  ごとに異なる温度で変化し始め、非自明な中間領域を示唆

# Viewpoint from characters

Polyakov loopよりも“よい”基底

$$\chi_r(g) = \text{tr } R_r(g)$$

$R_r(g)$  : Representation matrix of rep.  $r$

$$g \in G = \prod_{\vec{x}} \text{SU}(3) : \text{holonomy } (\sim \text{Polyakov line } e^{i\Theta})$$

正規直交性 ( $r, s$  : 規約表現)

$$\frac{1}{\text{Vol}(G)} \int_G dg \chi_r(g) \chi_s(g) = \delta_{rs}$$

$P(g)$  : 群多様体上での分布

$$1 = \frac{1}{\text{Vol}(G)} \int dg P(g)$$

$$P(g) = \sum_r P_r \chi_r(g), \quad \chi_{\text{trivial}}(g) = 1$$

Haar random

$$P(g) : \text{constant} \iff P_r = \begin{cases} 1 & r : \text{trivial} \\ 0 & r : \text{otherwise} \end{cases}$$

**deconfinement** : characterによるHaar-random distribution からのズレで特徴づけられる

# Characters & Polyakov loops

$$\chi_{(1,0)} = \sum_{j=1}^3 e^{i\theta_j}$$

$$\chi_{(2,1)} = 2 + \sum_{j \neq k} e^{i(\theta_j - \theta_k)}$$

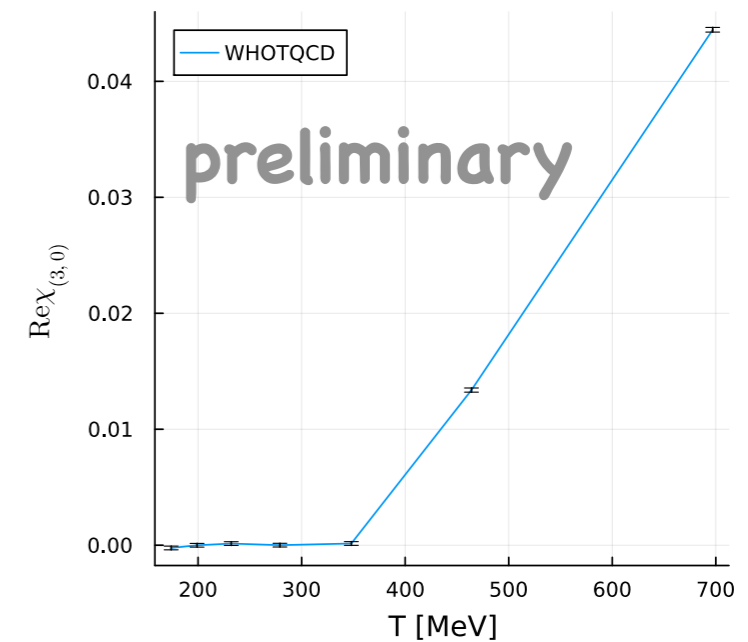
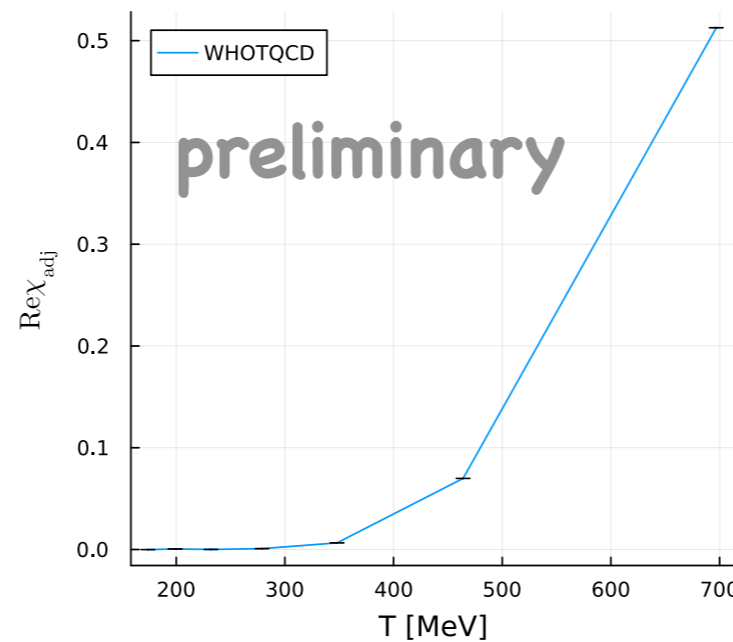
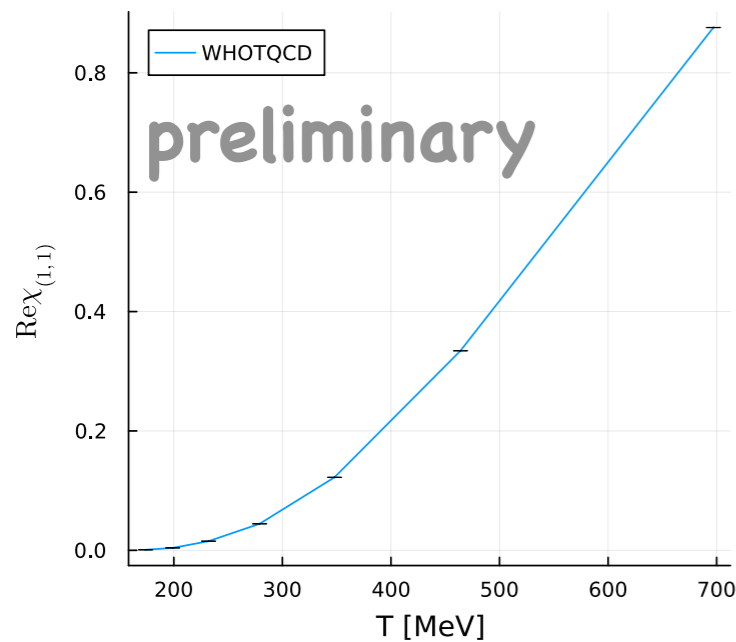
$$\chi_{(3,0)} = 1 + \sum_{j=1}^3 e^{3i\theta_j} + \sum_{j \neq k} e^{i(\theta_j - \theta_k)}$$

...

$$\chi_{(1,1)} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \bar{\chi}_{(1,0)}$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$



...

$$P = u_1 \propto \chi_{(1,0)} \quad u_2 \propto \chi_{(2,0)} - \chi_{(1,1)} \quad u_4 \propto \chi_{(4,0)} - \chi_{(3,1)} + \chi_{(1,0)} \quad \text{:governed by } P \text{ at } T \approx T_{\text{pc}}!$$

$$u_3 \propto \chi_{(3,0)} - \chi_{(2,1)} + 1, \quad u_6 \propto \chi_{(6,0)} - \chi_{(5,1)} + \chi_{(3,0)}, \dots \quad \text{:stronger than center symmetry!}$$

:HRで非零定数

:HRで消える



# Contents

- Introduction
- Deconfinement at large  $N$
- Deconfinement at finite  $N$  ( $N = 3$  QCD)
- **Summary & Prospects**

# Summary & Prospects

【本研究】 格子QCD配位を使って SU(3) QCD w/ quarks を研究

- なぜ Polyakov loop が閉じ込めのよい“秩序変数”なのか？

→ SU(3) Haar random distributionからのズシを特徴づける

- “相転移”の過程での中間領域はどうなっている？

→ 非自明な中間領域の存在を示唆

our work



Large N 理論  
の知見

【課題】

- 中間相を特徴づけるスケールや物理的現象は？

Large N ではglobal symmetry のSSBと対応

[Hanada, Holden, Knaggs, O'Bannon, (2021)]

QCD の chiral 対称性と関連しているのか？

- さらに詳細な数値解析

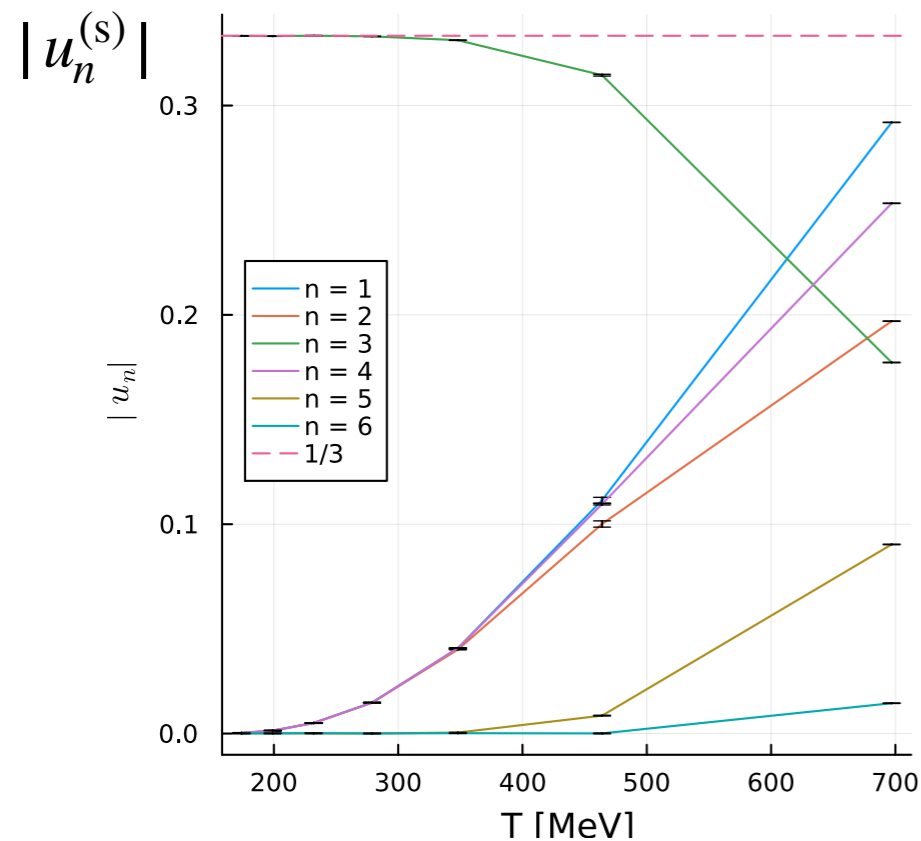
温度方向の格子点を増やす、高温側、他の物理量との比較、物理点上、…

# Relation to global symmetry

尤もらしいシナリオ：global symmetry による中間相の記述と一致

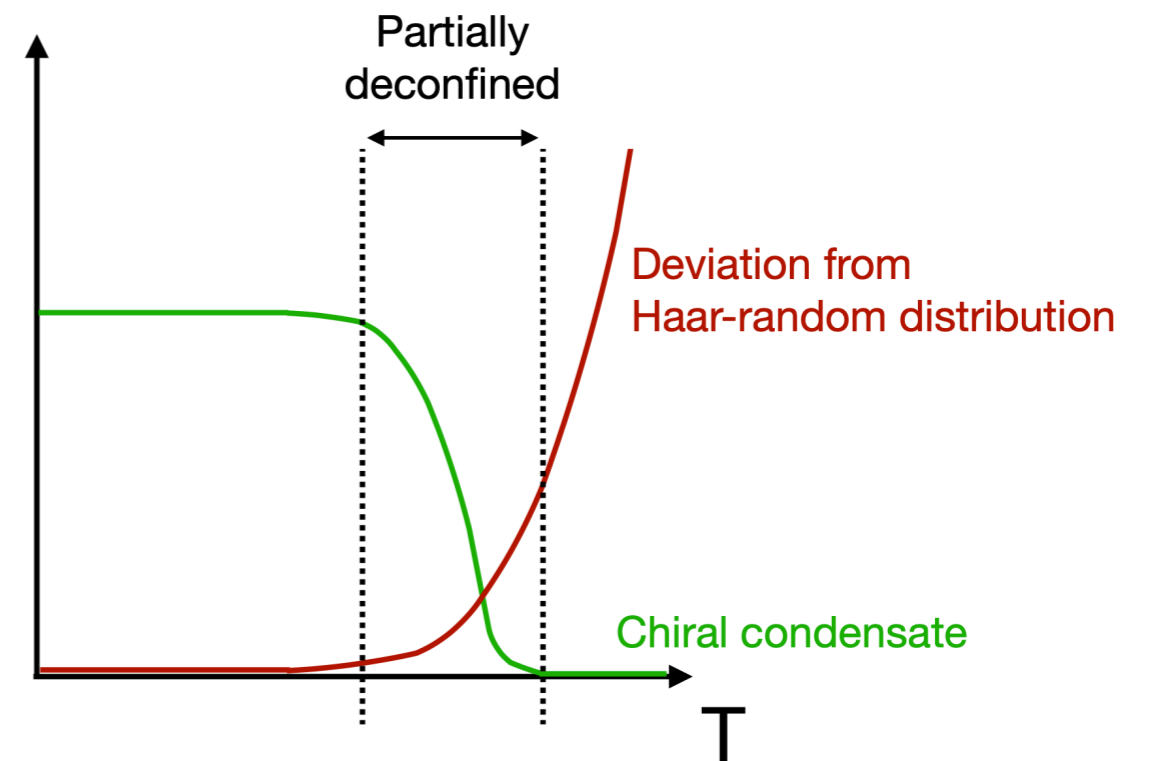
- Global symmetry の SSB によって、新たな典型的なスケールが出現
- GWW 相転移点と symmetry breaking/restoration point の一致が起こる例が知られる

[Hanada, Holden, Knaggs, O'Bannon, (2021)]



?

Conceptually,

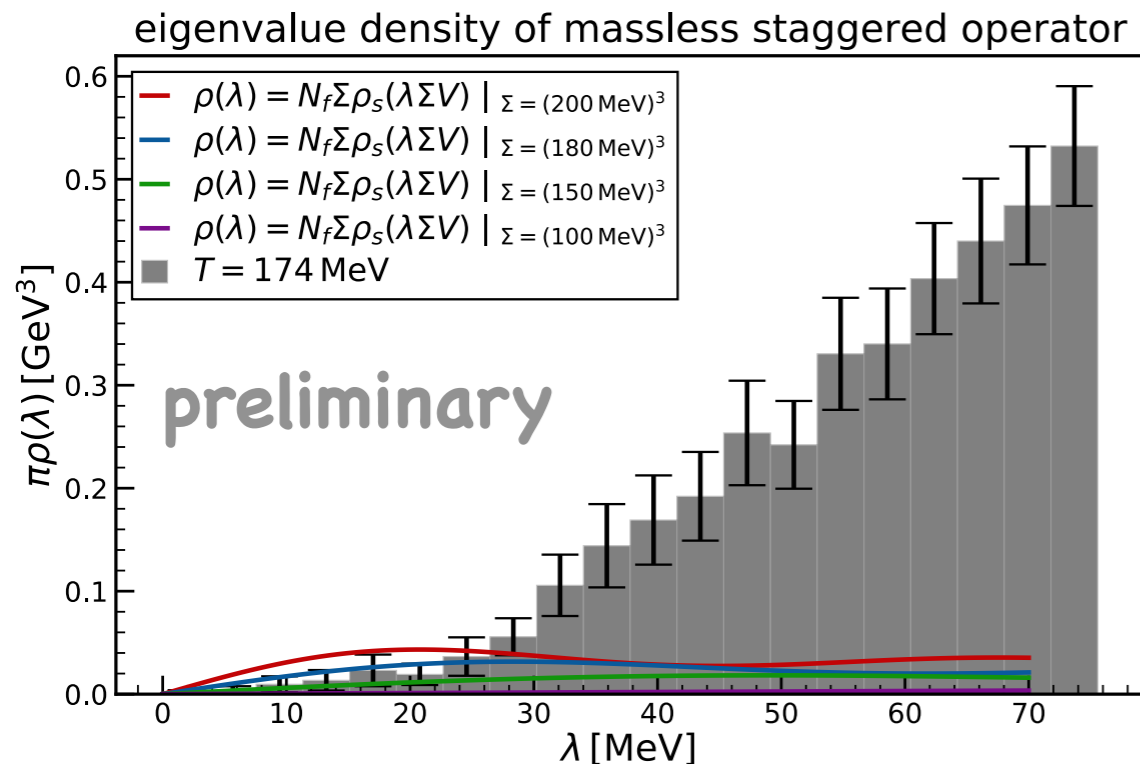


プローブクォークの chiral 対称性の破れ/回復との一致が見えるか？

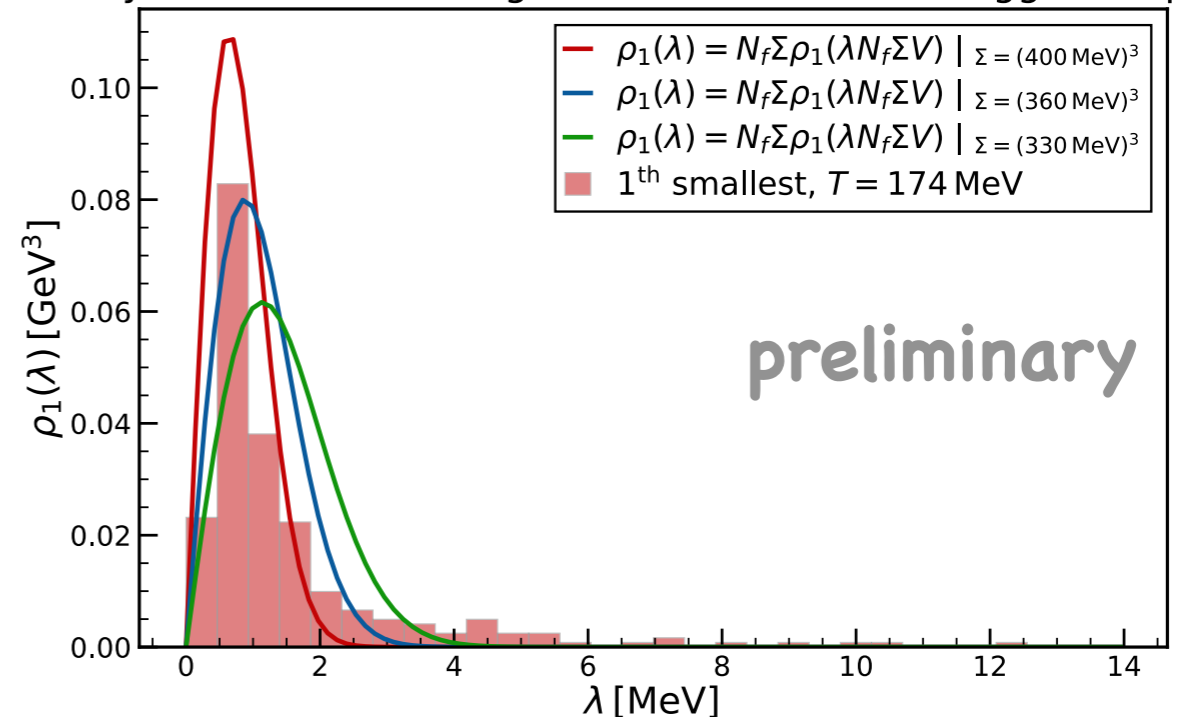
# Low-lying Dirac eigenvalues

Chiral condensate: order parameter of chiral symmetry

$$\Sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\langle \sum_n \frac{1}{i\lambda_n + m} \right\rangle \quad \lambda_n : \text{eigenvalues of (probe) Dirac operator } D(A_\mu)$$



density of first smallest eigenvalue of massless staggered operator



Prediction from Chiral RMT;

$$\rho_s(z) = \frac{z}{2} (J_0^2(z) - J_1(z)J_{-1}(z)), \quad z := \lambda V \Sigma$$

$J_m$  : Bessel fcn.

$$\rho_1(\lambda_{\min}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} c (c\lambda_{\min})^{3/2} I_{3/2}(c\lambda_{\min}) e^{-\frac{1}{2}(c\lambda_{\min})^2},$$

$$c := V \Sigma \quad I_m : \text{mod Bessel fcn.}$$

[Shuryak, Verbaarschot, (1993) / Leutwyler, Smilga, (1992) / ...]

[Forrester, (1993)]

[Berbenni-Bitsch, Meyer, Schäfer, Verbaarschot, Wettig, (1997)]

# Summary & Prospects

【本研究】 格子QCD配位を使って SU(3) QCD w/ quarks を研究

- なぜ Polyakov loop が閉じ込めのよい“秩序変数”なのか？

→ SU(3) Haar random distributionからのズシを特徴づける

- “相転移”の過程での中間領域はどうなっている？

→ 非自明な中間領域の存在を示唆

our work



Large N 理論  
の知見

【課題】

- 中間相を特徴づけるスケールや物理的現象は？

Large N ではglobal symmetry のSSBと対応

[Hanada, Holden, Knaggs, O'Bannon, (2021)]

QCD の chiral 対称性と関連しているのか？

- さらに詳細な数値解析

温度方向の格子点を増やす、高温側、他の物理量との比較、物理点上、…