場の理論と弦理論2023, 2023年8月4日

Krylov complexity and chaos in quantum mechanics

渡辺涼太（京都大学）

arXiv:2305.16669

橋本幸士氏（京都大）, 村田佳樹氏（日本大）, 棚橋典大氏（中央大）との共同研究

量子論におけるカオスをどのように特徴づけるか？

- 量子カオスの研究は長く、現在も発展途上

  例）隣接エネルギー準位間隔の統計分布 [Bohigas, Giannoni, Schmit 1984]

- 量子カオス系では演算子（および状態）は時間と共に複雑に発展すると期待

  [Roberts, Stanford, Susskind 2014]

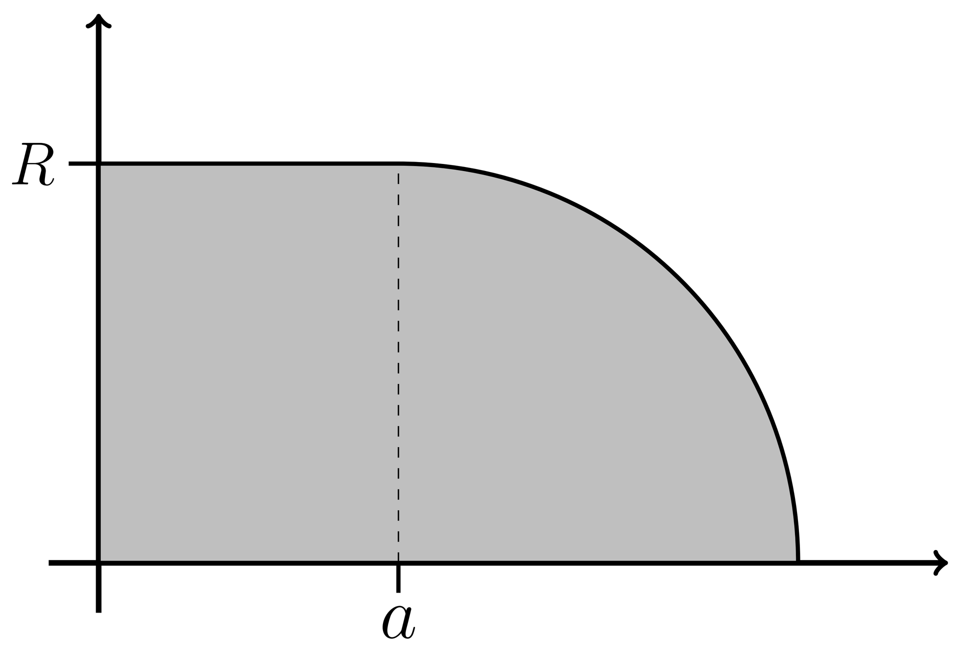
$$\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(0) + it[H, \mathcal{O}(0)] + \frac{(it)^2}{2}[H, [H, \mathcal{O}(0)]] + \cdots$$

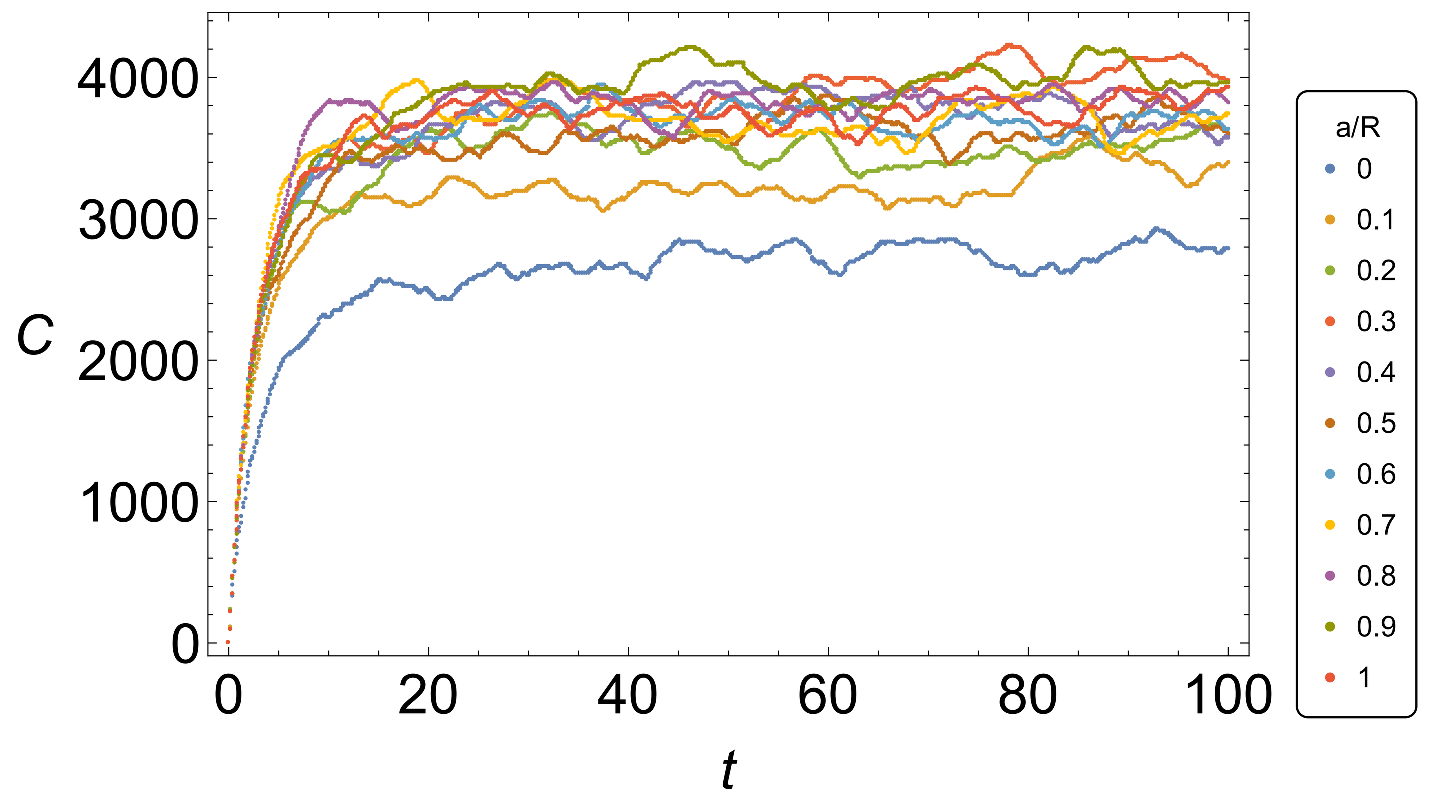
- 複雑性と系のカオス性の指標としてKrylov複雑性が提案された [Parker et al. 2018]
- Krylov複雑性はLanczos係数によって特徴づけられる

カオス性とLanczos係数の振る舞いに相関がある

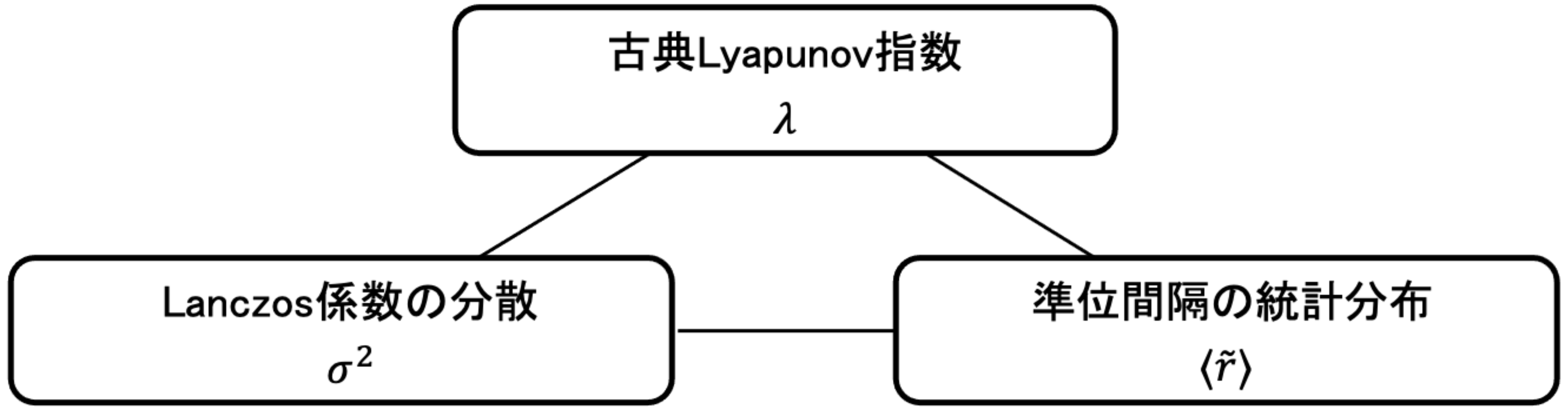
[Hashimoto, Murata, Tanahashi, Watanabe 2023]

- スタジアムビリヤード系でKrylov複雑性を数値的に評価

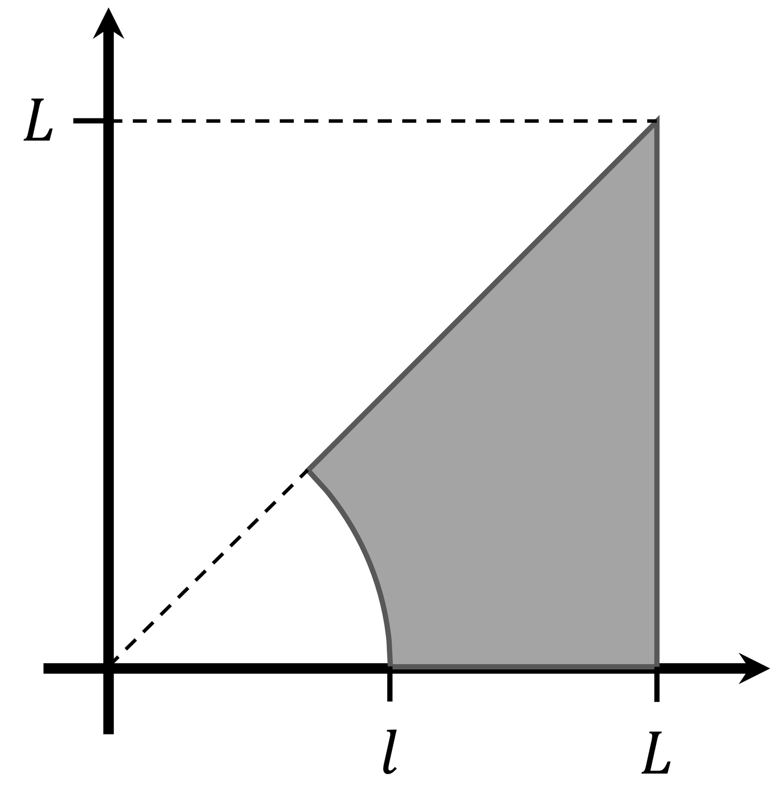




- ビリヤードの形状を変形したときに次の3つの量の間に相関を確認



- Lanczos係数の振る舞いは量子カオスの良い指標となりうる
- 普遍性：同様の結果はSinaiビリヤードに対しても確認された



Outline

レビュー：カオスとKrylov複雑性（5）

ビリヤードにおけるKrylov複雑性（4+α）

まとめ

Outline

レビュー：カオスとKrylov複雑性（5）

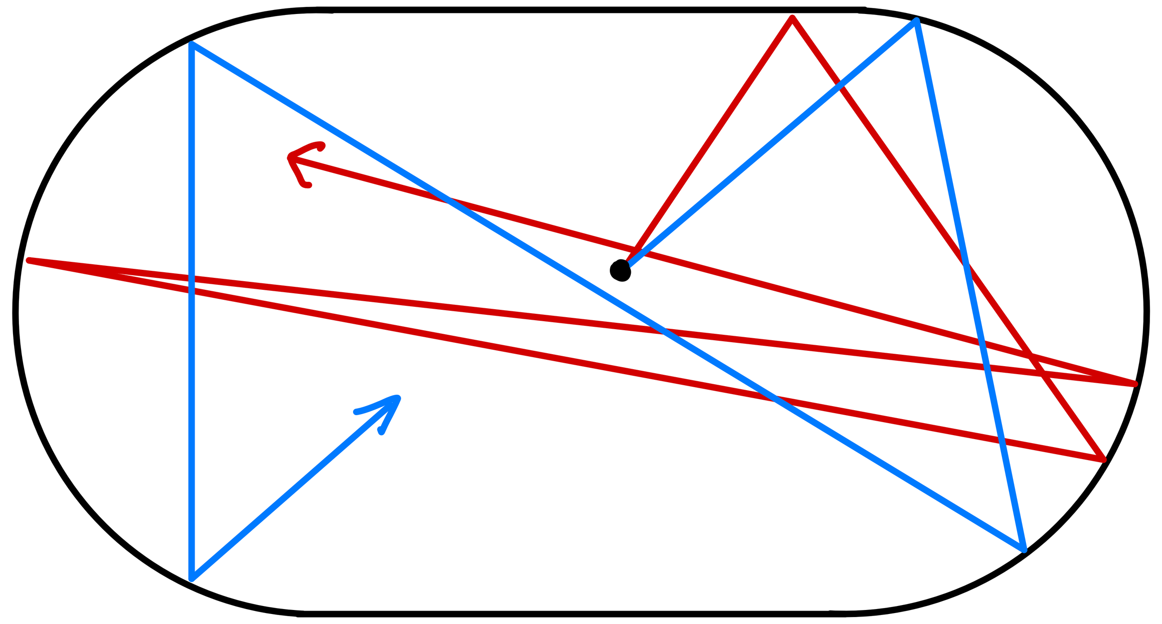
ビリヤードにおけるKrylov複雑性（4+α）

まとめ

古典カオスはLyapunov指数で測る

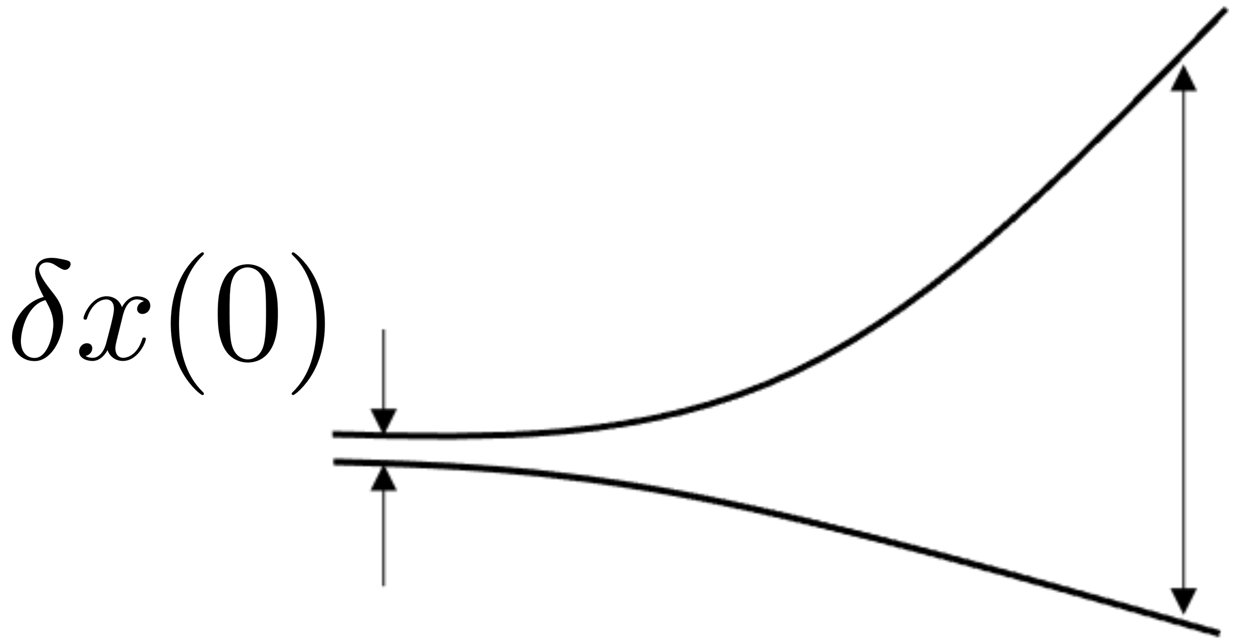
古典カオスとは･･･

「非線形な決定論的力学系における、非周期的で初期値鋭敏性を持つ有界な運動」



初期値鋭敏性とは･･･

- 初期値の小さなズレが時間と共に指数関数的に増幅される性質



$$\delta x(t) \sim \exp(\lambda t)\delta x(0)$$

λ : Lyapunov指数

- Lyapunov指数が古典系のカオスの強さを測る

量子カオス:隣接準位間隔の統計

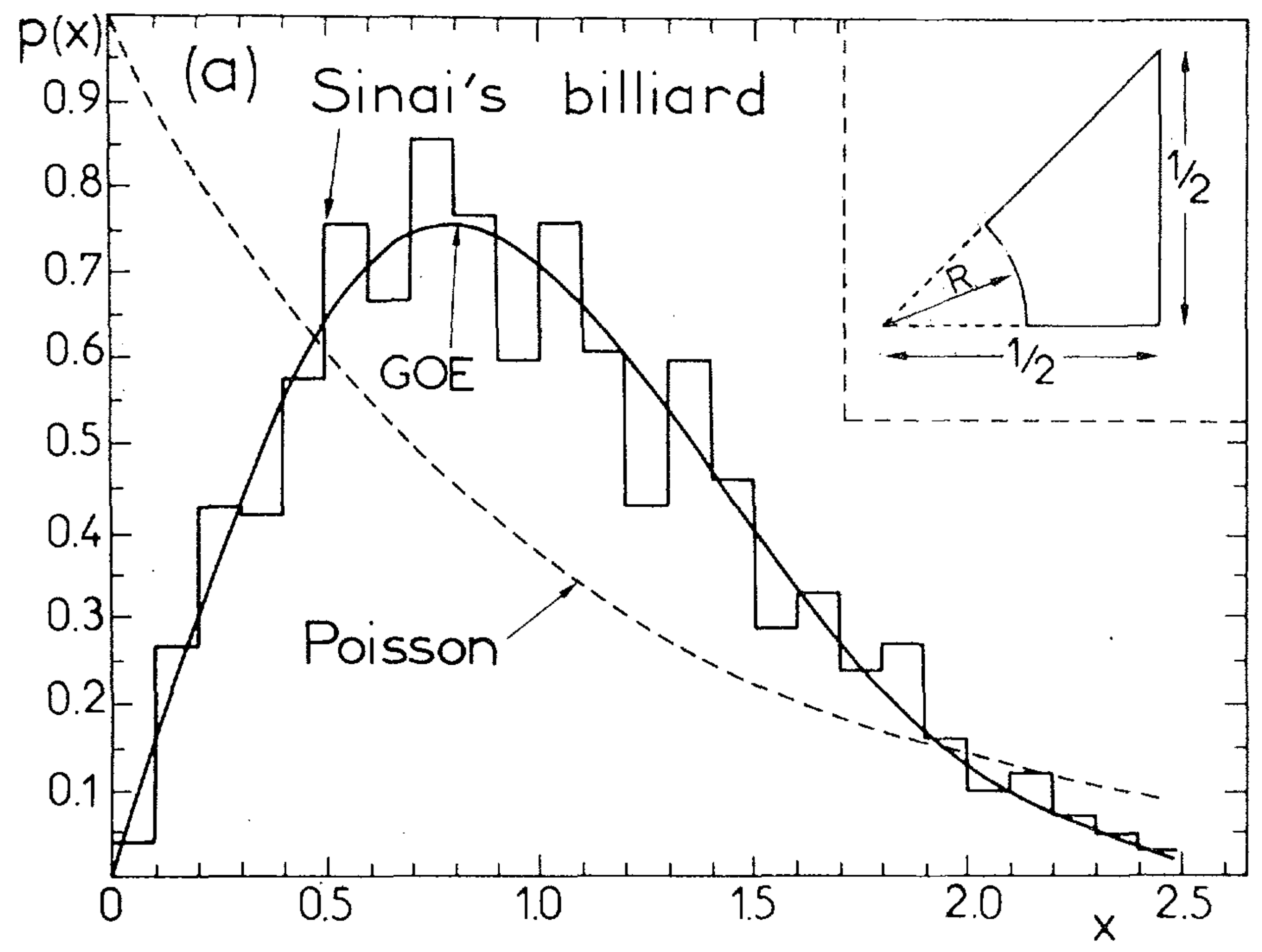
隣接量子エネルギー準位の間隔の統計分布に注目

- カオスならWigner–Dyson分布 [Bohigas, Giannoni, Schmit 1984]

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\pi s^2/4} \qquad \langle \tilde{r} \rangle \simeq 0.536$$

- 可積分ならPoisson分布 [Berry, Tabor 1977]

$$P(s) = e^{-s} \qquad \langle \tilde{r} \rangle \simeq 0.386$$



[Bohigas, Giannoni, Schmit 1984]

ただし、分布を特徴づけるパラメータ $\langle \tilde{r} \rangle$ [Oganesyan, Huse 2007] [Atas, Bogomolny, Giraud, Roux 2013]

$$\tilde{r}_n \equiv \frac{\min(s_n, s_{n-1})}{\max(s_n, s_{n-1})} \qquad (s_n = E_{n+1} - E_n)$$

演算子の複雑化をKrylov複雑性で測る

[Parker, Cao, Avdoshkin, Scaffidi, Altman 2018]

カオス系ではHeisenberg演算子は時間と共に複雑化

$$\mathcal{O}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathcal{L}^n \mathcal{O} \qquad (\mathcal{L} \equiv [H, \cdot\,],\, \mathcal{L}^2 \equiv [H,[H,\cdot\,]], \cdots)$$

Krylov複雑性とは、交換子の個数の期待値のようなもの

1. 演算子空間に内積を導入 $(\mathcal{O}|\mathcal{O}') \equiv \mathrm{Tr}[\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}']$
2. GS正規直交化（Lanczos法） $\{\mathcal{L}^n \mathcal{O}\} \to \{\mathcal{O}_n\}$
3. Heisenberg演算子を展開 $\mathcal{O}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varphi_n(t) \mathcal{O}_n$
4. Krylov複雑性 $C(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n |\varphi_n(t)|^2$

$$(\mathcal{O}_m|\mathcal{L}|\mathcal{O}_n) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Lanczos係数が時間発展を決める

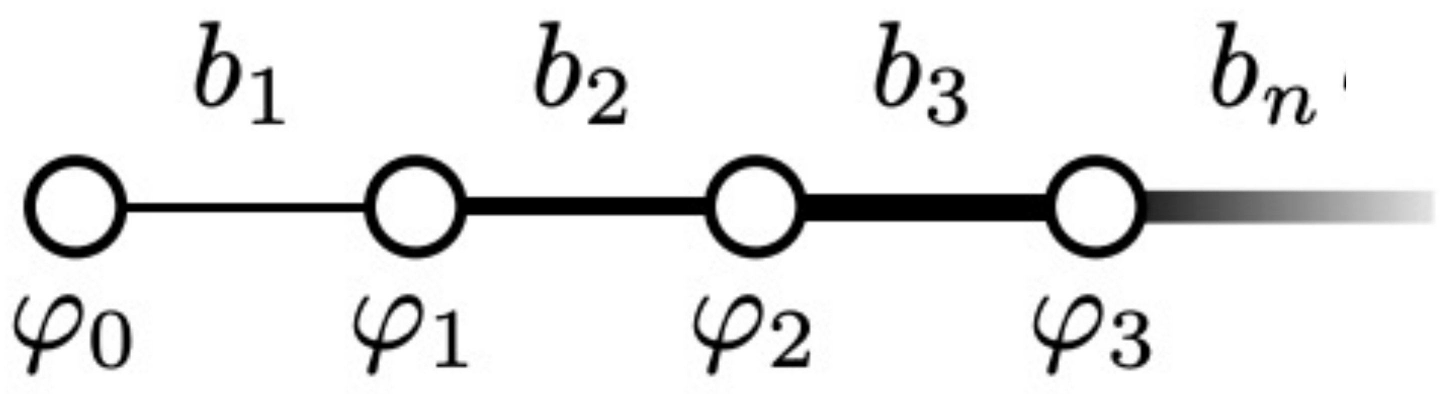
Heisenberg方程式

$$i\dot{O}(t) = \mathcal{L}\mathcal{O}(t)$$

$$\mathcal{O}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varphi_n(t)\mathcal{O}_n$$

$$(\mathcal{O}_m|\mathcal{L}|\mathcal{O}_n) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

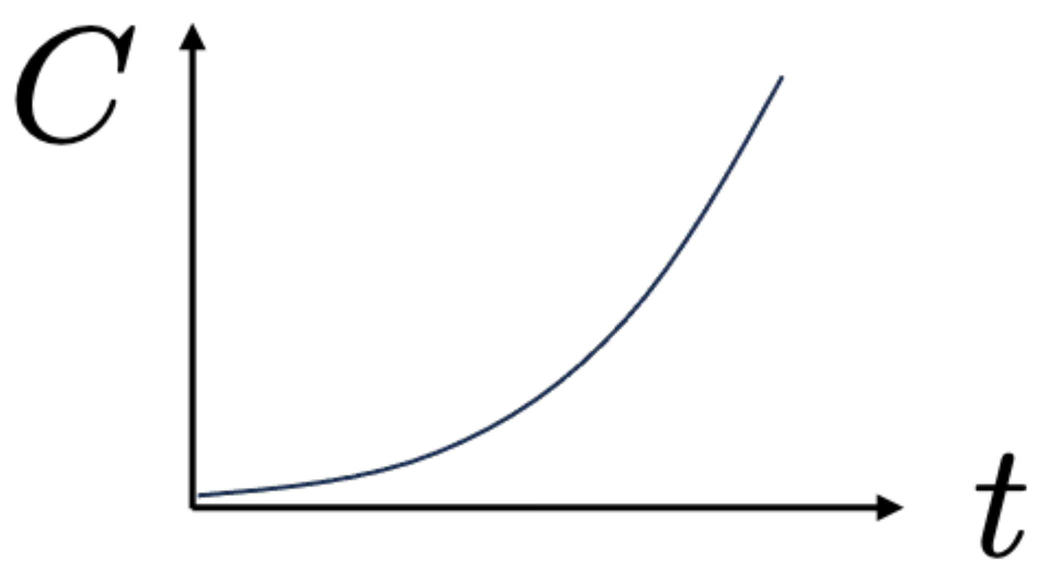
$$\dot{\varphi}_n = b_n\varphi_{n-1} - b_{n+1}\varphi_{n+1}$$



[Parker, Cao, Avdoshkin, Scaffidi, Altman 2018]

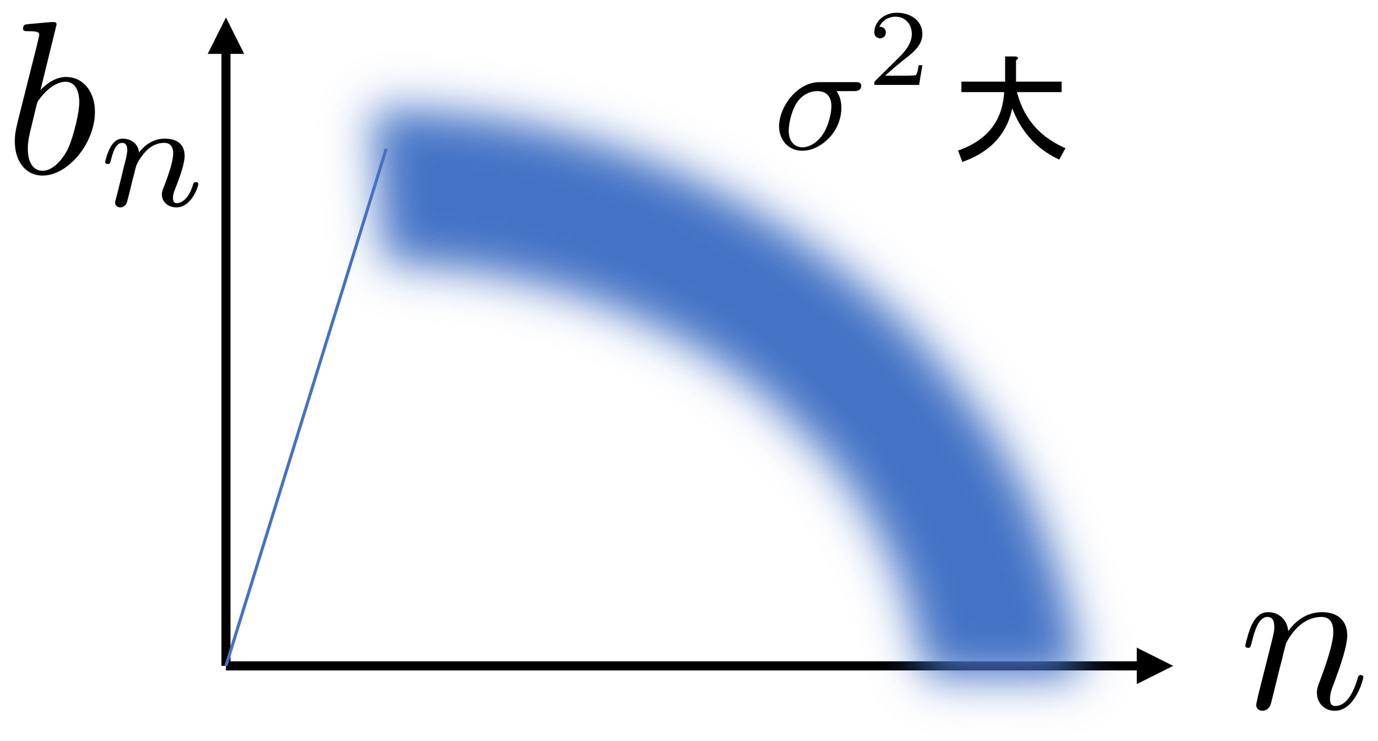
カオス性とKrylov複雑性

- 予想：量子カオス系ではKrylov複雑性は指数増大する [Parker et al. 2018]

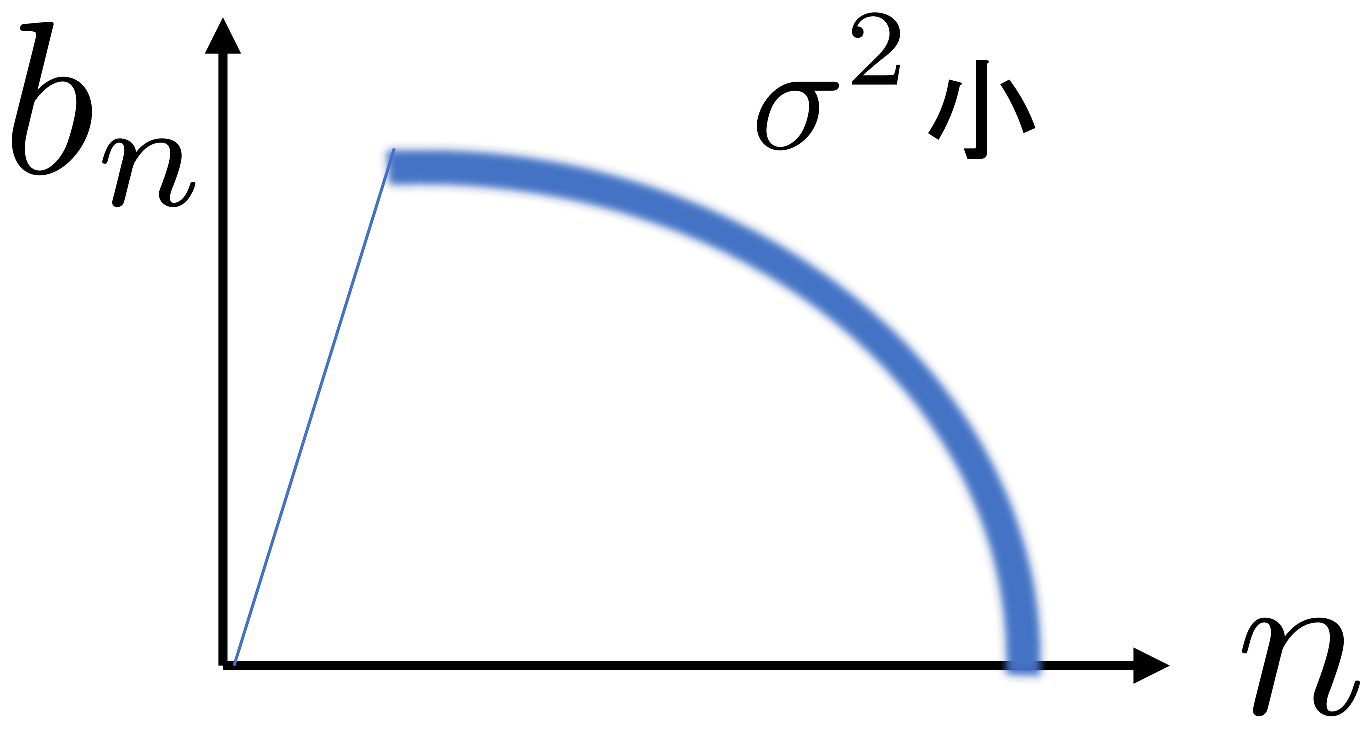


- 予想：Lanczos係数の振る舞いについて、[Rabinovici, Sánchez-Garrido, Shir, Sonner 2021, 2022]

$$\sigma^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 , \qquad x_i \equiv \ln\left(\frac{b_{2i-1}}{b_{2i}}\right)$$



可積分



カオス

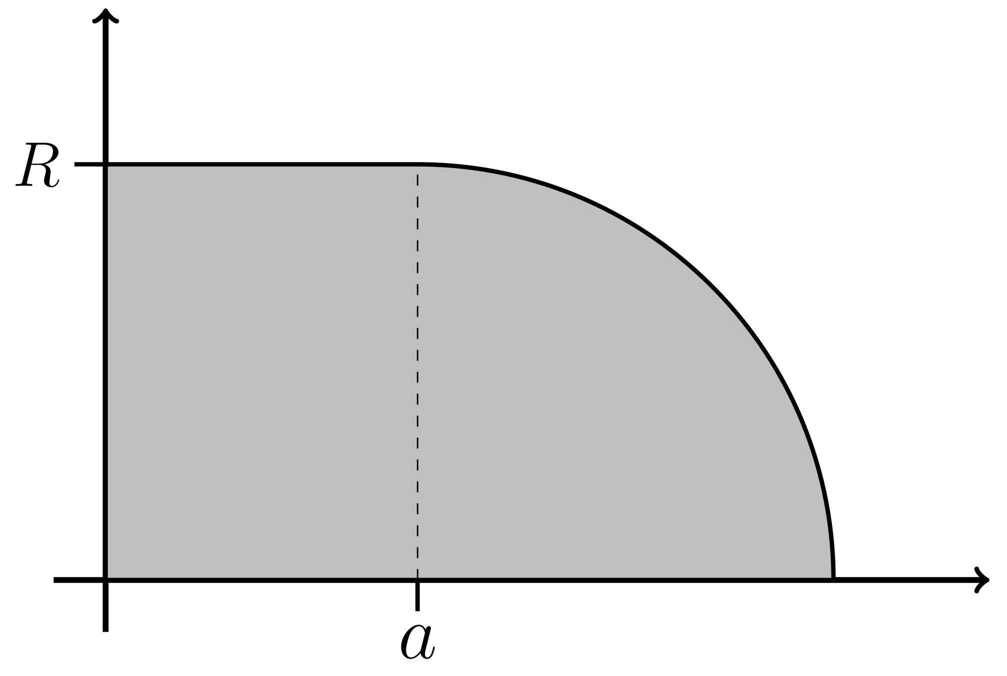
Outline

レビュー：カオスとKrylov複雑性（5）

ビリヤードにおけるKrylov複雑性（4+α）

まとめ

量子力学におけるKrylov複雑性



量子力学系　$H = p_1^2 + p_2^2 + V(x, y)$

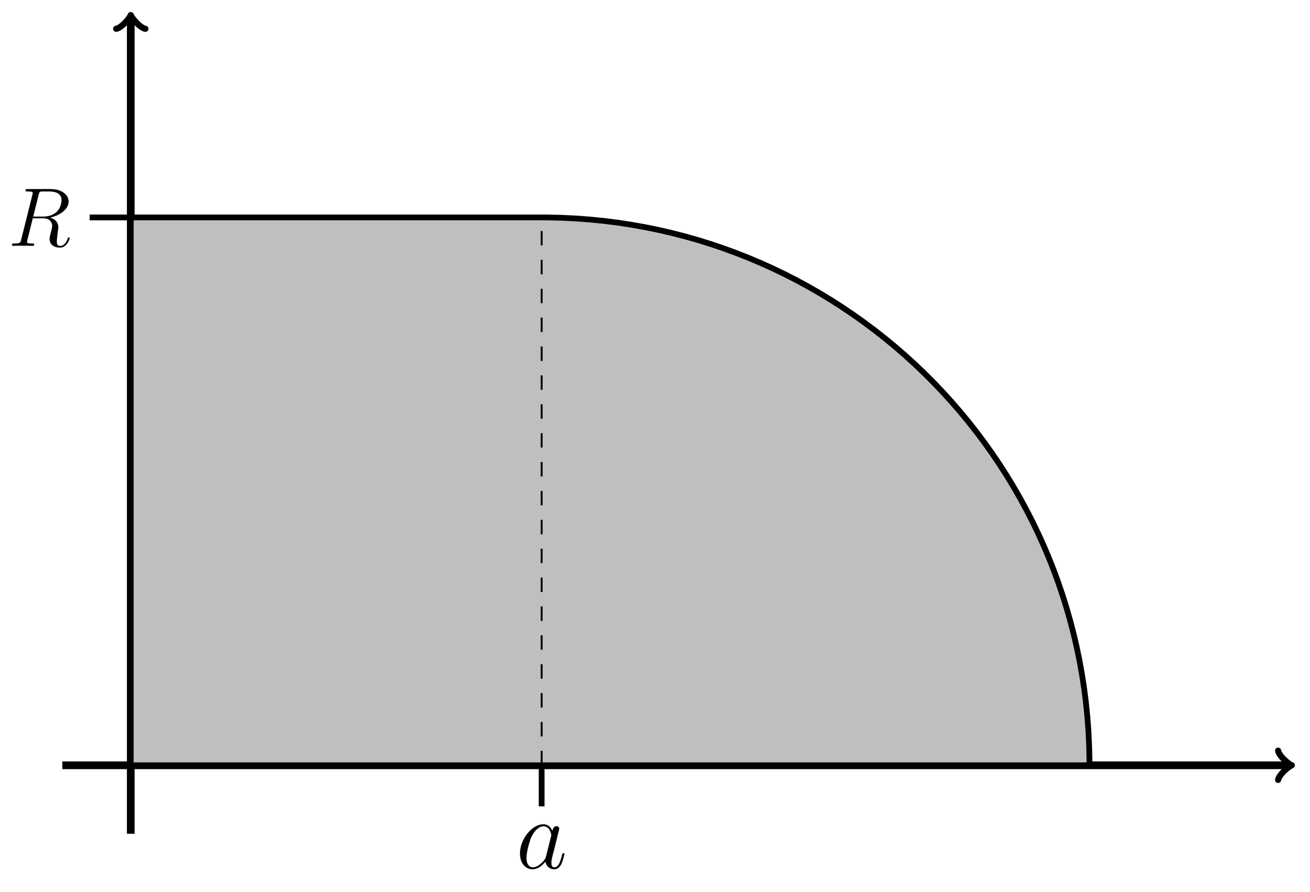
Krylov複雑性を以下のように評価:

- 無限個のエネルギー準位のうち、初めの$N_{\mathrm{max}} = 100$ 個のみに注目する
- シュレーディンガー方程式を数値的に解く
- 運動量演算子をエネルギー固有状態について行列表示

$$P_{mn} \equiv \langle m|p_1|n\rangle, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad m, n = 1, \cdots, N_{\mathrm{max}}$$

- Lanczos法によって演算子を正規直交化し、Krylov複雑性を計算

Classical/quantum chaos in the stadium billiard

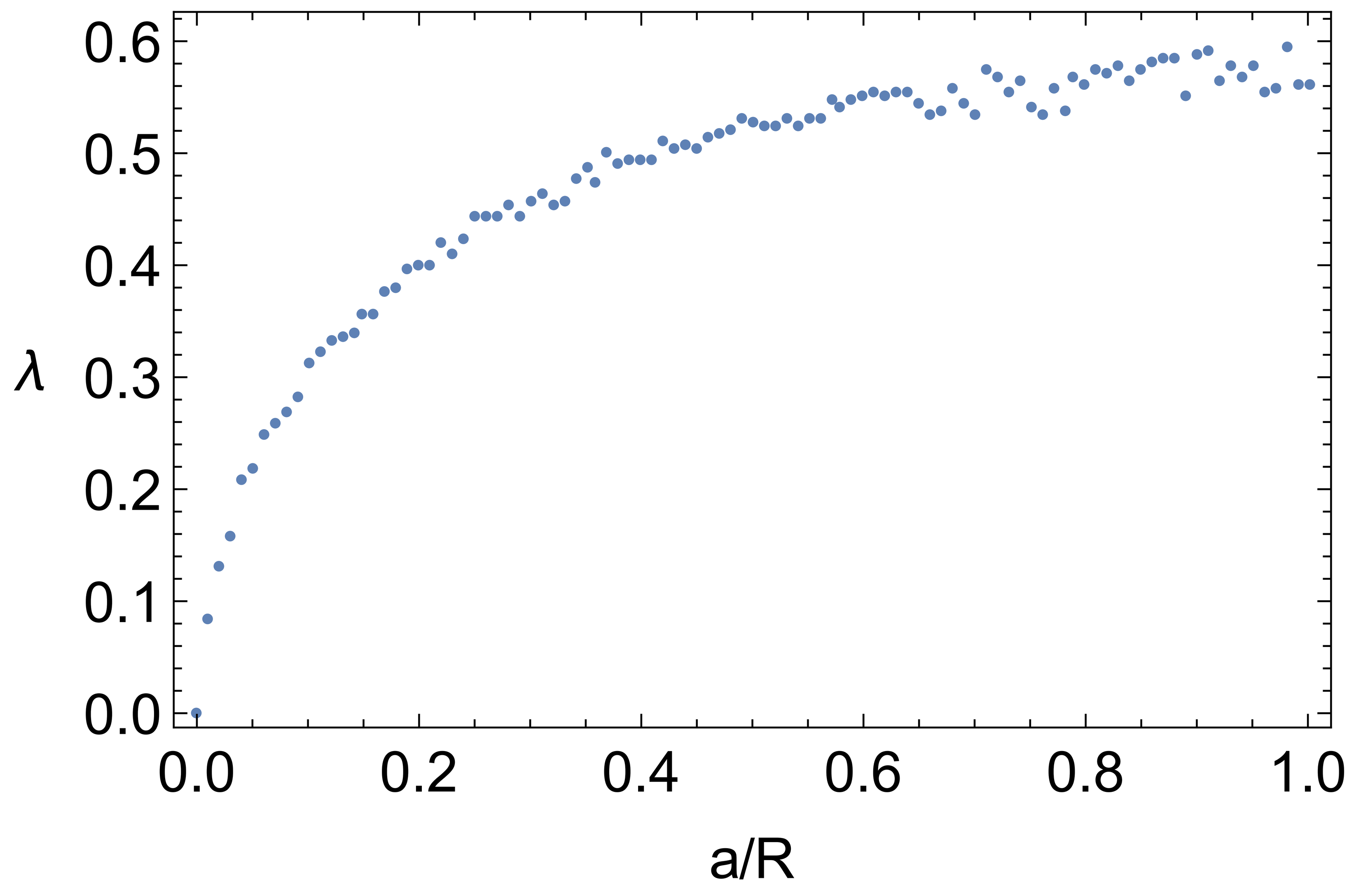


The geometry is characterized by a/R

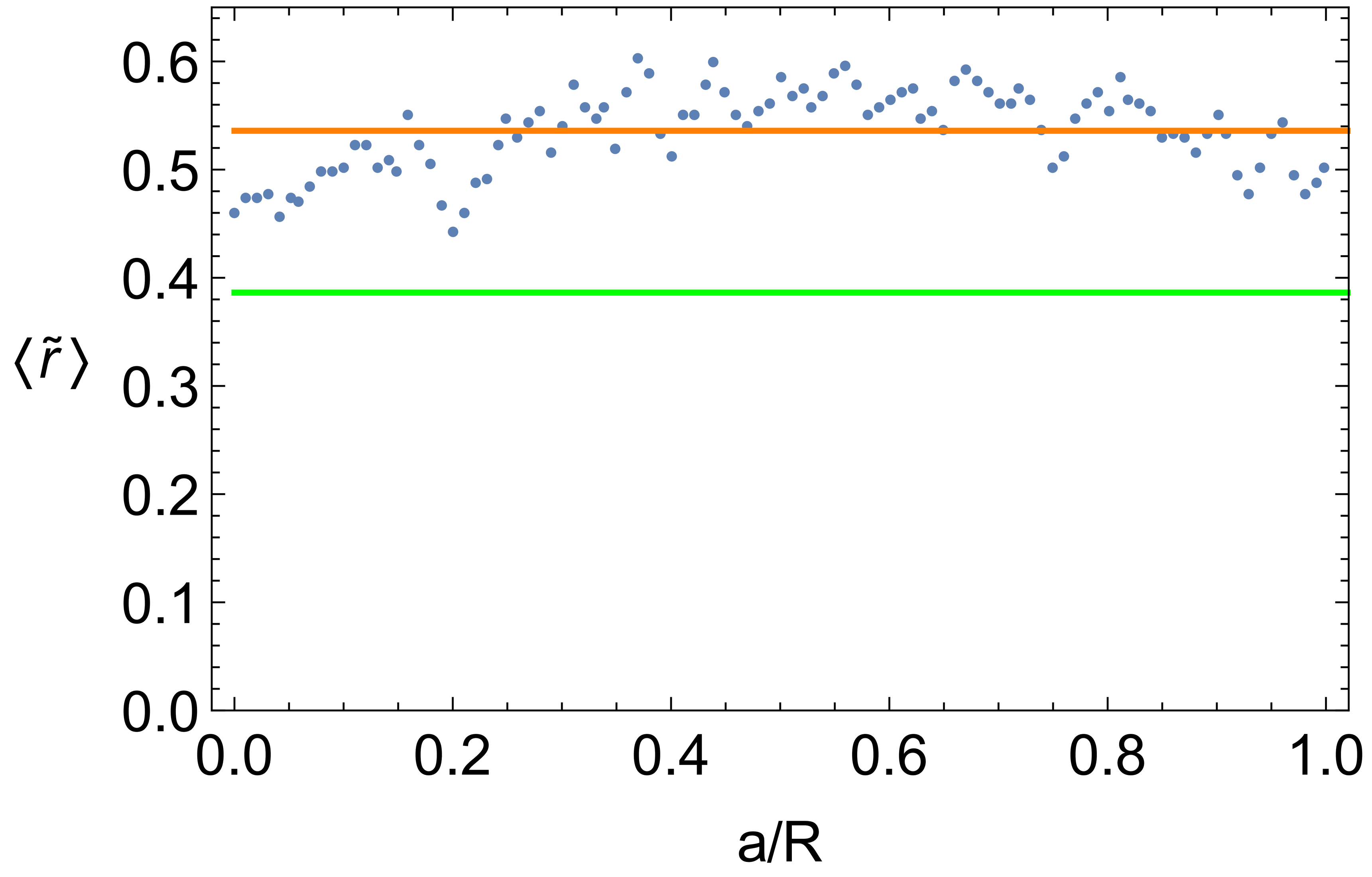
$a/R = 0$: non-chaotic

$a/R > 0$: chaotic

Classical Lyapunov exponent

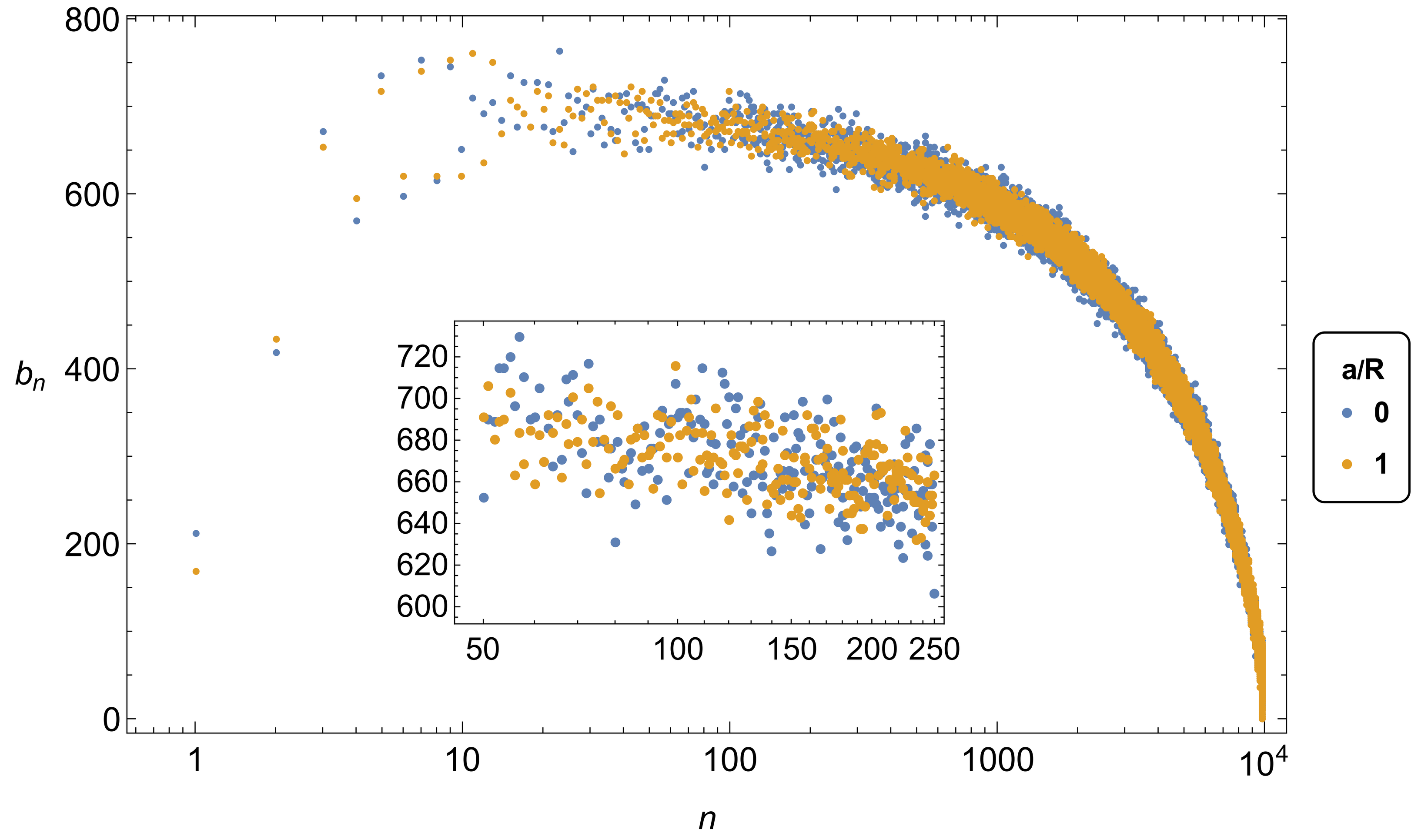


The ratio of consecutive spacings

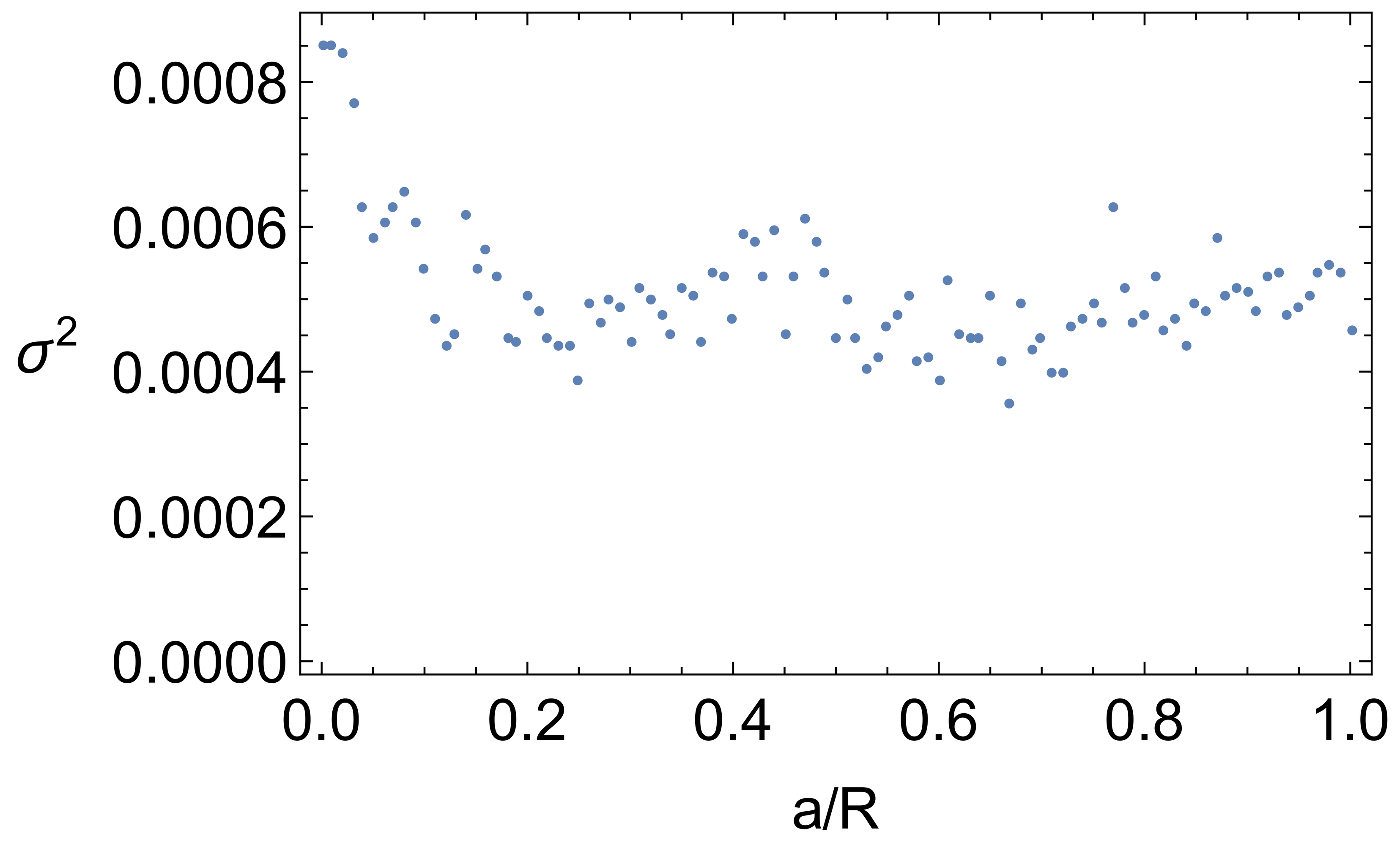


Krylov operator complexity

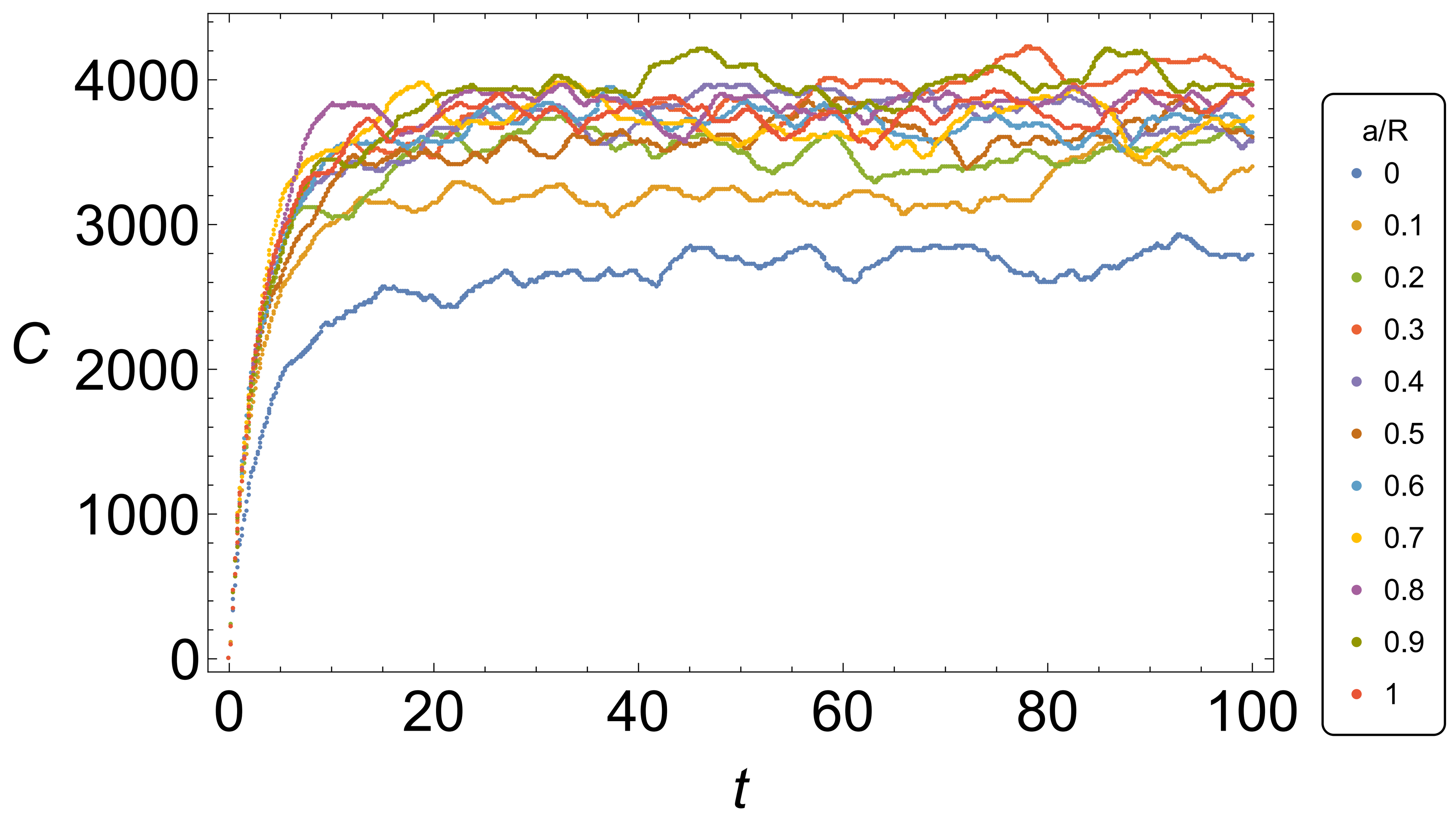
Lanczos coefficients



Variances



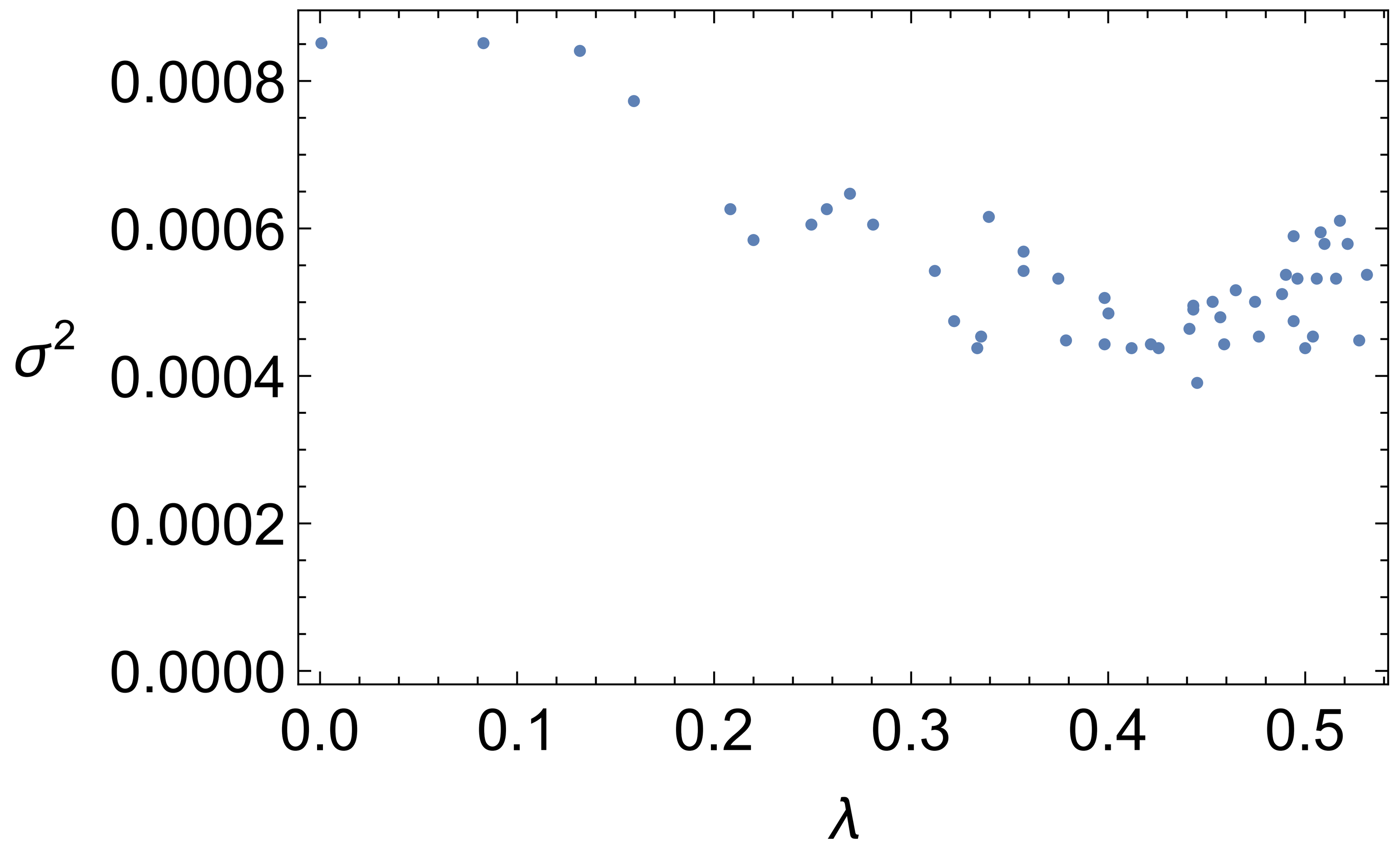
Krylov complexity

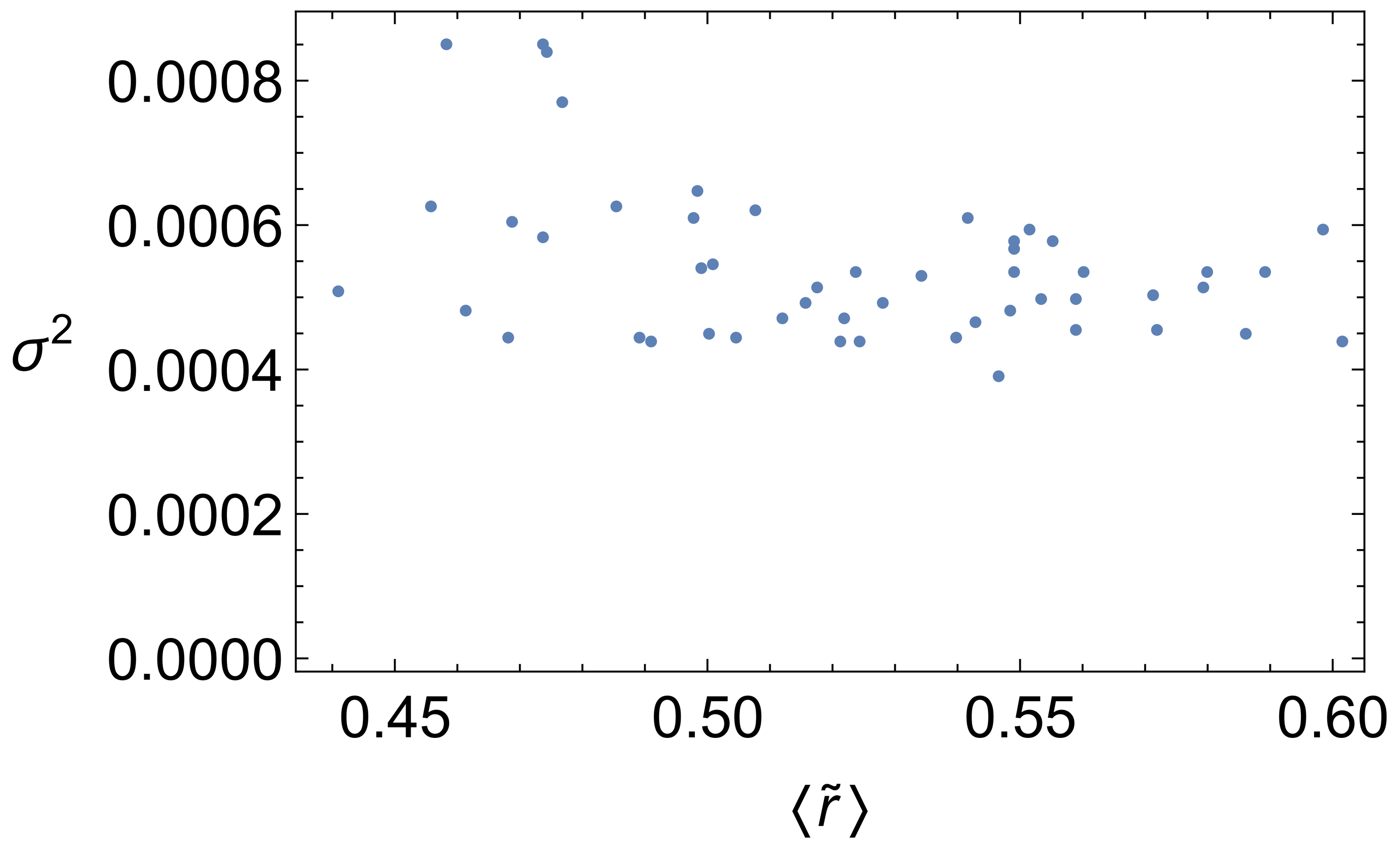


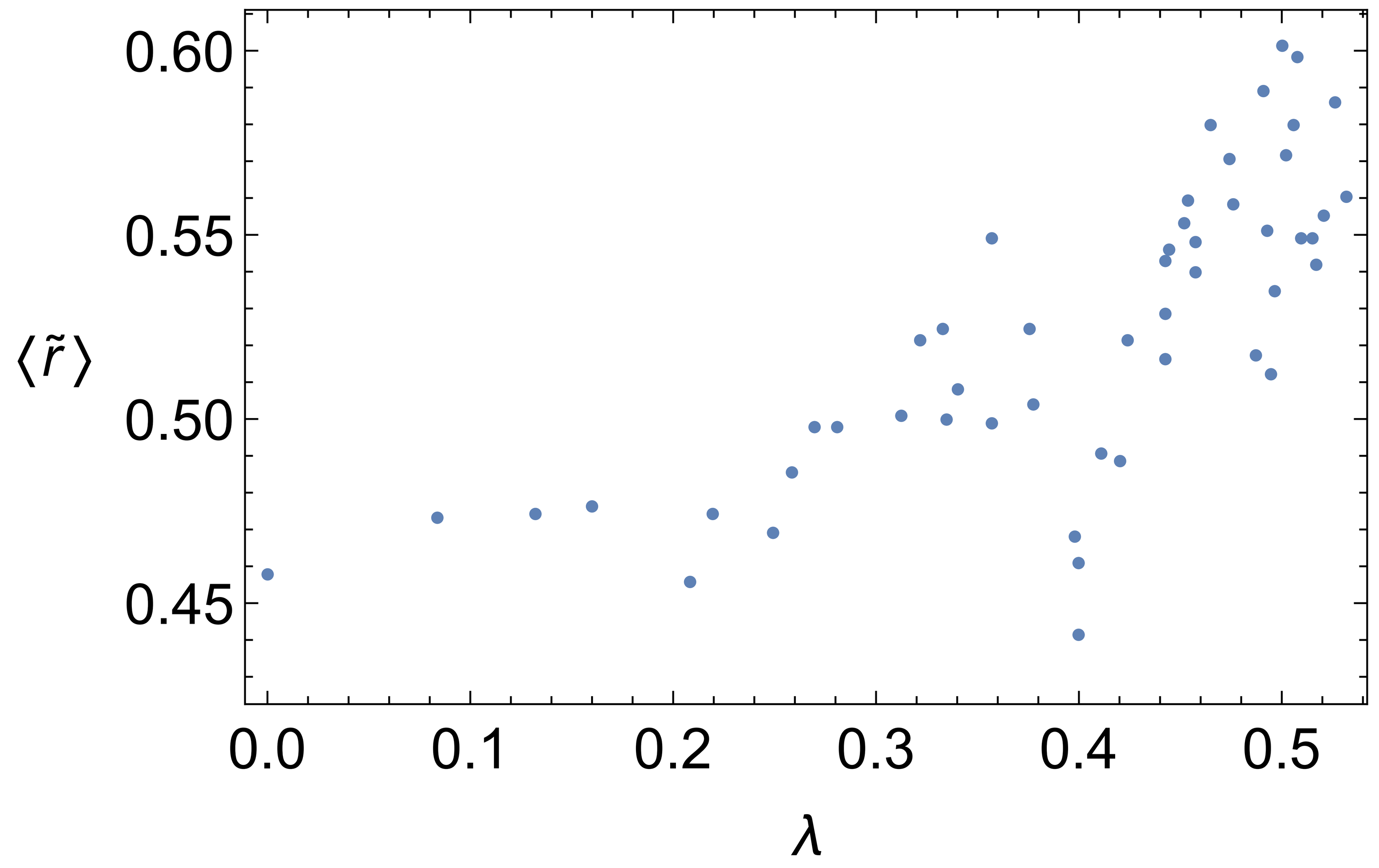
$$\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}(x_i) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \qquad x_i \equiv \ln\left(\frac{b_{2i-1}}{b_{2i}}\right)$$

- The variance becomes larger in the non-chaotic regime compared to the chaotic regime.
- The Krylov complexity does not grow exponentially.

Correlation in the stadium billiard







Correlation coefficients

λ vs σ^2	-0.720372
$\langle \tilde{r} \rangle$ vs σ^2	-0.391709
λ vs $\langle \tilde{r} \rangle$	0.741396

- Significant correlations exist among σ^2, λ, and $\langle \tilde{r} \rangle$.
- σ^2 can be a measure of quantum chaos.

Correlation coefficients between data A and $B \equiv \dfrac{\mathrm{E}[(A-\mathrm{E}[A])(B-\mathrm{E}[B])]}{\sqrt{\mathrm{E}[(A-\mathrm{E}[A])^2]\,\mathrm{E}[(B-\mathrm{E}[B])^2]}}$

実は、量子状態に対してもKrylov複雑性は定義可能

Krylov state complexity

[Balasubramanian, Caputa, Magan, Wu 2022]

The Krylov state complexity (spread complexity) for a Schrödinger state

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} H^n |\psi\rangle$$

is defined as follows:

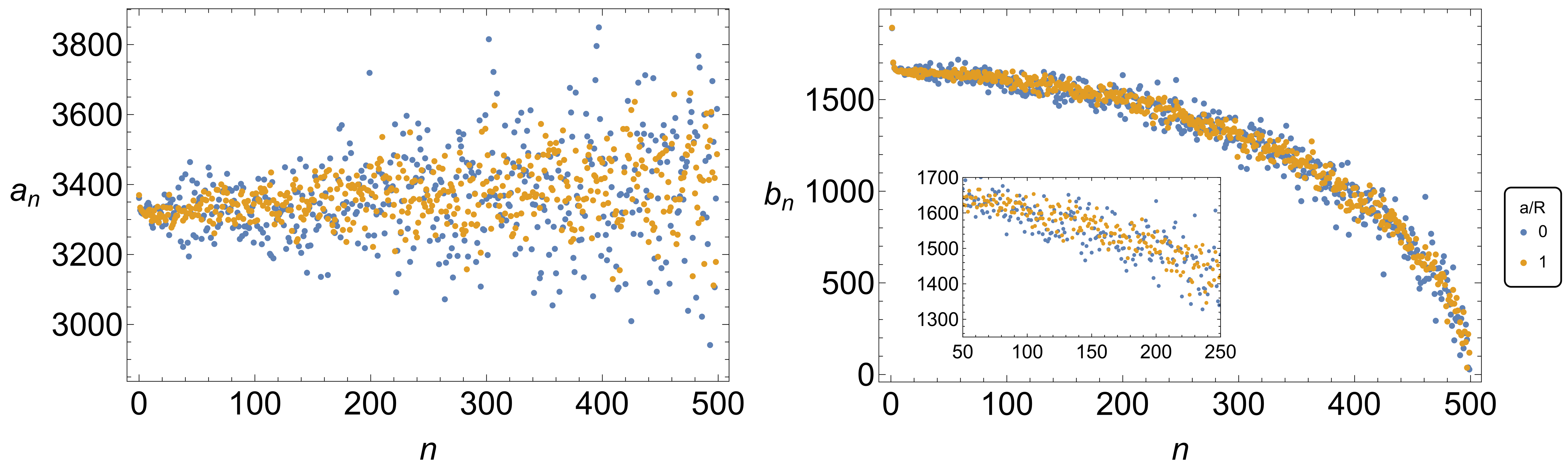
1. Orthonormalization (Lanczos): $\{H^n|\psi\rangle\} \rightarrow$ orthonormal basis $\{|K_n\rangle\}$

   (There are two kinds of Lanczos coefficients a_n, b_n in this case)

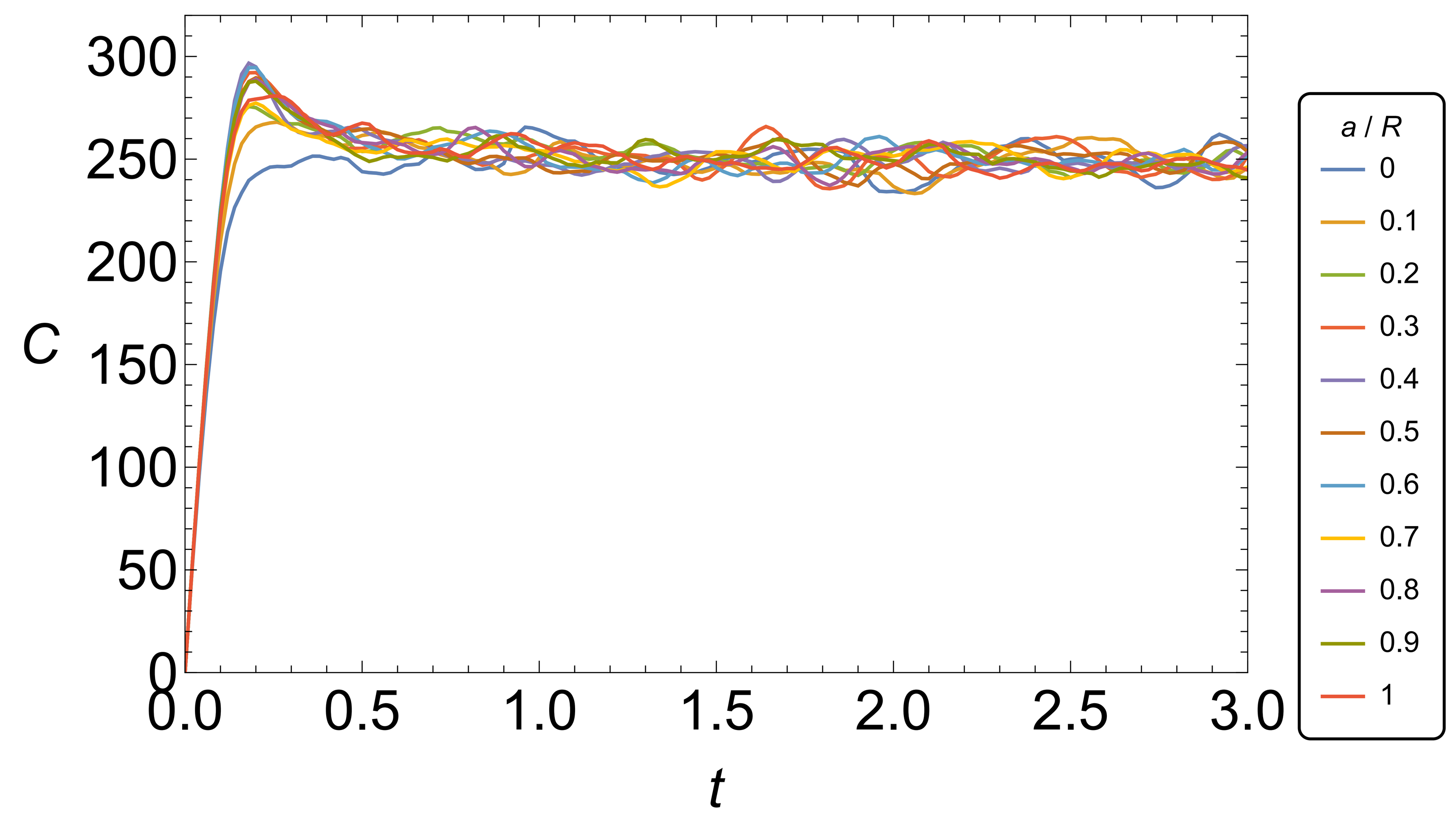
2. Expand again the Schrödinger state as $|\psi(t)\rangle = \sum_n \psi_n(t)|K_n\rangle$
3. Krylov complexity $C_\psi(t) \equiv \sum_n n|\psi_n(t)|^2$

Krylov state complexity

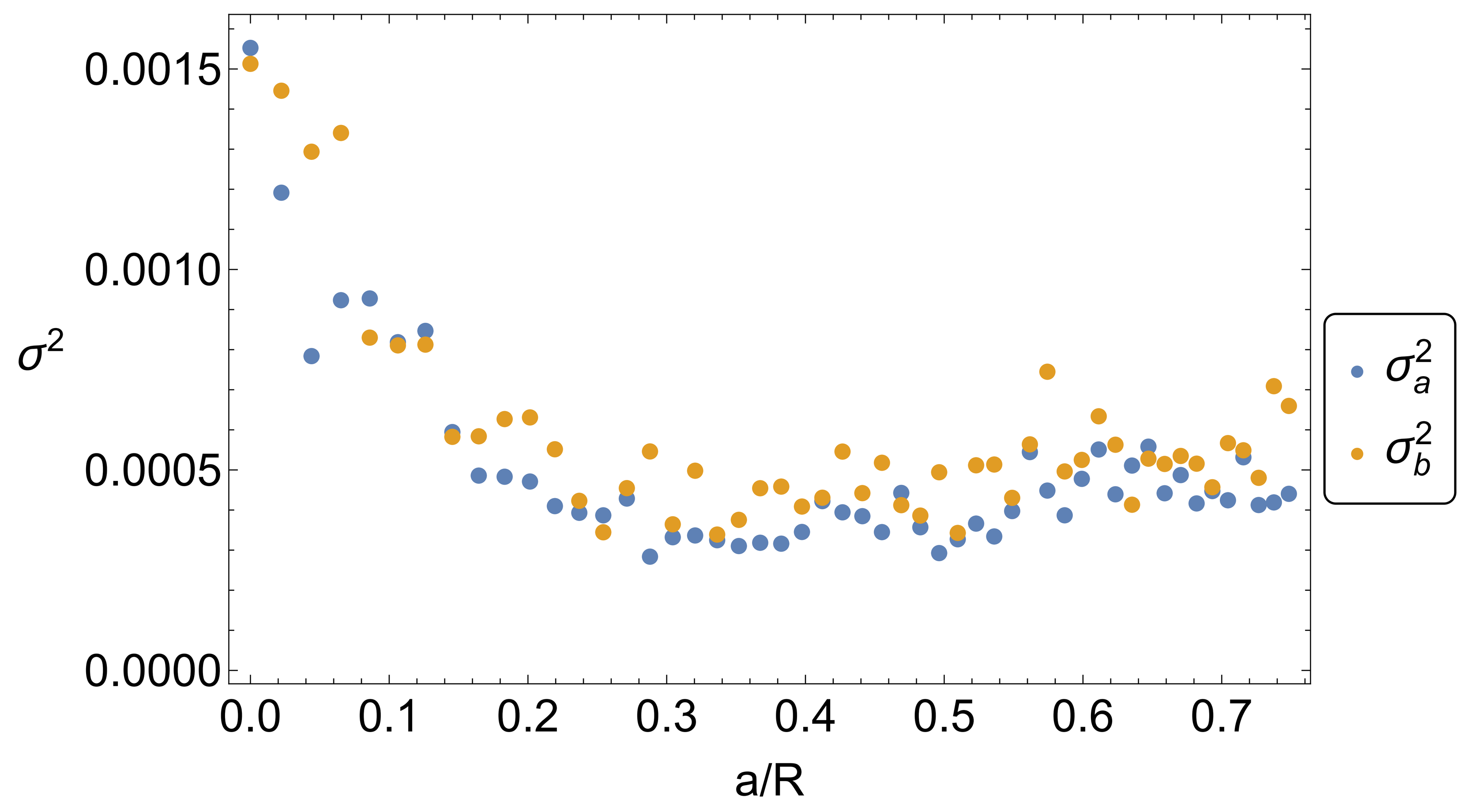
Lanczos coefficients



Krylov complexity



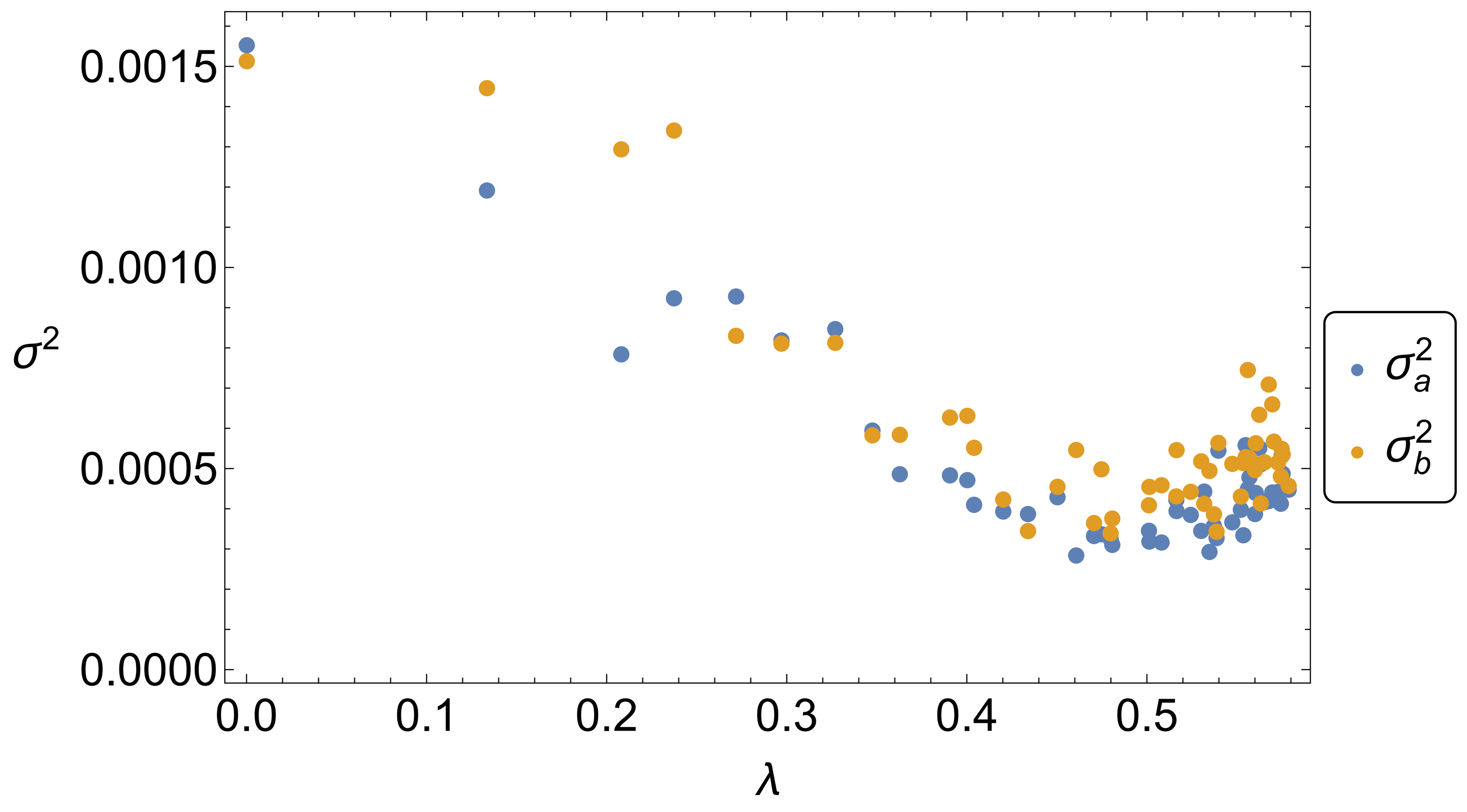
Variances

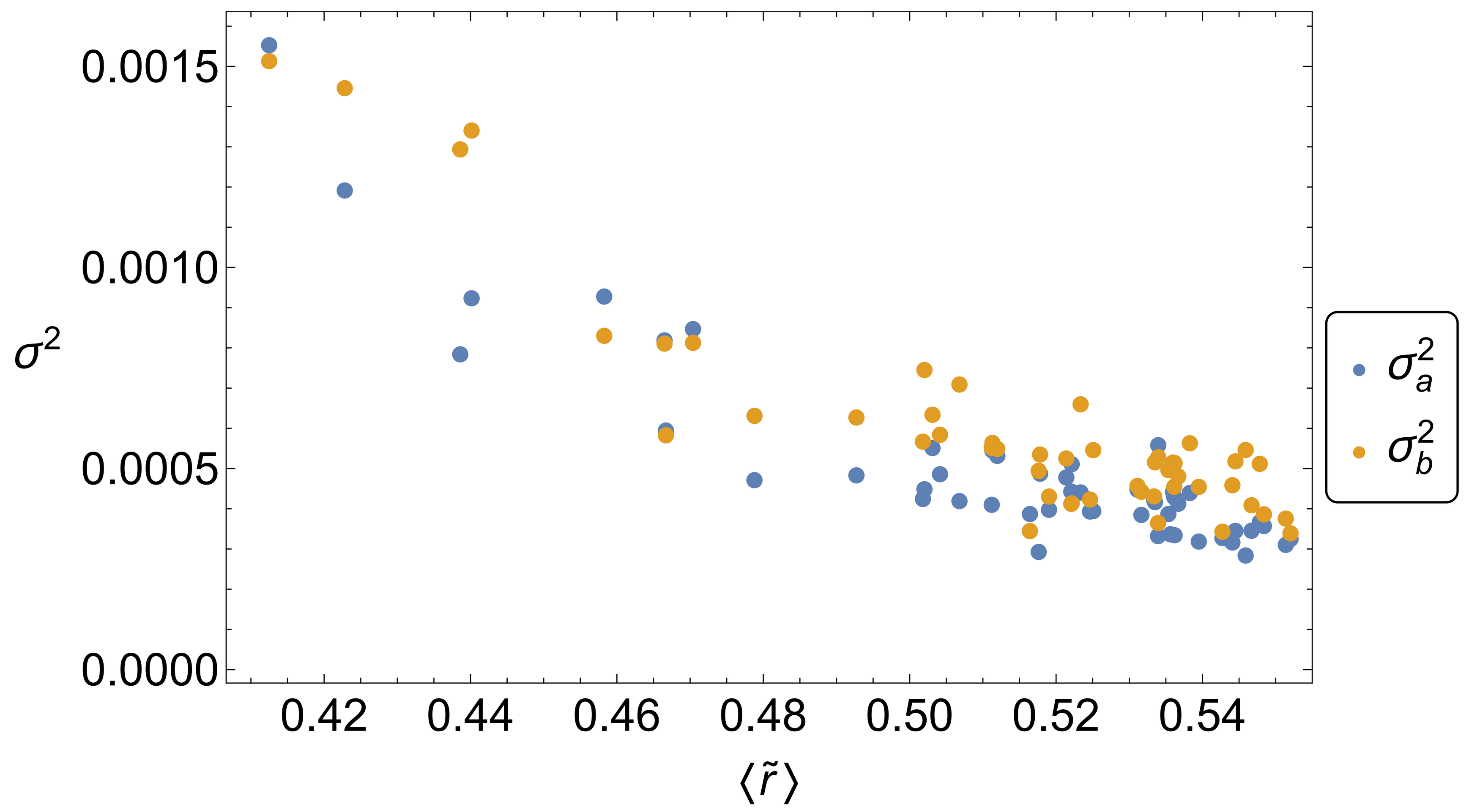


- The variance becomes larger in the non-chaotic regime compared to the chaotic regime.
- The Krylov complexity does not grow exponentially.
- The peak value of Krylov state complexity depends on a/R.

The peak behavior [Balasubramanian, Caputa, Magan, Wu 2022]
[Erdmenger, Jian, Xian 2023]

Correlation in the stadium billiard





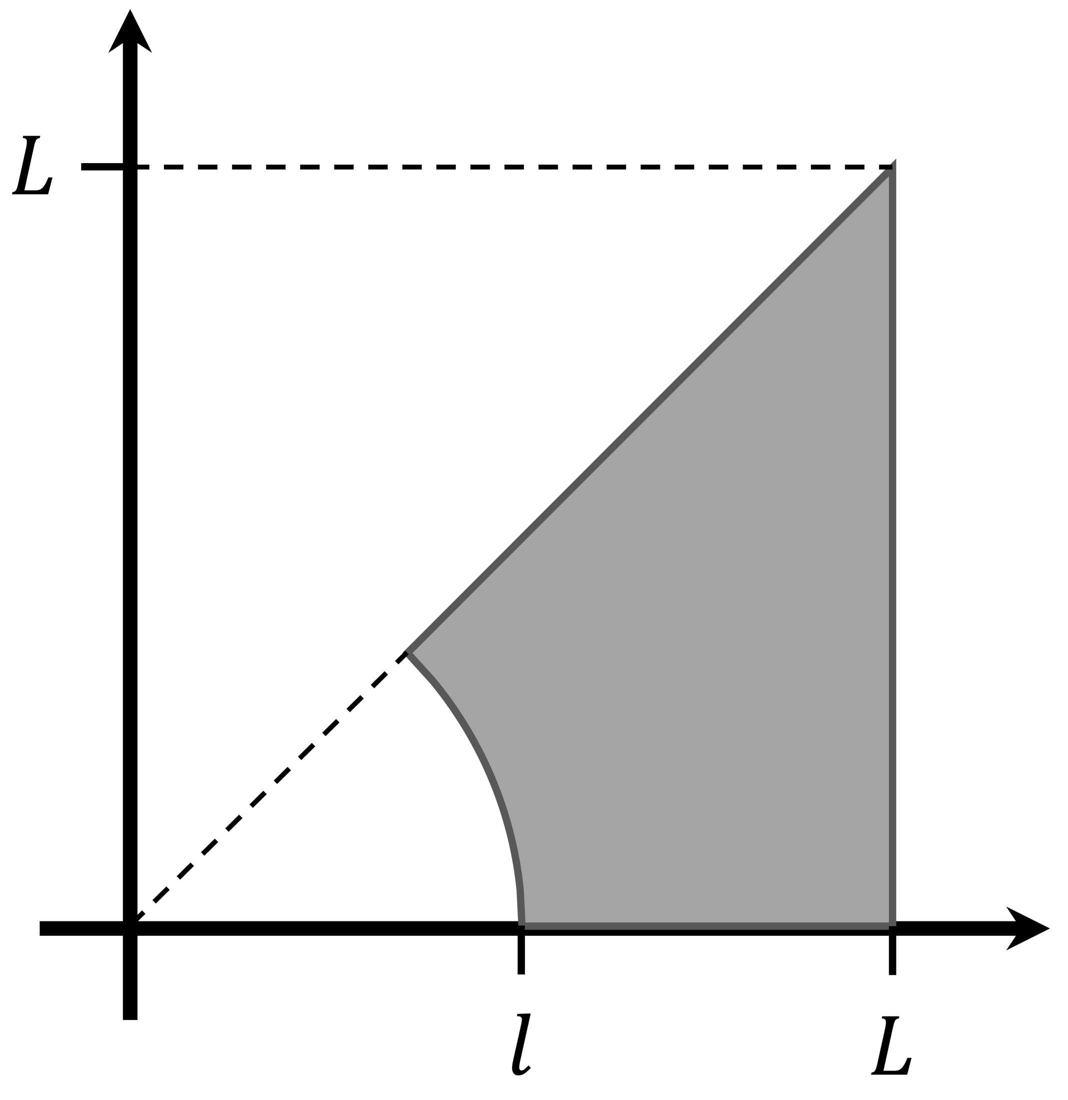
Correlation coefficients

λ vs σ_a^2	-0.832395
λ vs σ_b^2	-0.806238
$\langle \tilde{r} \rangle$ vs σ_a^2	-0.891642
$\langle \tilde{r} \rangle$ vs σ_b^2	-0.893569

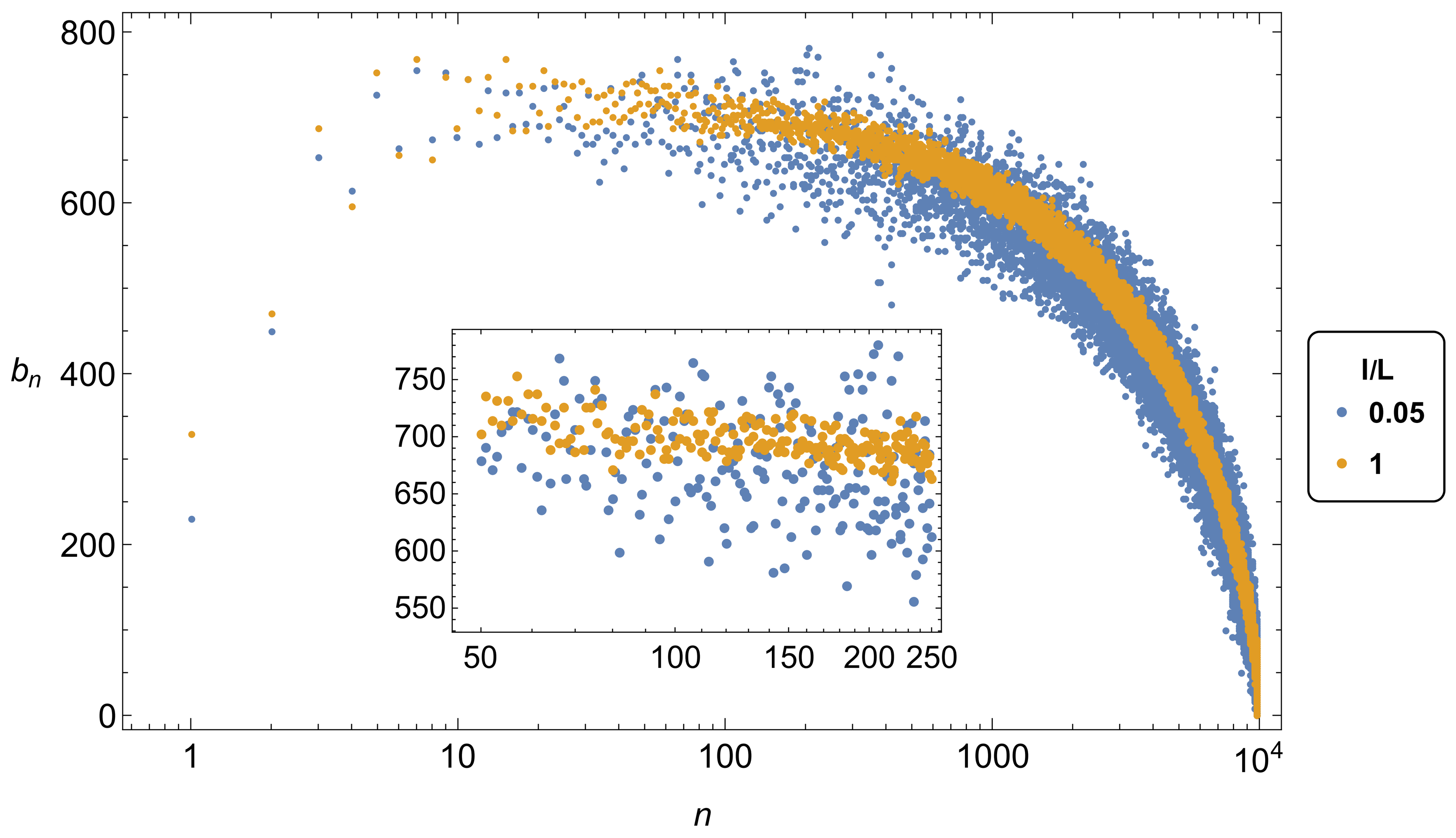
- A clear correlation exists between $\sigma_{a,b}^2$, λ, and $\langle \tilde{r} \rangle$.
- $\sigma_{a,b}^2$ can be a measure of quantum chaos.

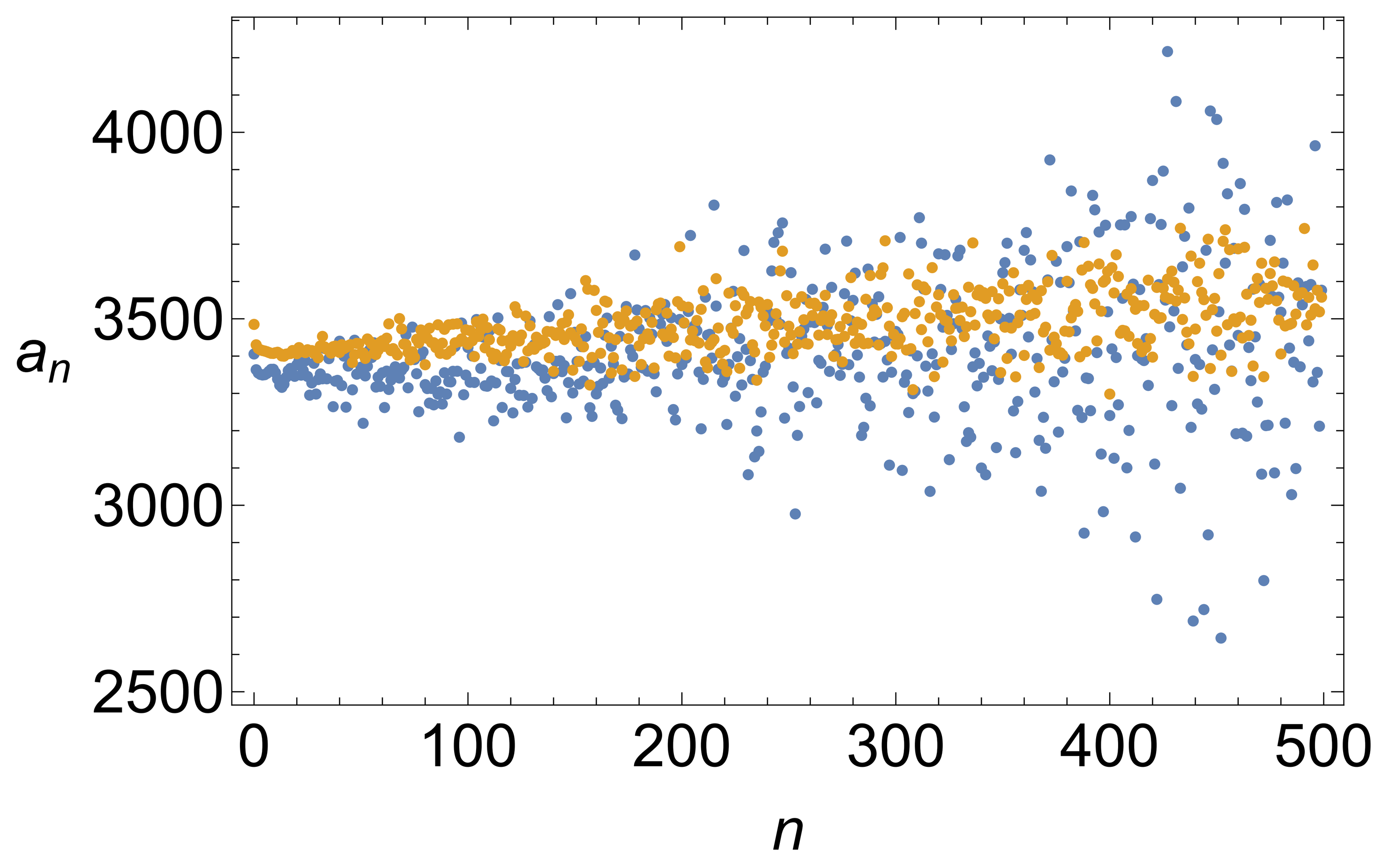
他のビリヤード系ではどうなるか？

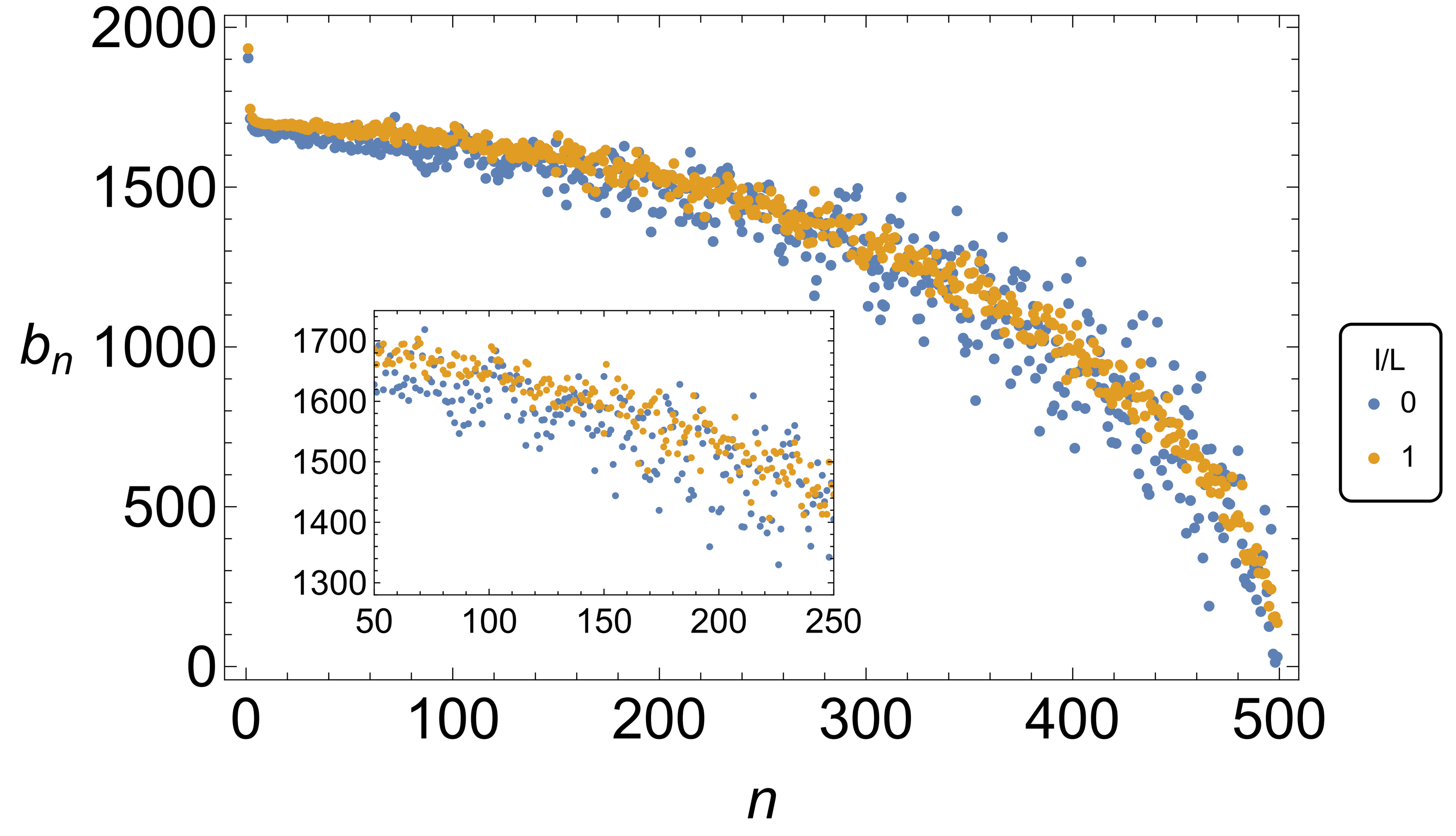
Universality: the Sinai billiard



- Again, the variance of Lanczos coefficients becomes larger in the non-chaotic regime compared to the chaotic regime.
- The result may be universal for generic quantum mechanics.







Outline

レビュー：カオスとKrylov複雑性（5）

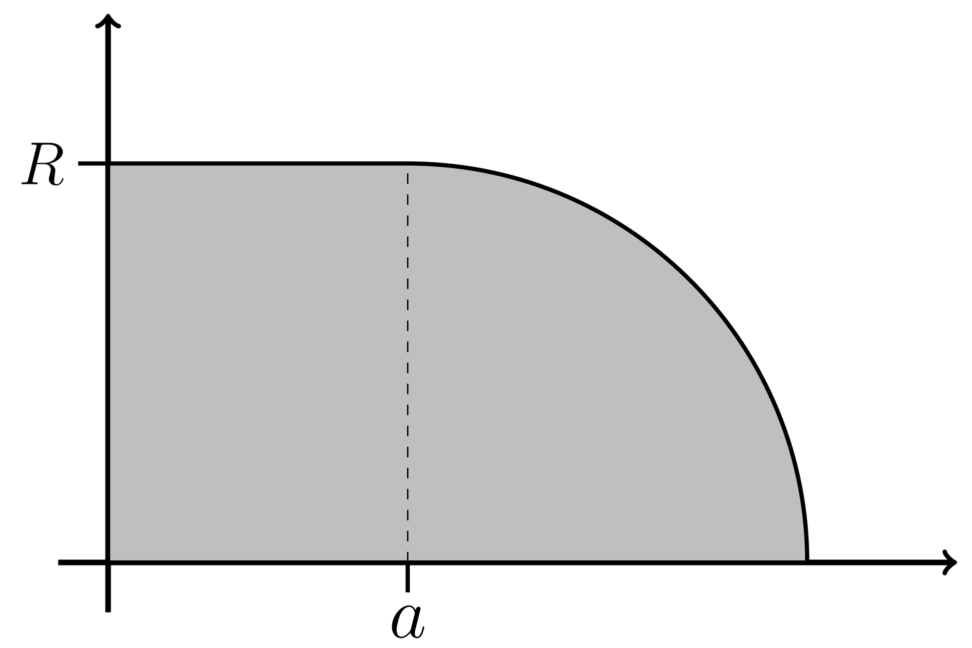
ビリヤードにおけるKrylov複雑性（4+α）

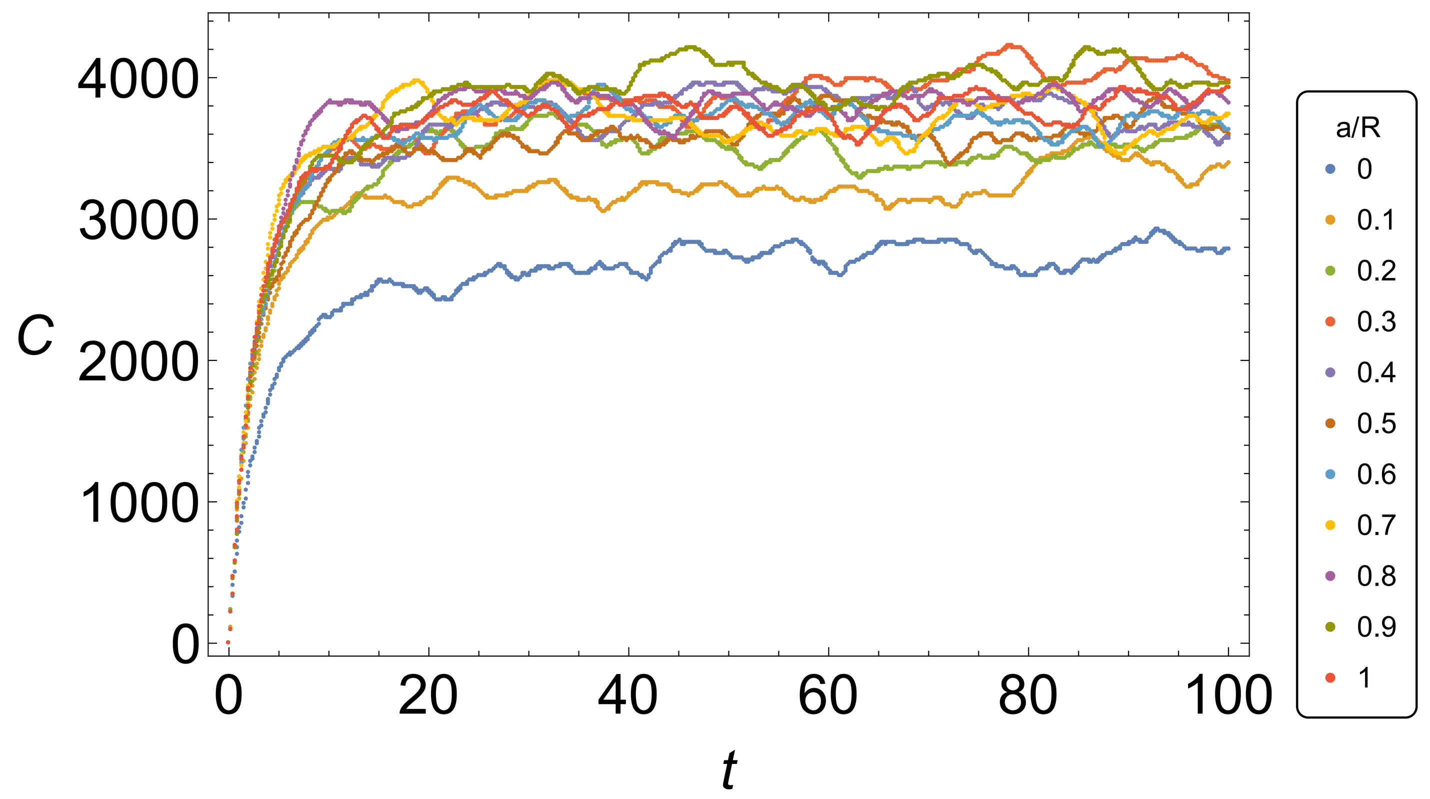
まとめ

カオス性とLanczos係数の振る舞いに相関がある

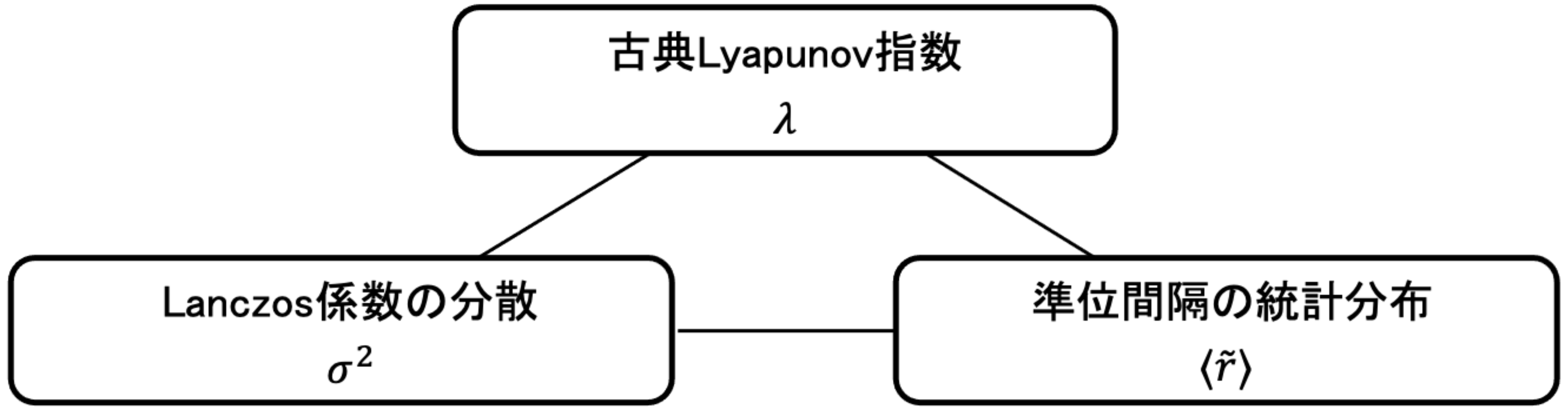
[Hashimoto, Murata, Tanahashi, Watanabe 2023]

- スタジアムビリヤード系でKrylov複雑性を数値的に評価





- ビリヤードの形状を変形したときに次の3つの量の間に相関を確認



- Lanczos係数の振る舞いは量子カオスの良い指標となりうる

- 普遍性：同様の結果はSinaiビリヤードに対しても確認された