

弦の散乱振幅の 零・極とStokes現象

世田拓也

京都大学 理学研究科

[work in progress]

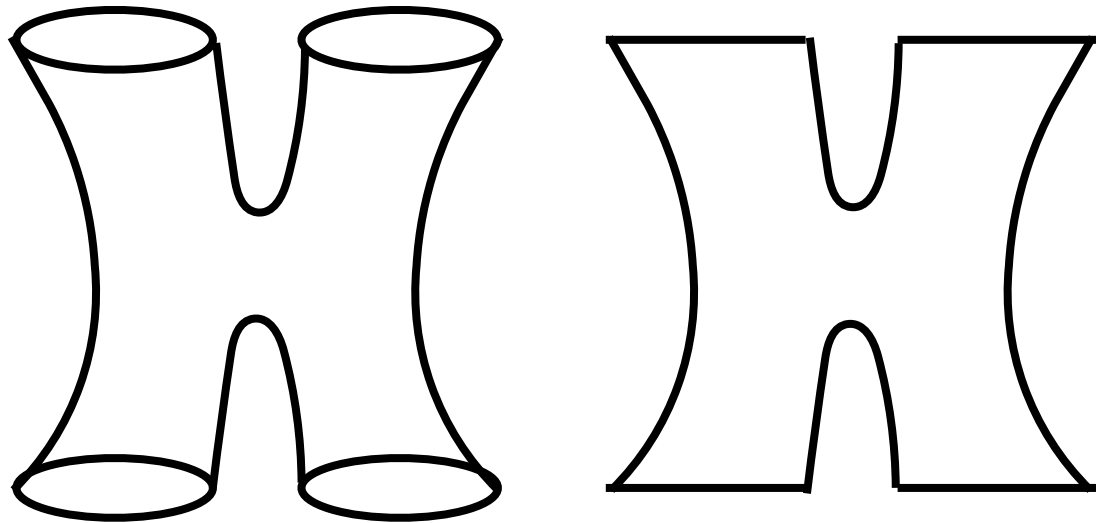


京都大学

KYOTO UNIVERSITY

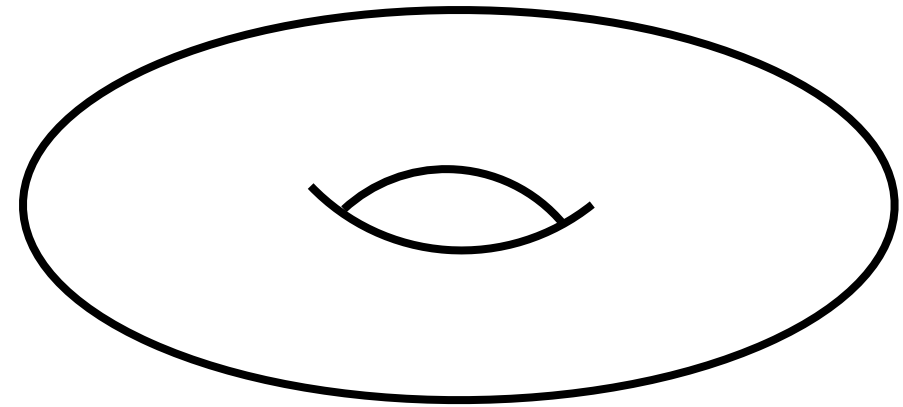
2023年8月7日 YITP Workshop 場の理論と弦理論

散乱振幅は物理の基本

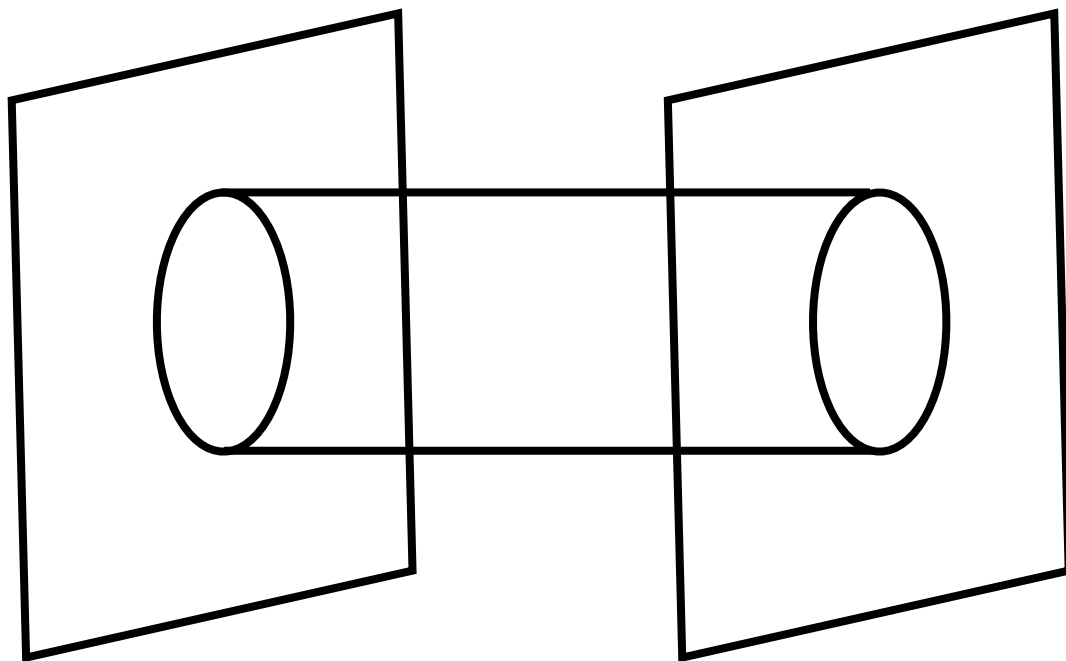


Virasoro-Shapiro振幅

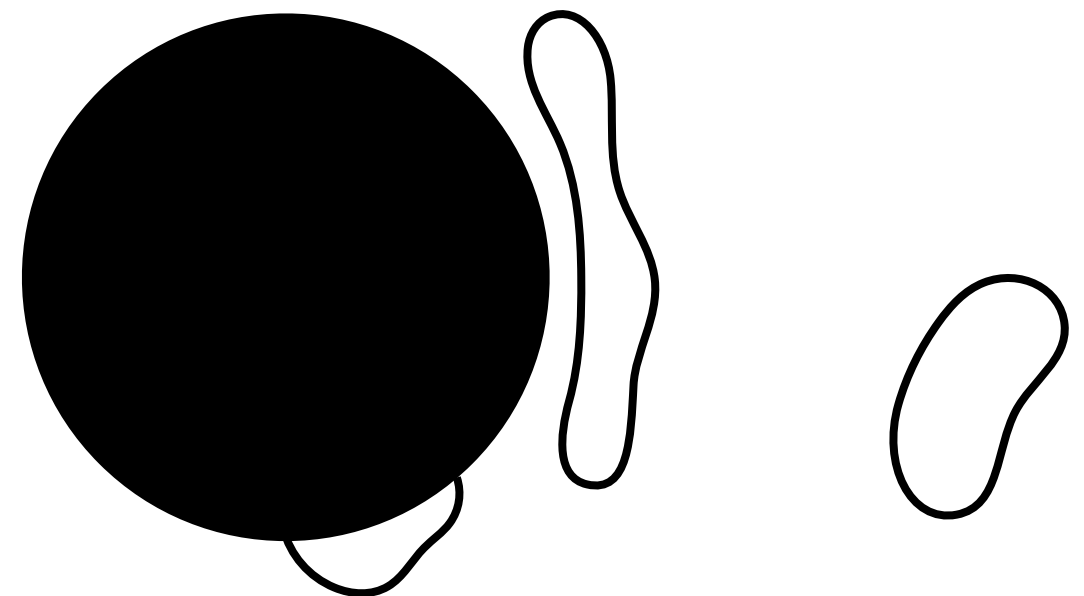
Veneziano振幅



トーラス振幅



D-ブレーンの相互作用



ブラックホールによる”散乱”

散乱振幅は物理の基本

**プランク距離の物理を知るには
特に高エネルギー散乱**



D-ブレーンの相互作用

ブラックホールによる“散乱”

弦の散乱振幅の 零・極とStokes現象

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似
2. 非自明鞍点と零・極

弦の散乱振幅の 零・極とStokes現象

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似

2. 非自明鞍点と零・極

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似

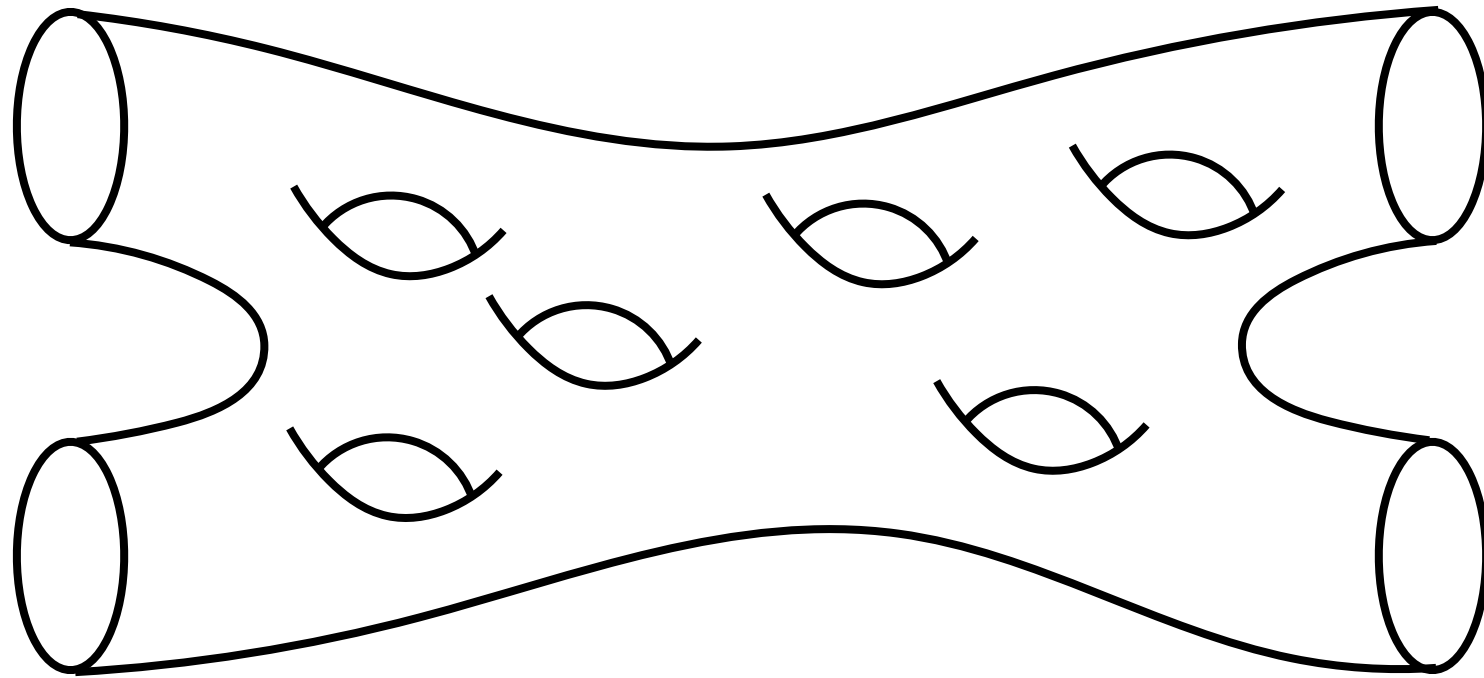
1-1. 一般の種数では計算が困難

1-2. 鞍点近似 @ Tree

1-3. 鞍点近似 @ 1-loop

1-4. 鞍点近似 @ n-loop

1-1. 一般の種数では計算が困難



$$\mathcal{A} = \sum_{\text{topo.}} \int \mathcal{D}g_{ab} \int \mathcal{D}X^\mu \prod_i V_i e^{-S_{\text{poly.}}}$$

ユニタリティ、モジュラー不変性を明確にしつつ
一般の種数で陽に計算する方法は確立されていない

参照 例えば

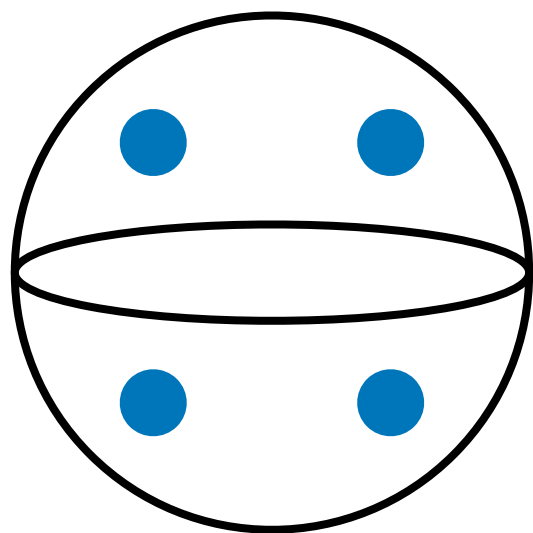
[Kaku, Introduction to Superstrings and M-Theory]

[D'Hoker, Phong, The geometry of string perturbation theory]

近年のフォローアップ [Gopakumar, Perlmutter, Pufu, Yin, Snowmass White Paper: Bootstrapping String Theory]

1-2. 鞍点近似 @ Tree

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



$$= g^2 \int \frac{\prod_{i=1}^4 d^2 z_i}{\text{Vol.}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln |z_i - z_j| \right]$$

$$= g^2 \int d^2 z \exp \left[\frac{1}{2} p_1 \cdot p_3 \ln |z| + \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4 \ln |1 - z| \right]$$

$$z = \frac{p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4}$$

$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{4} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

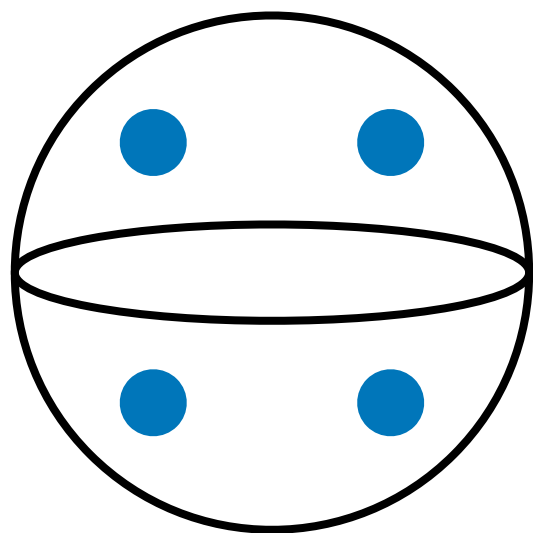
$$s = -(p_1 + p_2)^2 = +4(p^2 - 2)$$

$$t = -(p_1 + p_3)^2 = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = -(p_1 + p_4)^2 = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

1-2. 鞍点近似 @ Tree

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



$$= g^2 \int \frac{\prod_{i=1}^4 d^2 z_i}{\text{Vol.}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln |z_i - z_j| \right]$$

$$= g^2 \int d^2 z \exp \left[\frac{1}{2} p_1 \cdot p_3 \ln |z| + \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4 \ln |1 - z| \right]$$

鞍点

$$z = \frac{p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4}$$

$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{4} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

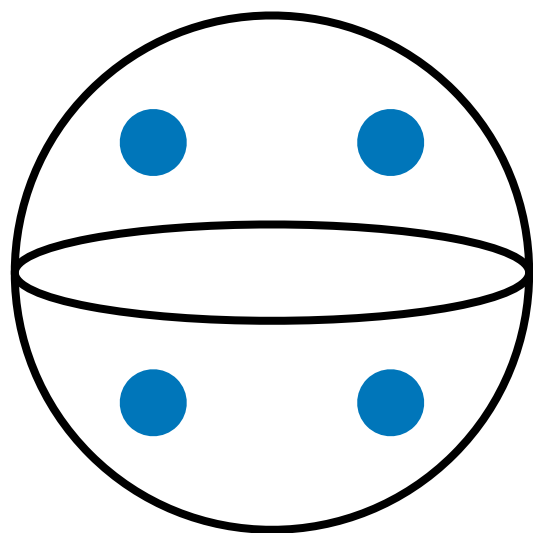
$$s = -(p_1 + p_2)^2 = +4(p^2 - 2)$$

$$t = -(p_1 + p_3)^2 = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = -(p_1 + p_4)^2 = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

1-2. 鞍点近似 @ Tree

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



$$= g^2 \int \frac{\prod_{i=1}^4 d^2 z_i}{\text{Vol.}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln |z_i - z_j| \right]$$

$$= g^2 \int d^2 z \exp \left[\frac{1}{2} p_1 \cdot p_3 \ln |z| + \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4 \ln |1 - z| \right]$$

運動量を電荷とみなすと、
クーロン力の釣り合いの位置

鞍点

$$z = \frac{p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4}$$

$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{4} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

鞍点での値は、
電場のエネルギー

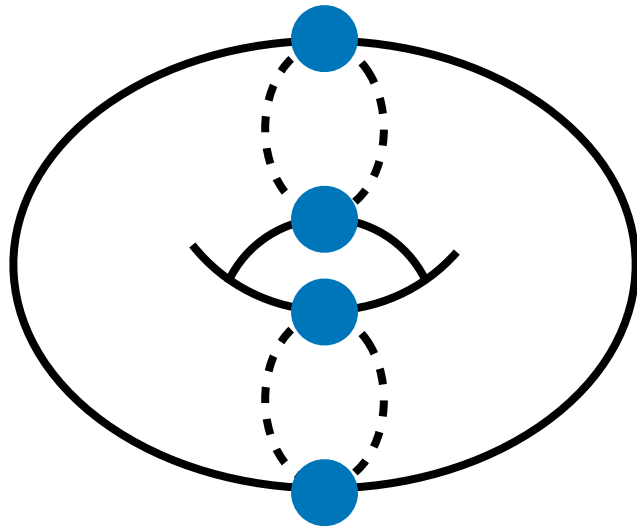
$$s = -(p_1 + p_2)^2 = +4(p^2 - 2)$$

$$t = -(p_1 + p_3)^2 = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = -(p_1 + p_4)^2 = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

1-3. 鞍点近似 @ 1-loop

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



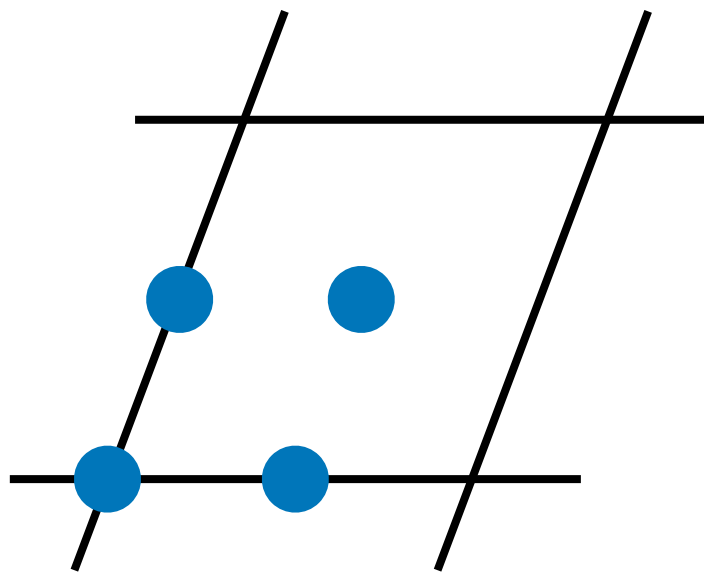
$$= g^4 \int d\tau \prod_{i=1}^{4-1} d^2 \nu_i \Omega(\tau) \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln \chi_{ij} \right]$$

$$\ln \chi_{ij} = \frac{-\pi \operatorname{Im}^2(\nu_i - \nu_j)}{\operatorname{Im} \tau} + \ln \left| \frac{\theta_1(\nu_i - \nu_j | \tau)}{\theta'_1(0 | \tau)} \right|$$

$$0 = \frac{d}{d\tau} \ln \chi_{ij}$$

$$\nu_1 = 1/2, \quad \nu_2 = \tau/2, \quad \nu_3 = (1 + \tau)/2, \quad \nu_4 = 0,$$

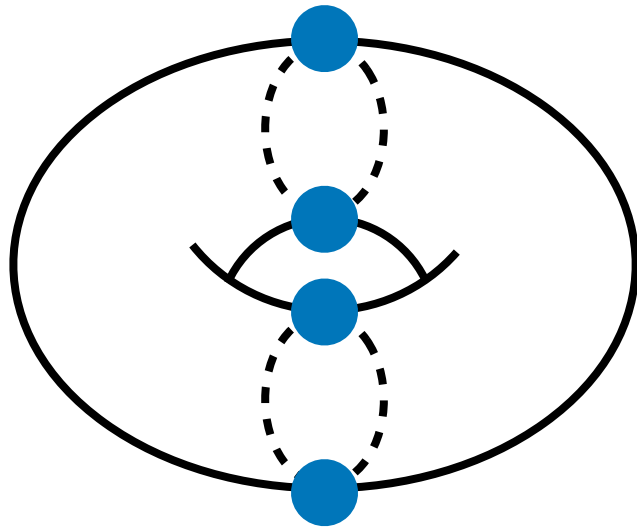
$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{8} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$



＊他に63個の鞍点が存在するが、より小さな寄与しか与えない

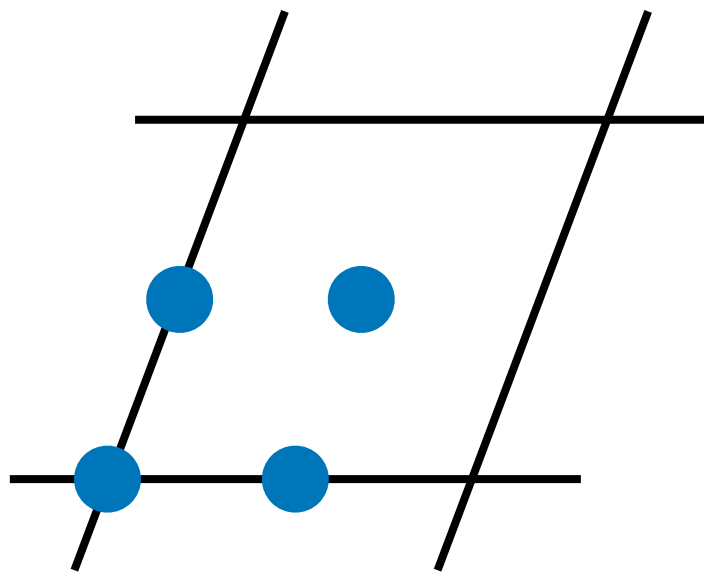
1-3. 鞍点近似 @ 1-loop

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



$$= g^4 \int d\tau \prod_{i=1}^{4-1} d^2 \nu_i \Omega(\tau) \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln \chi_{ij} \right]$$

$$\ln \chi_{ij} = \frac{-\pi \operatorname{Im}^2(\nu_i - \nu_j)}{\operatorname{Im} \tau} + \ln \left| \frac{\theta_1(\nu_i - \nu_j | \tau)}{\theta'_1(0 | \tau)} \right|$$



鞍点

$$0 = \frac{d}{d\tau} \ln \chi_{ij}$$

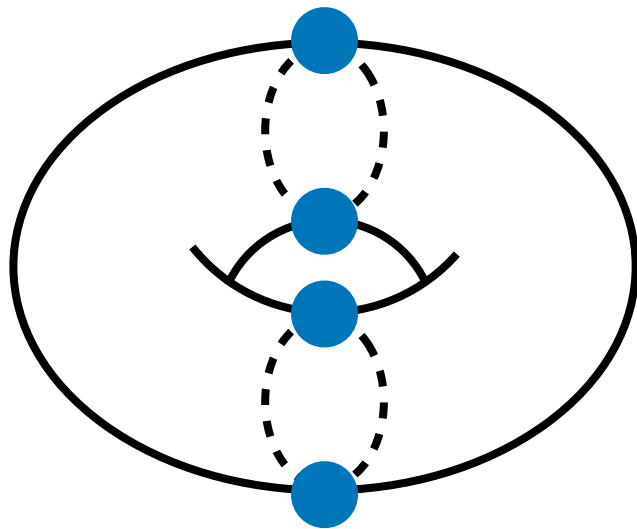
$$\nu_1 = 1/2, \quad \nu_2 = \tau/2, \quad \nu_3 = (1 + \tau)/2, \quad \nu_4 = 0,$$

$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{8} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

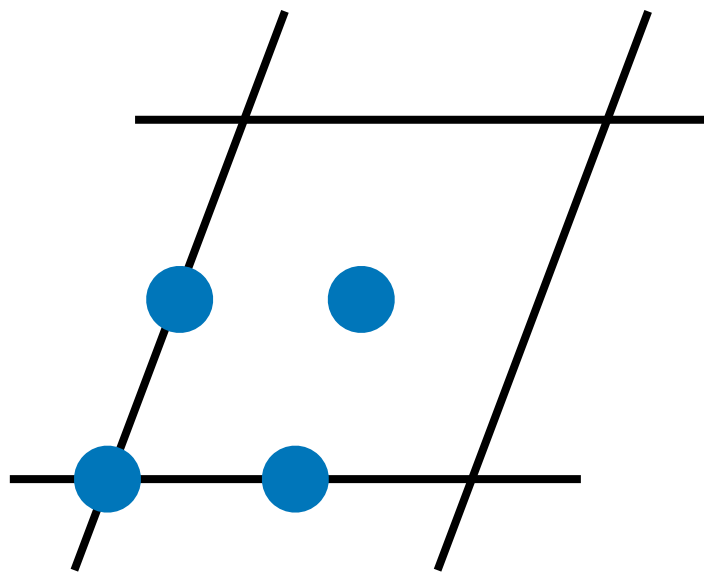
＊他に63個の鞍点が存在するが、より小さな寄与しか与えない

1-3. 鞍点近似 @ 1-loop

[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]



運動量を電荷とみなすと、
クーロン力の釣り合いの位置



鞍点での値は、
電場のエネルギー

$$= g^4 \int d\tau \prod_{i=1}^{4-1} d^2 \nu_i \Omega(\tau) \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \ln \chi_{ij} \right]$$

$$\ln \chi_{ij} = \frac{-\pi \operatorname{Im}^2(\nu_i - \nu_j)}{\operatorname{Im} \tau} + \ln \left| \frac{\theta_1(\nu_i - \nu_j | \tau)}{\theta'_1(0 | \tau)} \right|$$

鞍点

$$0 = \frac{d}{d\tau} \ln \chi_{ij}$$

$$\nu_1 = 1/2, \quad \nu_2 = \tau/2, \quad \nu_3 = (1 + \tau)/2, \quad \nu_4 = 0,$$

$$\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{8} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

*他に63個の鞍点が存在するが、より小さな寄与しか与えない

1-4. 鞍点近似 @ n-loop

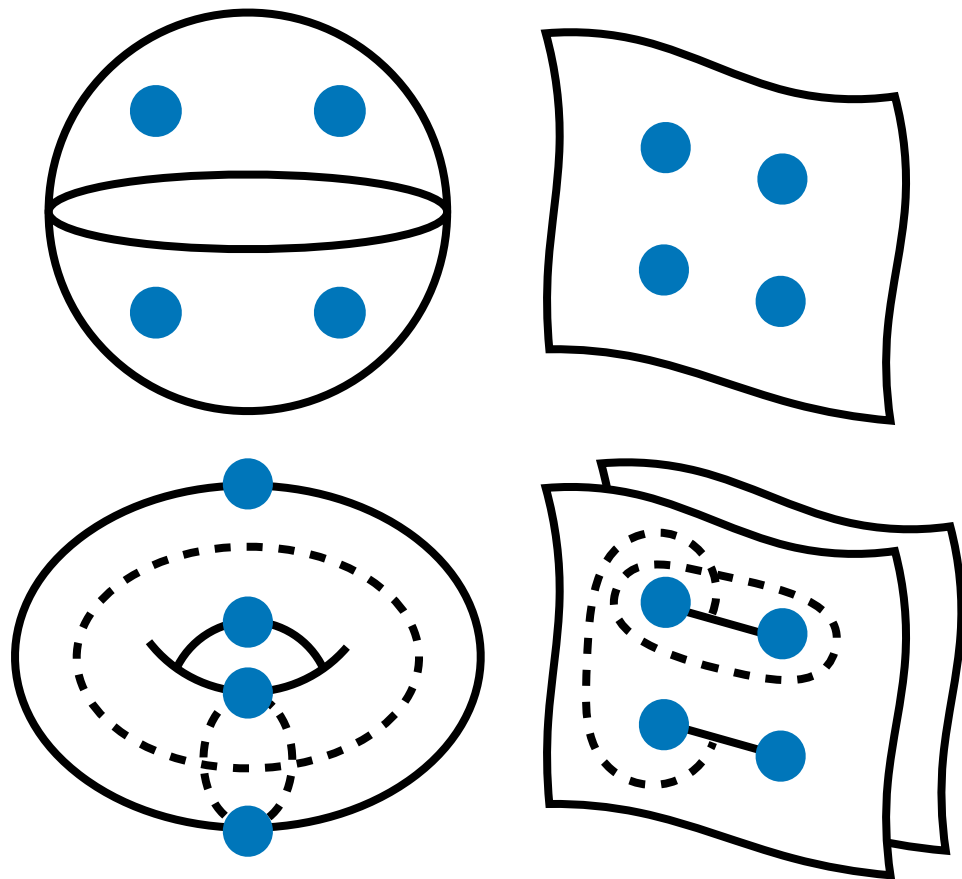
[Gross, Mende, 88; Gross Manes, 89; See also, Mende Ooguri, 90]

$$\mathcal{A}_{(N-1)\text{-loop}} \simeq (\text{fluc.}) e^{\mathcal{E}_N}, \quad \mathcal{E}_N = -\frac{1}{4N} (s \ln s + t \ln t + u \ln u)$$

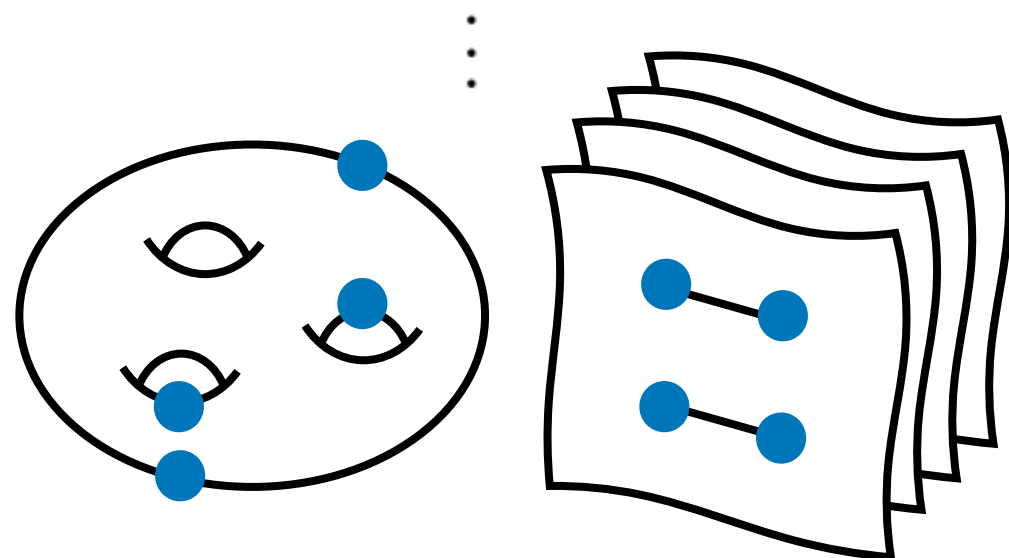
*他にも鞍点が存在するが、支配的でないと期待される

$$\mathcal{E}_1 = \int_{\text{sphere}} |\mathbf{E}_1|^2$$

鞍点での値は、
電場のエネルギー



$$\mathcal{E}_2 = \int_{\Sigma_2} |\mathbf{E}_2|^2 = 2 \int_{\text{sphere}} \left| \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \right|^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_1$$



$$\mathcal{E}_N = \int_{\Sigma_N} |\mathbf{E}_N|^2 = N \int_{\text{sphere}} \left| \frac{1}{N} \mathbf{E}_1 \right|^2 = \frac{1}{N} \mathcal{E}_1$$

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似

1-1. 一般の種数では計算が困難

1-2. 鞍点近似 @ Tree

1-3. 鞍点近似 @ 1-loop

1-4. 鞍点近似 @ n-loop

弦の散乱振幅の 零・極とStokes現象

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似

2. 非自明鞍点と零・極

2. 非自明鞍点と零・極

2-1. 厳密値とのずれ、鞍点の見落とし

2-2. 積分の正則化： $\text{Feynman-}i\varepsilon$

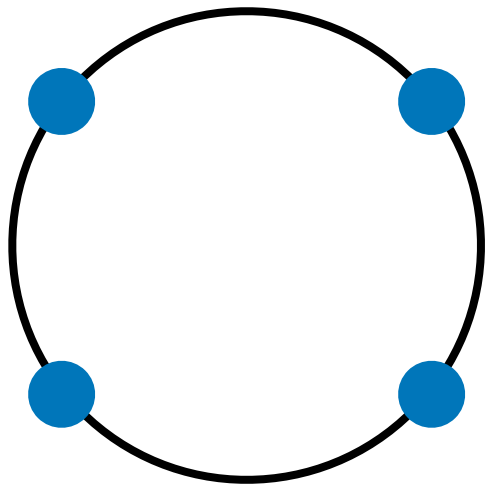
2-3. 無限個の非自明鞍点

2-4. 非自明鞍点から生じる零・極

2-5. Stokes現象は解析接続

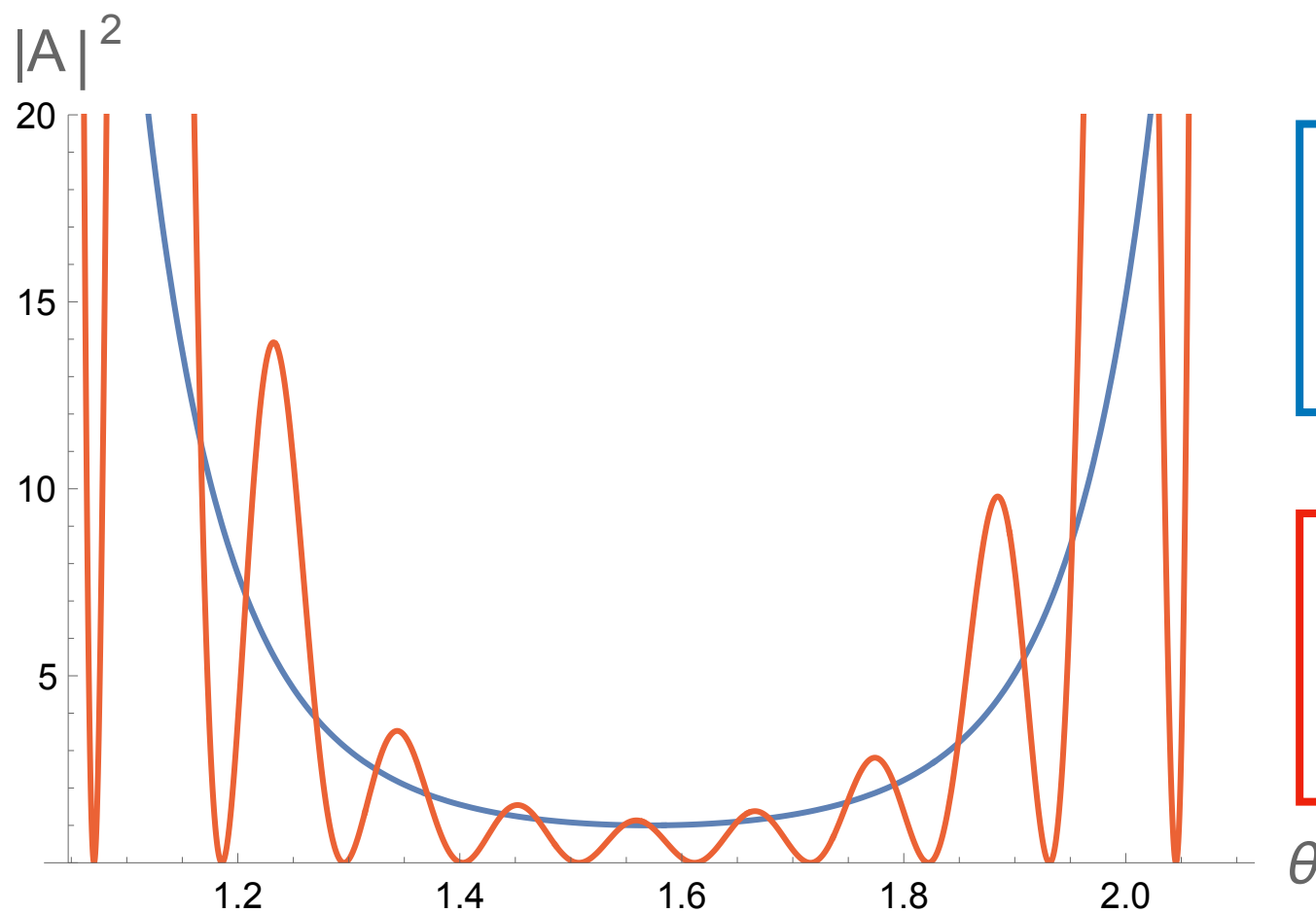
2-6. 弦は自身と干渉

2-1. 厳密値とのずれ、鞍点の見落とし



$$= g \int_0^1 dz \exp [p_1 \cdot p_2 \ln |z| + p_1 \cdot p_3 \ln |1 - z|]$$

＊以降簡単のため、ボソン開弦のTree-levelのみ
教訓を得るには十分



鞍点近似

$$(\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

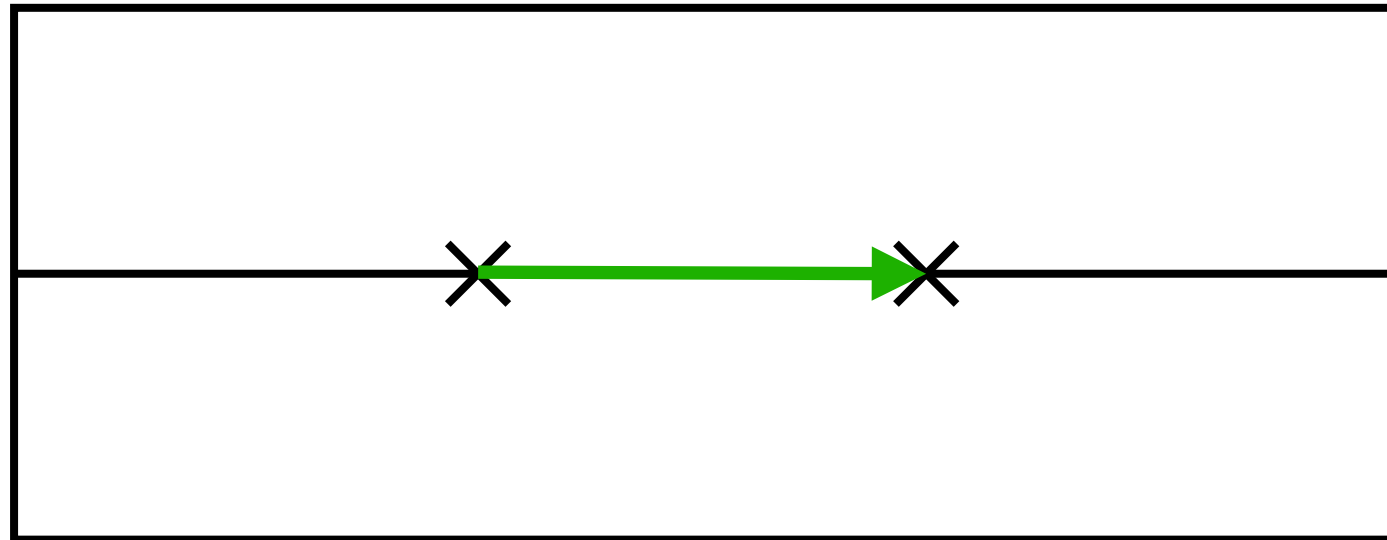
厳密値

$$\frac{\Gamma(-1 - s/2) \Gamma(-1 - t/2)}{\Gamma(-2 - s/2 - t/2)}$$

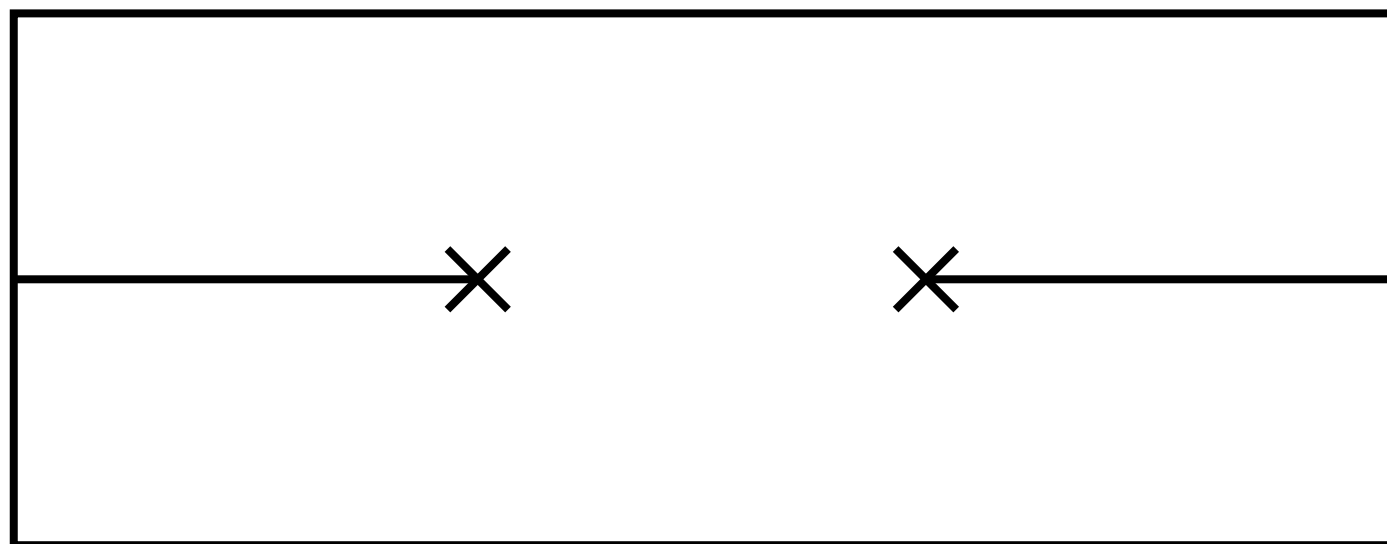
2-2. 積分の正則化：Feynman- $i\epsilon$

[Witten, 13]

$$g \int_0^1 dz \exp [p_1 \cdot p_2 \ln |z| + p_1 \cdot p_3 \ln |1 - z|]$$



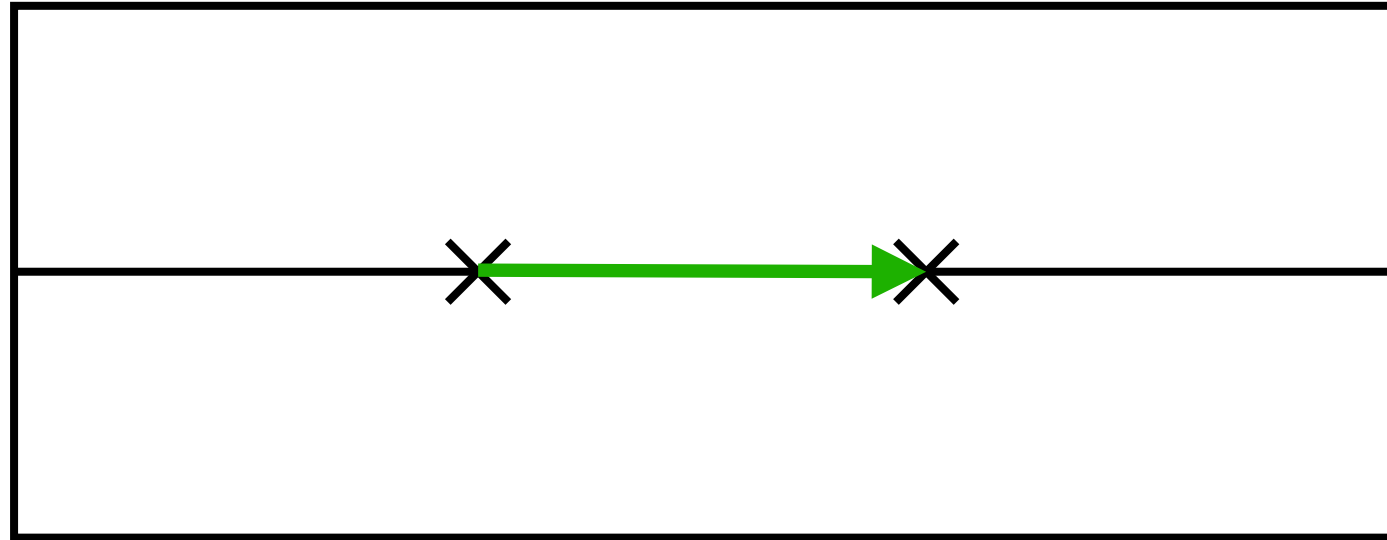
$$g \int_{C_\epsilon} dz \exp [(p_1 \cdot p_2 - i\epsilon) \ln |z| + (p_1 \cdot p_3 - i\epsilon) \ln |1 - z|]$$



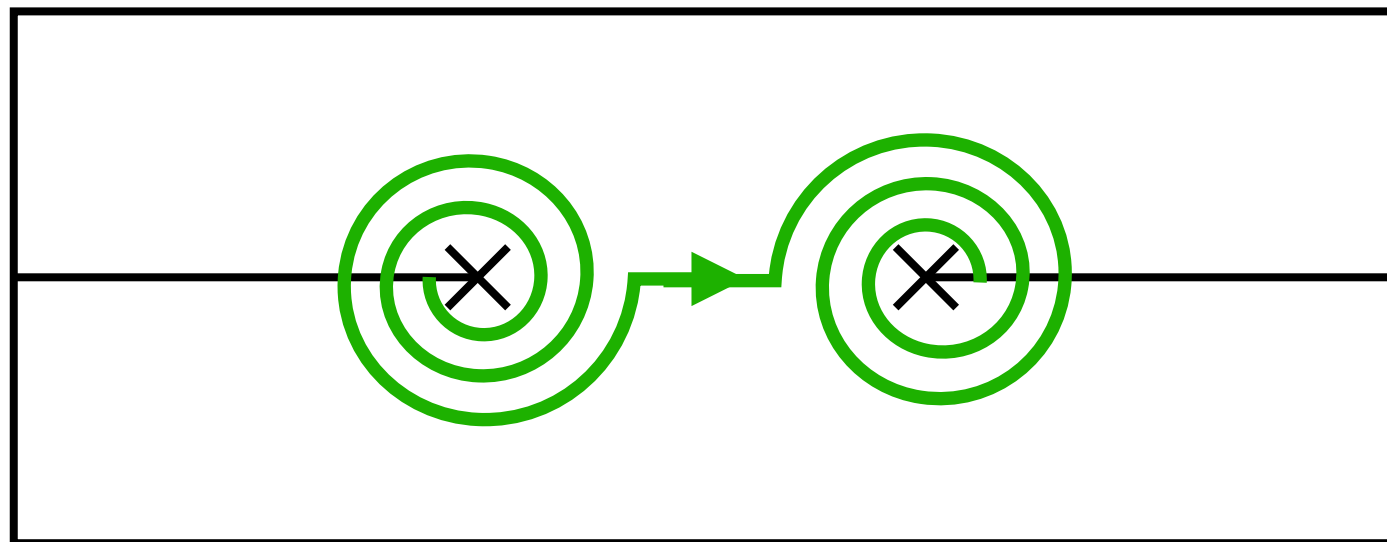
2-2. 積分の正則化：Feynman- $i\epsilon$

[Witten, 13]

$$g \int_0^1 dz \exp [p_1 \cdot p_2 \ln |z| + p_1 \cdot p_3 \ln |1 - z|]$$

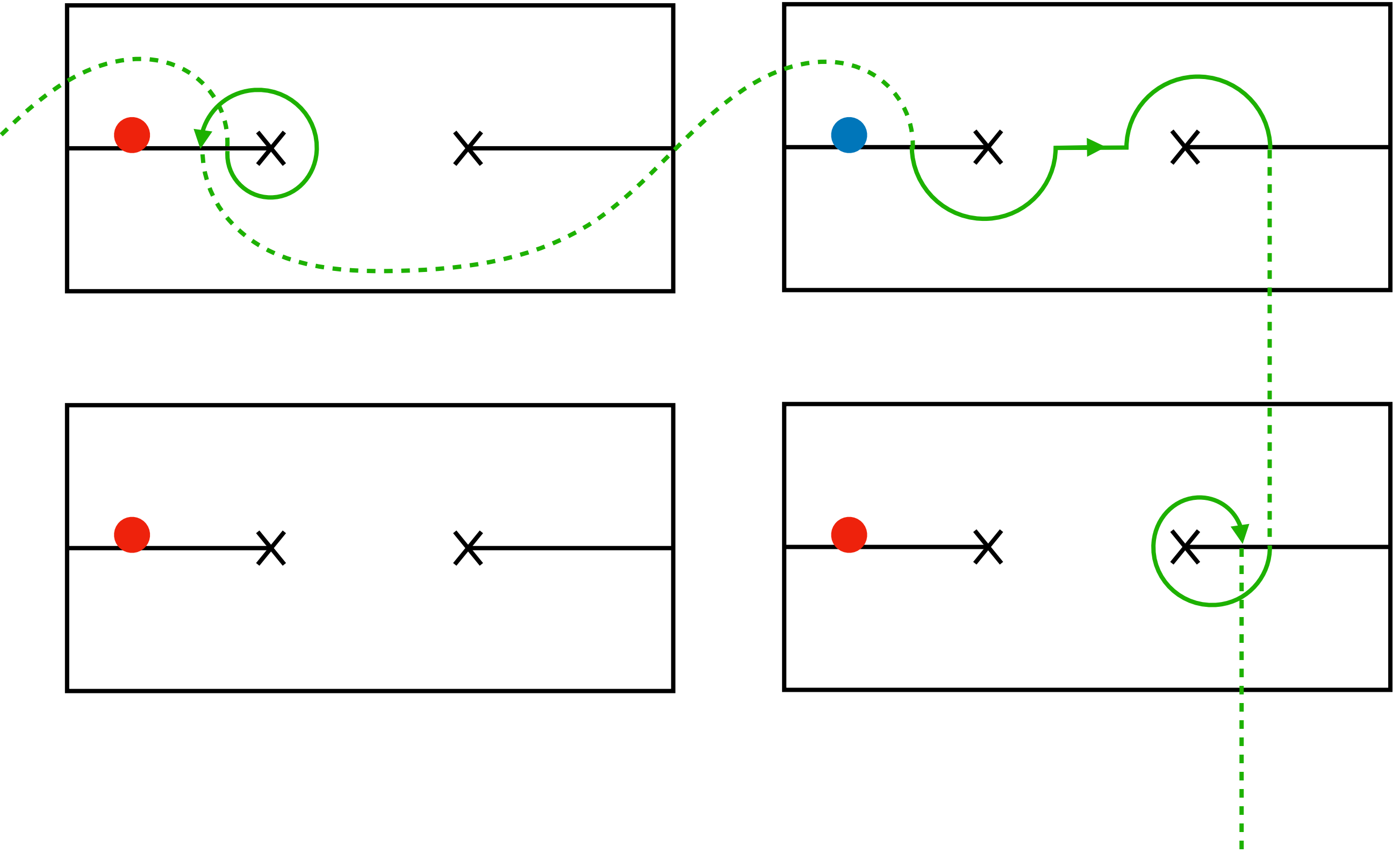


$$g \int_{C_\epsilon} dz \exp [(p_1 \cdot p_2 \boxed{-i\epsilon}) \ln |z| + (p_1 \cdot p_3 \boxed{-i\epsilon}) \ln |1 - z|]$$



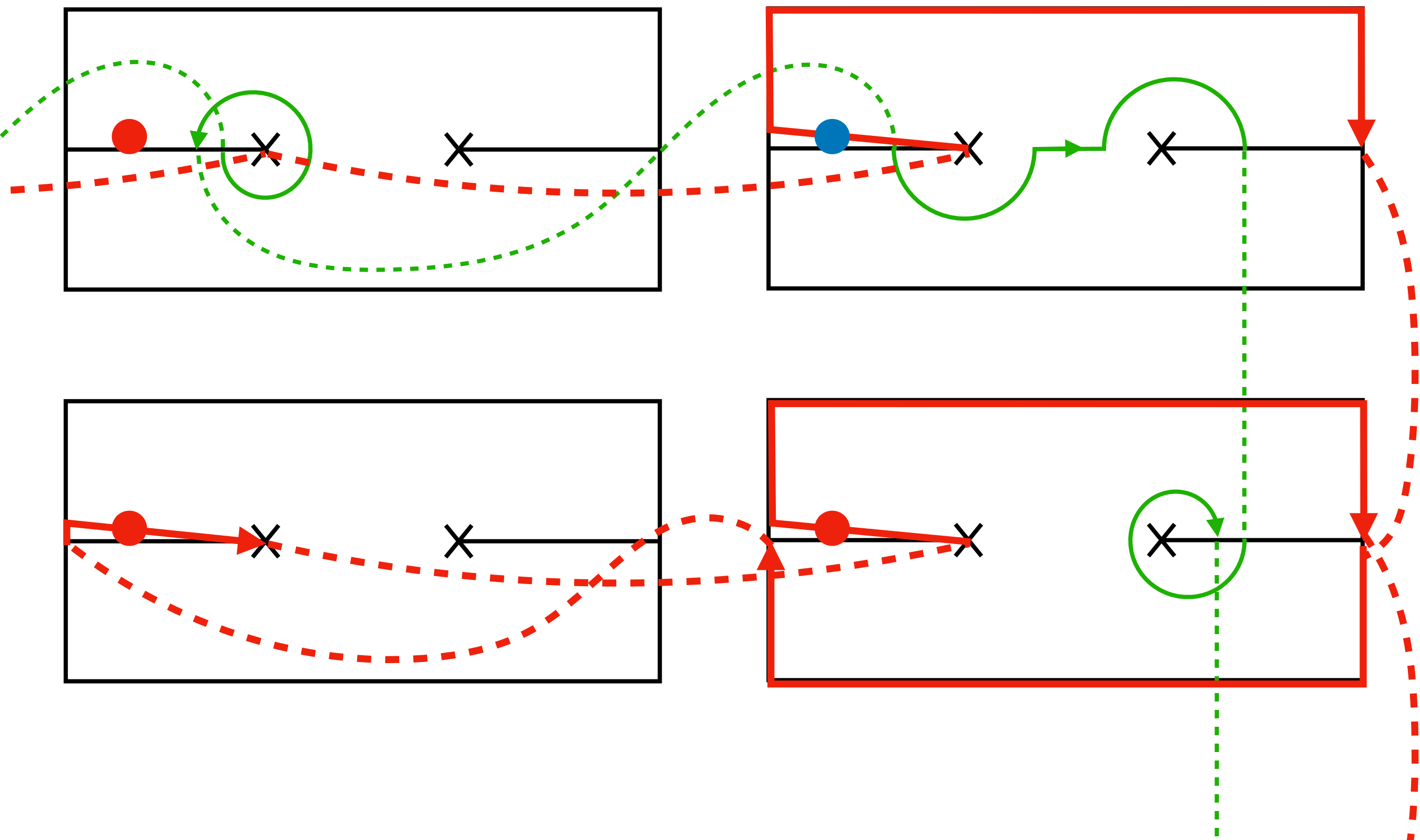
2-3. 無限個の非自明鞍点

[TY, in progress]



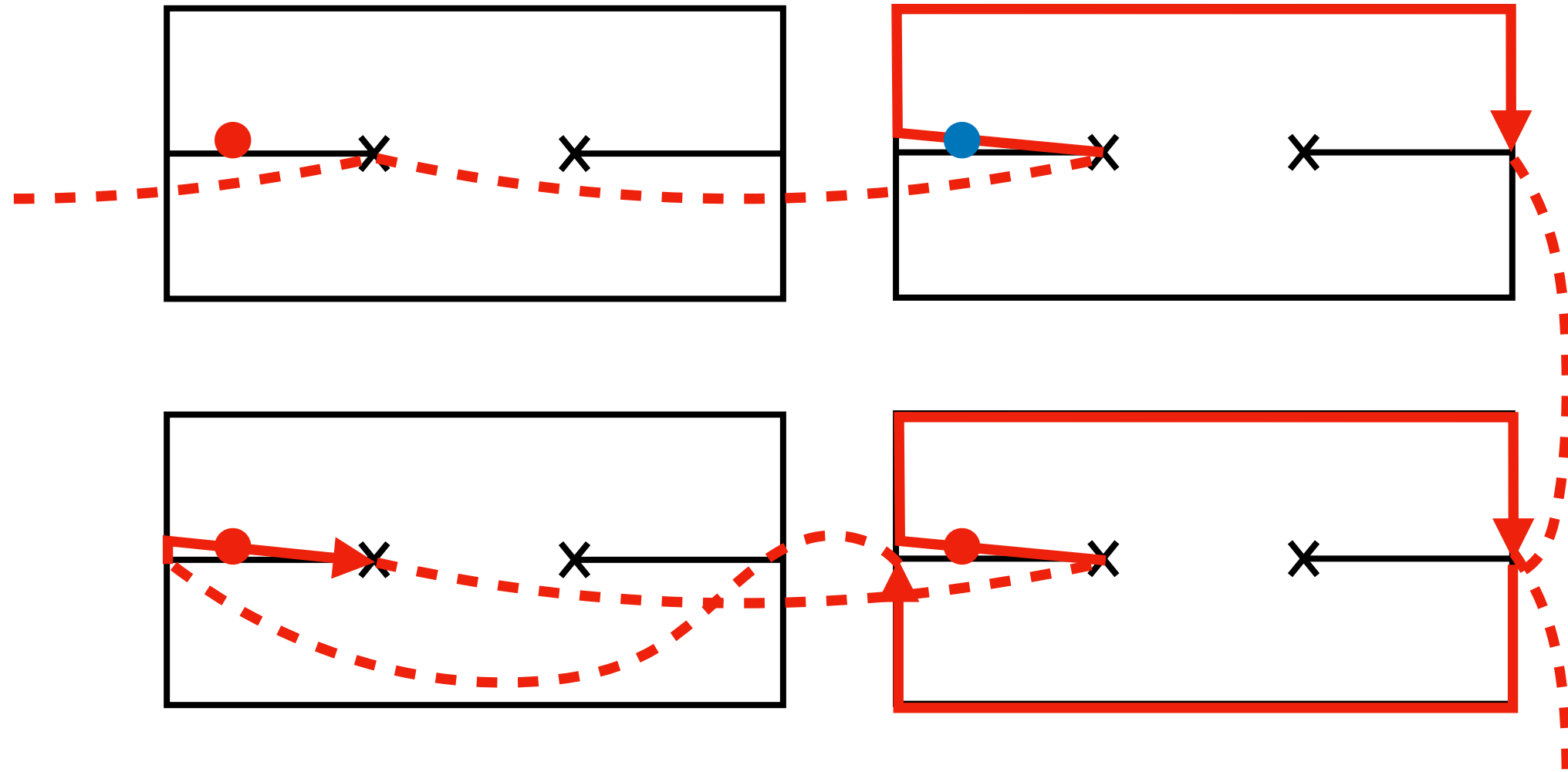
2-3. 無限個の非自明鞍点

[TY, in progress]



4. 非自明鞍点から生じる零・極

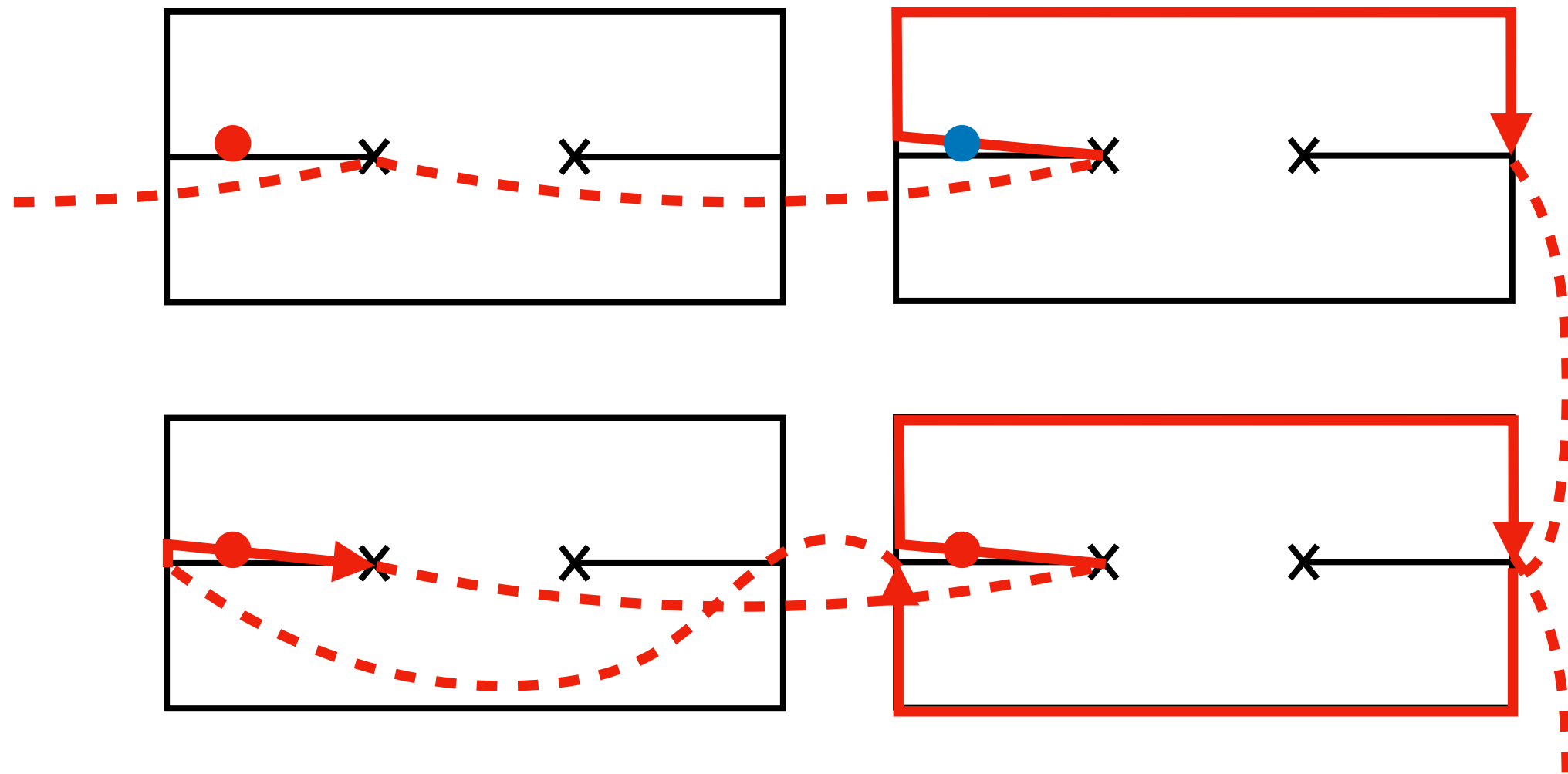
[TY, in progress]



$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{tree}}^{(st)} &\simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right] \left[1 + \sum_{n \leq -1} e^{2\pi i n(-2-s/2)} - \sum_{m \leq -1} e^{-2\pi i(-2-t/2)+2\pi i m(-2-s/2)} \right] \\ &= (\text{fluc.}) \frac{1 - e^{2\pi i(4+s/2+t/2)}}{1 - e^{2\pi i(2+s/2)}} \exp \left[-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right] \end{aligned}$$

4. 非自明鞍点から生じる零・極

[TY, in progress]

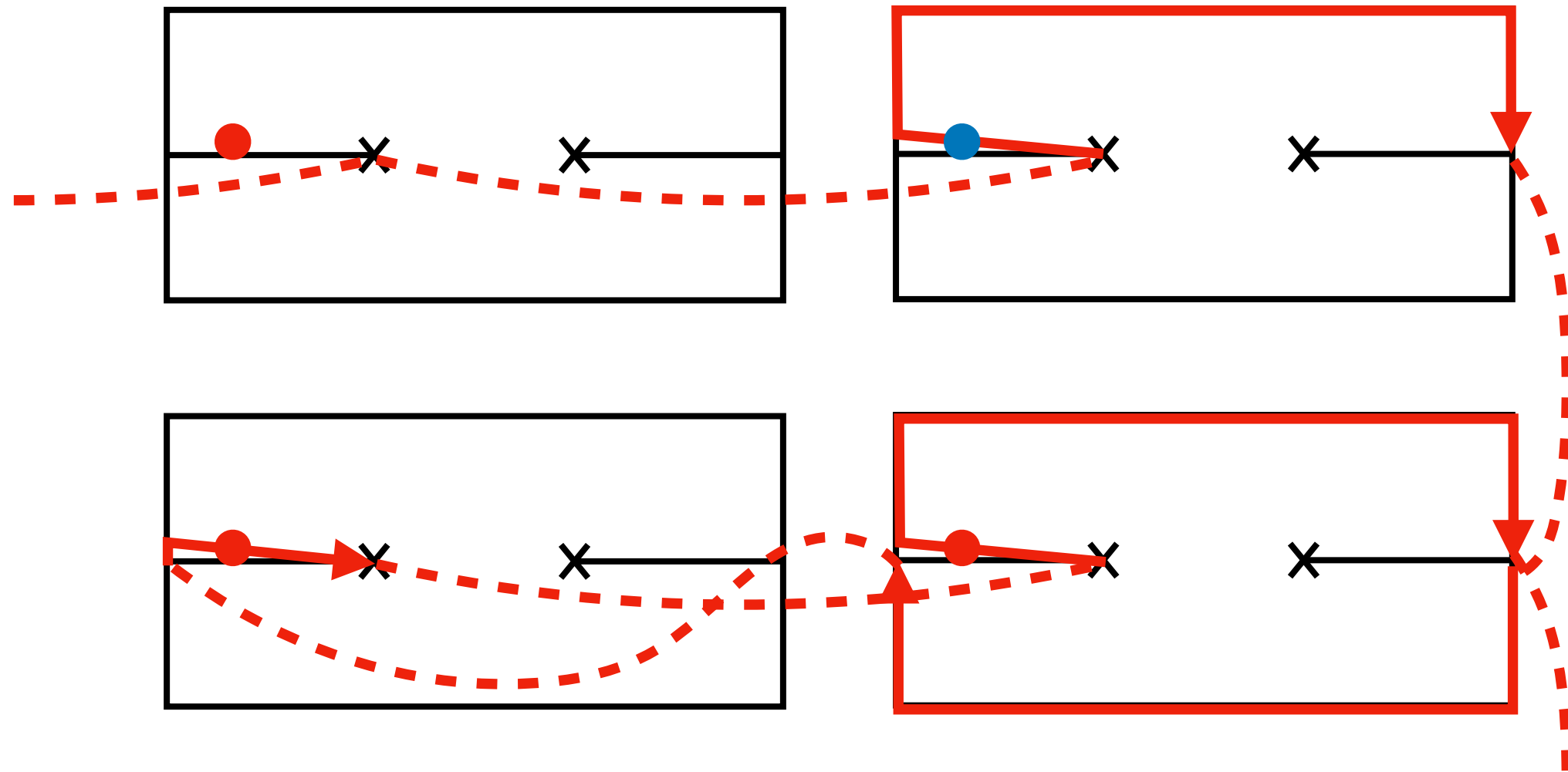


$$\mathcal{A}_{\text{tree}}^{(st)} \simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right] \left[1 + \sum_{n \leq -1} e^{2\pi i n (-2 - s/2)} - \sum_{m \leq -1} e^{-2\pi i (-2 - t/2) + 2\pi i m (-2 - s/2)} \right]$$

$$= (\text{fluc.}) \frac{1 - e^{2\pi i (4 + s/2 + t/2)}}{1 - e^{2\pi i (2 + s/2)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

4. 非自明鞍点から生じる零・極

[TY, in progress]



$$\mathcal{A}_{\text{tree}}^{(st)} \simeq (\text{fluc.}) \exp \left[-\frac{1}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right] \left[1 + \sum_{n \leq -1} e^{2\pi i n (-2 - s/2)} - \sum_{m \leq -1} e^{-2\pi i (-2 - t/2) + 2\pi i m (-2 - s/2)} \right]$$

$$= (\text{fluc.}) \frac{1 - e^{2\pi i (4 + s/2 + t/2)}}{1 - e^{2\pi i (2 + s/2)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right]$$

零・極が生じる

2-5. Stokes現象は解析接続

[TY, in progress]

非物理的領域から物理的領域に戻すと、

$$-\alpha(s) \rightarrow \alpha(s)$$

Stokes現象：寄与する鞍点の変化

$$(\text{fluc.}) e^{-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u)} \rightarrow (\text{fluc.}) \frac{1 - e^{2\pi i(4+s/2+t/2)}}{1 - e^{2\pi i(2+s/2)}} e^{-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u)}$$

解析接続 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

$$\frac{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(\alpha(s) - \alpha(t))} \rightarrow \frac{\sin \pi(\alpha(s) + \alpha(t))}{\sin \pi \alpha(s)} \frac{\Gamma(1 + \alpha(s) + \alpha(t))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1 + \alpha(s))}$$

2-5. Stokes現象は解析接続

[TY, in progress]

非物理的領域から物理的領域に戻すと、

$$-\alpha(s) \rightarrow \alpha(s)$$

Stokes現象：寄与する鞍点の変化

$$(\text{fluc.}) e^{-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u)} \rightarrow (\text{fluc.}) \frac{1 - e^{2\pi i(4+s/2+t/2)}}{1 - e^{2\pi i(2+s/2)}} e^{-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u)}$$

解析接続 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

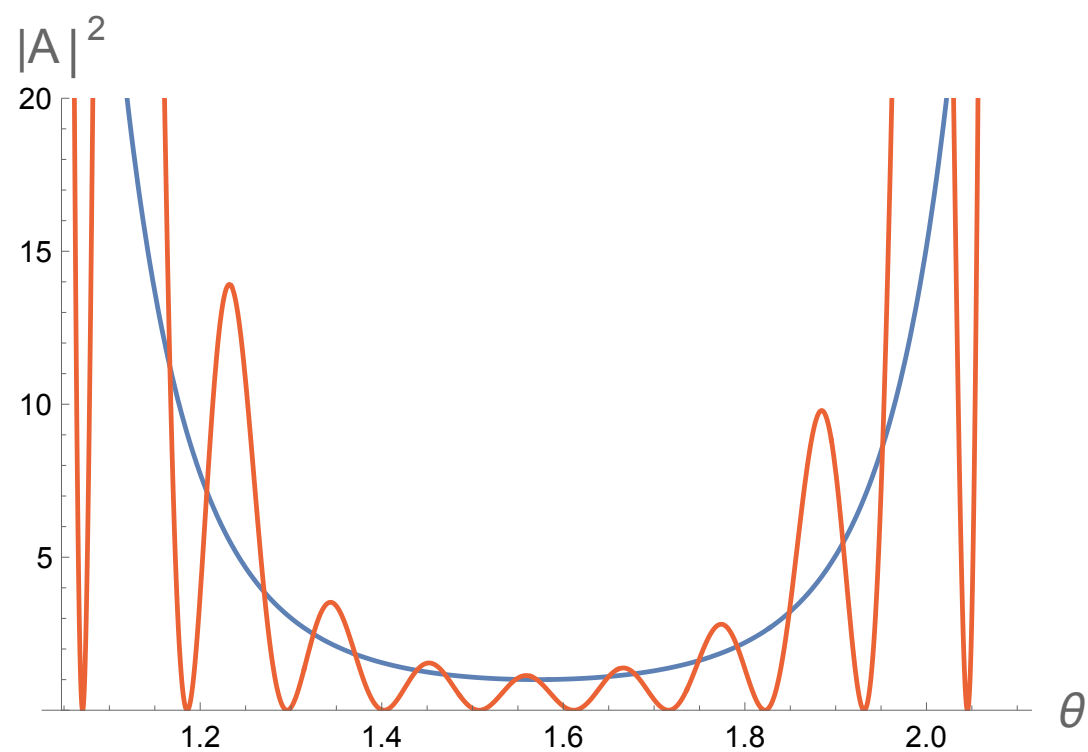
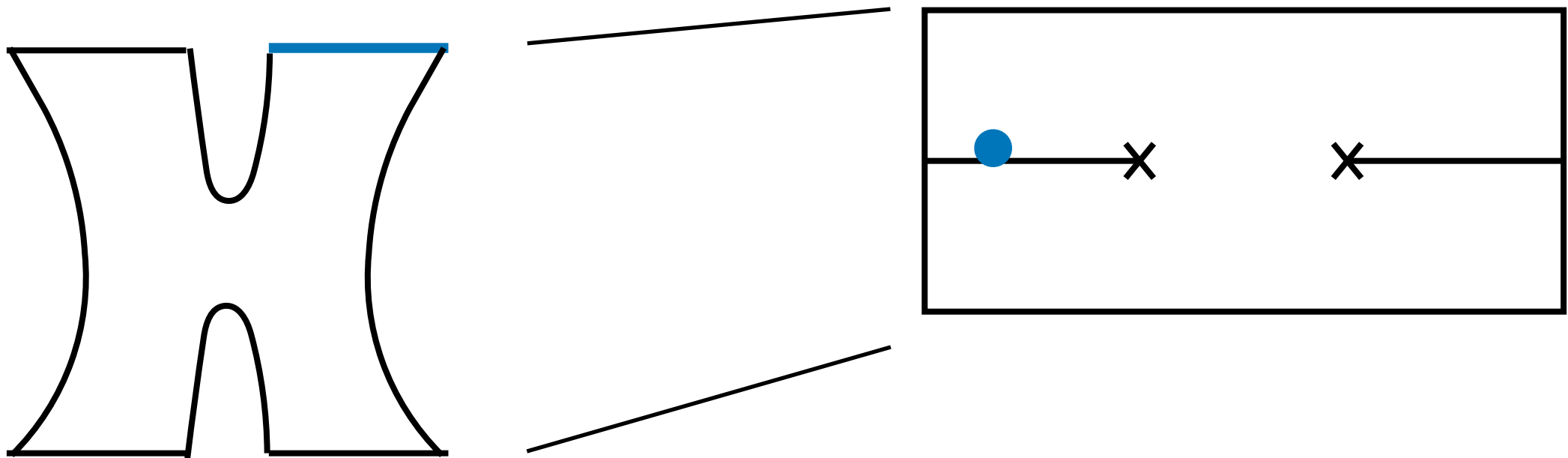
正しく零・極が出る

$$\frac{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(\alpha(s) - \alpha(t))} \rightarrow \frac{\sin \pi(\alpha(s) + \alpha(t))}{\sin \pi\alpha(s)} \frac{\Gamma(1 + \alpha(s) + \alpha(t))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1 + \alpha(s))}$$

2-6. 弦は自身と干渉

[TY, in progress]

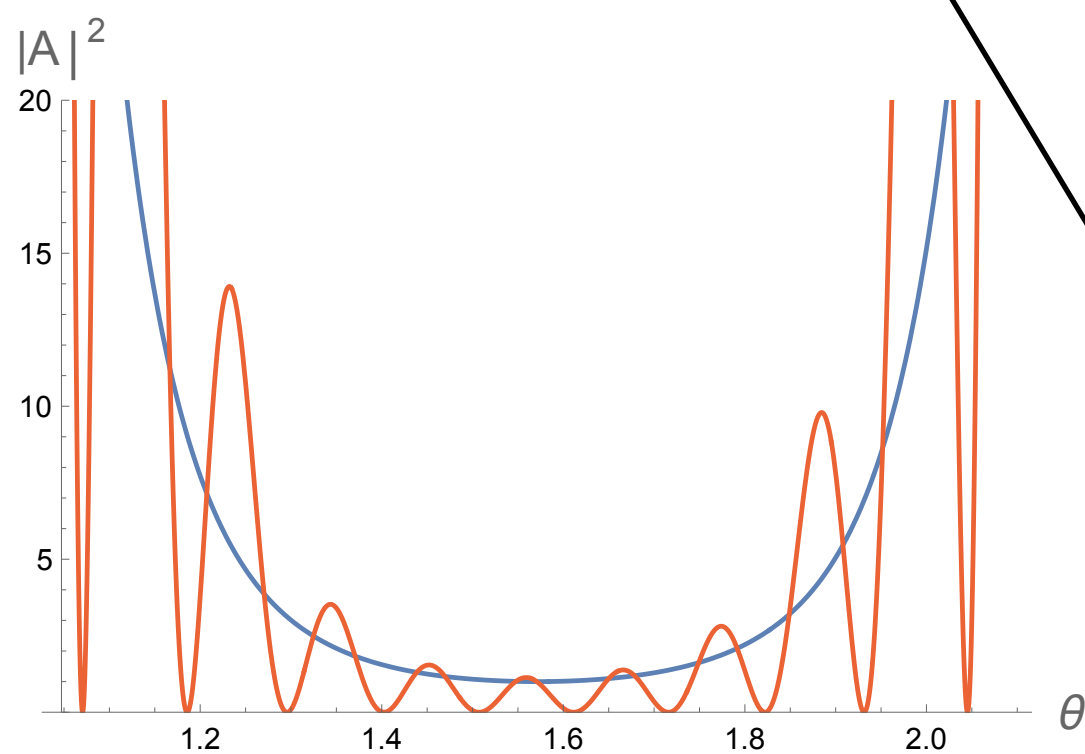
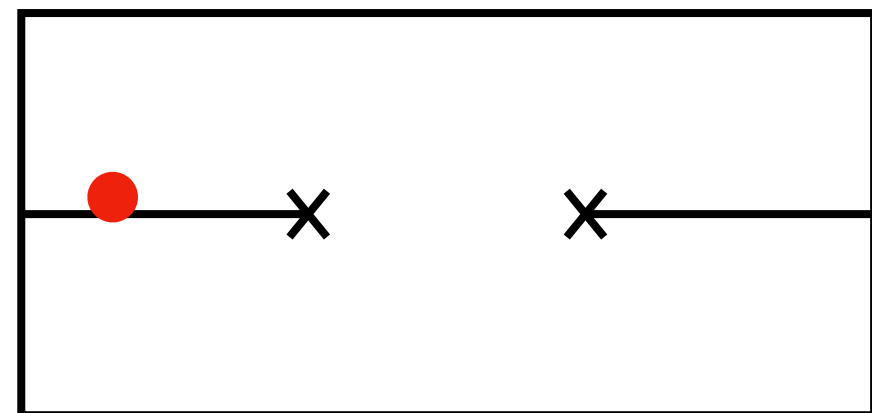
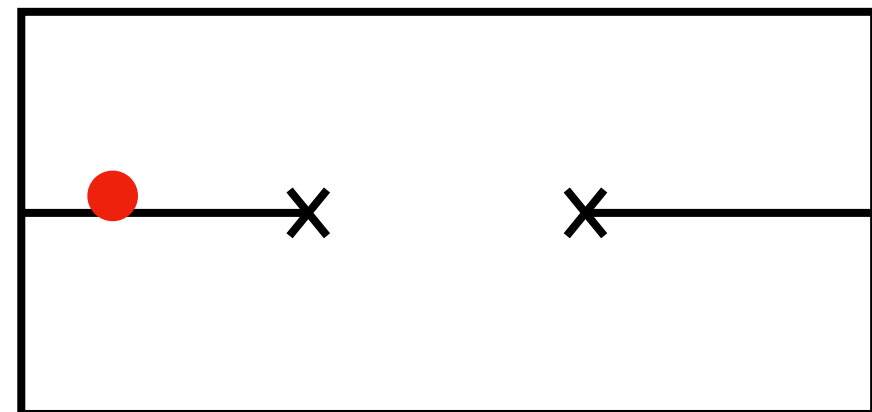
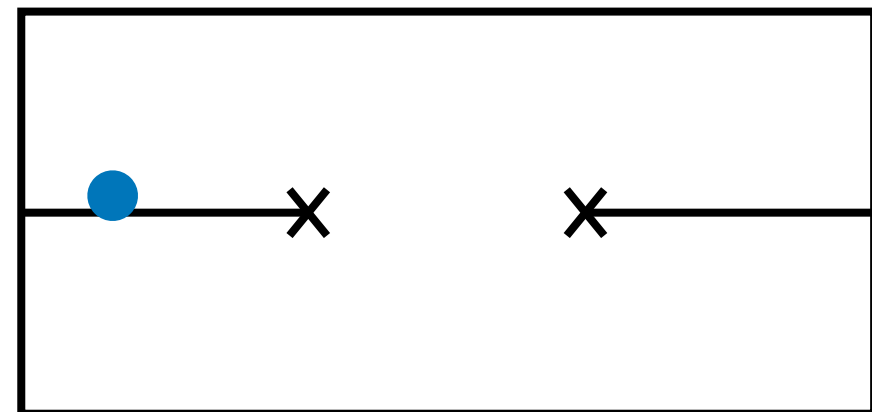
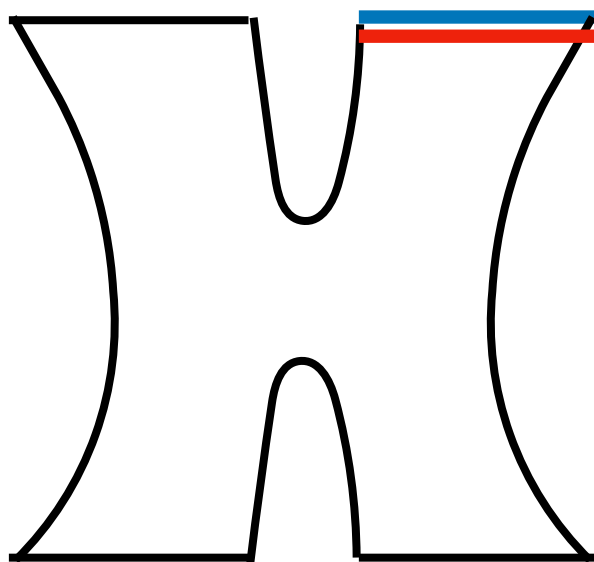
$$X^\mu(w) = i \sum_{i=1}^4 p_i^\mu \ln |w - z_i|$$



2-6. 弦は自身と干渉

[TY, in progress]

$$X^\mu(w) = i \sum_{i=1}^4 p_i^\mu \ln |w - z_i|$$



2. 非自明鞍点と零・極

2-1. 厳密値とのずれ、鞍点の見落とし

2-2. 積分の正則化： $\text{Feynman-}i\varepsilon$

2-3. 無限個の非自明鞍点

2-4. 非自明鞍点 $\rightarrow$ 零・極

2-5. Stokes現象 $\rightarrow$ 解析接続

2-6. 弦は自身と干渉

弦の散乱振幅の 零・極とStokes現象

1. 弦の散乱振幅と鞍点近似
2. 非自明鞍点と零・極

非自明鞍点 $\rightarrow$ 零・極

Stokes現象 $\rightarrow$ 解析接続

今後：高次の散乱振幅で、陽に積分出来なくとも
零・極が分かる可能性