Re:ゼロ
Re: supersymmetric localization from zero
から始める超対称局所化

場の理論と弦理論2023@京大 基研

吉田豊 (明治学院大学)

世話人の某さんから最近の局所化の進展について
何か話して欲しいとメール頂きました。

このような場所で講演する機会を頂くのはとても
ありがたいことですが、それと同時に

「色んな分野の人間が参加する研究会の招待講演で話すのに
　相応しい局所化の発展はここ2年くらいはたぶんない」

(もちろんマニアックな発展は色々ある。例えばWitten指数のJeffrey-Kirwan留数で捉えられない
部分とか。これは't Hooft loopのmonopole bubblingはAGT対応でリウビル側の対応物がある
のでチェックできる)

そこでアブストラクトのような趣旨で話をさせて
頂きたいと思います。

1. Pestunの仕事の背景と彼が何をやったか？

2. 1次元から3次元までの局所化が行われた空間に一覧

3. Rigid curved SUSYの構成法と解の例

S^2 上の2d $\mathcal{N} = (2,2)$の場合

4. 3次元境界付き超対称ゲージ理論のここ5年くらいにあった発展

(Costello-Gaiotto ’18, Dimofte-Gaiotto-Paquette ’17, Aganagic-Okounkov ’16)

AdS/CFT対応とErickson-Semenoff-Zaremboの予想

[Erickson-Semenoff-Zarembo '00]

Minimal surface (F-string) in $\mathrm{AdS}_5 \times S^5 \;\sim e^{\sqrt{\lambda}}$ $\longleftrightarrow$ 1/2 BPS Wilson loop の期待値 $\langle W_{\Box} \rangle$

$$W_R = \mathrm{Tr}_R \mathrm{P} \exp\left(\oint_C (\mathrm{i} A_\mu \dot{x}^\mu(\tau) + \phi_0 |\dot{x}(\tau)|) d\tau \right)$$

予想：1/2 BPS Wilson loopの期待値に対する量子補正は摂動の全次数で相殺するだろう。

ESZはこの予想が正しいと仮定してplanarの期待値はGaussian行列模型の期待値に一致するすることを示した。

$$\langle W_{\Box} \rangle \underset{?}{=} \int dM \, \mathrm{Tr}_{\Box}(e^M) \, e^{-\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr} M^2} \xrightarrow[N \to \infty,\; g^2 N = \lambda]{} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda})$$

AdS/CFT対応とErickson-Semenoff-Zarembo予想

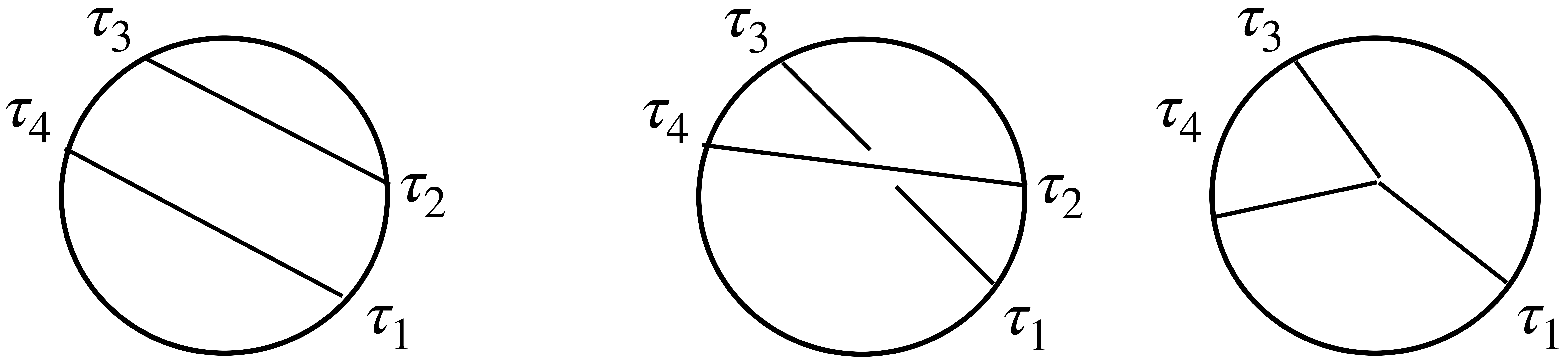
$$\int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{2n-1}} d\tau_{2n} \mathrm{Tr}\langle (\mathrm{i}A_\mu \dot{x}^\mu(\tau_1) + \phi_0 |\dot{x}(\tau_1)|) \cdots (\mathrm{i}A(\tau_{2n})\dot{x}^\mu(\tau_{2n}) + \phi_0 |\dot{x}(\tau_{2n})|)\rangle$$

$$\frac{(\lambda/4)^n}{n!(n+1)!} \to -\frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \sim e^{\sqrt{\lambda}}/\lambda^{\frac{3}{4}}$$

$$\langle A_\mu^a(\tau_1) A_\nu^b(\tau_2)\rangle = \frac{g^2}{4\pi}\frac{\eta_{\mu\nu}\delta^{ab}}{(x(\tau_1)-x(\tau_2))^2}$$

$$\langle \phi_0^a(\tau_1)\phi_0^b(\tau_2)\rangle = \frac{g^2}{4\pi}\frac{\delta^{ab}}{(x(\tau_1)-x(\tau_2))^2}$$

planar&sum



対称表現(次元がデカイ)のWilson loopのgravity dual のD3-brane解[Drukker-Fiol 05']

反対称表現(次元がデカイ)のWilson loopのgravity dual のD5-brane解[Yamaguchi 06']

行列模型で「Wilsonの期待値」の計算[Hartnoll-Kumar '06]

行列模型と重力での計算が一致する

Pestunの局所化による導出

S^4上の$\mathcal{N} = 2^*$ 超対称ゲージ理論に対して超対称局所化を定式化した。

そしてESZの予想を示した。

超対称局所化の考え方

超対称場の量子論の分配函数(超対称指数)Zを与える経路積分を計算したい

$$Z = \int \mathscr{D}\Phi \exp\left(-\int_M \mathscr{L}(\Phi) \right)$$

超対称局所化の考え方

作用にQ-exact項の1-parameter familyを加える。

$$Z = \int \mathscr{D}\Phi \exp\left(-\int_M \mathscr{L}(\Phi) - t\delta V[\Phi] \right)$$

超対称局所化の考え方

分配函数(or 超対称指数) 1-parameterの係数の値によらない

$$\frac{dZ}{dt} = \int \mathscr{D}\Phi \exp\Big(-\int_M \mathscr{L}(\Phi) - t\delta V[\Phi] \Big)\delta V$$

$$= -\langle 0 | \{Q, V\} | 0 \rangle_t$$

$$= 0$$

超対称局所化の考え方

tに依らないので評価しやすい所にとる。$t=\infty$では$\delta V[\Phi_0]=0$を満たす

場の配位$\Phi=\Phi_0$周りの1-loop計算が厳密な結果を与える

$$
\begin{aligned}
Z &= \lim_{t\to\infty}\int \mathscr{D}\Phi \exp\left(-\int_M \mathscr{L}(\Phi) - t\delta V[\Phi]\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\int \mathscr{D}\tilde{\Phi}\mathscr{D}\Phi_0 \exp\left(-\int_M \mathscr{L}(\Phi_0) - \left.\frac{\partial^2\delta V[\Phi]}{\partial\Phi^2}\right|_{\Phi=\Phi_0}\tilde{\Phi}^2\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \int \mathscr{D}\Phi_0 \exp\left(-\int_M \mathscr{L}(\Phi_0)\right)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2\delta V[\Phi_0]}{\partial\Phi^2}\right)
\end{aligned}
$$

この時、$\delta\mathcal{O}=0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathcal{O}\rangle$にも
超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int \mathscr{D}\Phi_0\, \mathcal{O}(\Phi_0)\ \exp\Big(-\int_M \mathscr{L}(\Phi_0)\Big)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 \delta V[\Phi_0]}{\partial\Phi^2}\right)$$

この時、$\delta\mathcal{O}=0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathcal{O}\rangle$にも超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathcal{O}\rangle=\int\mathcal{D}\Phi_0\,\mathcal{O}(\Phi_0)\,\exp\left(-\int_M\mathcal{L}(\Phi_0)\right)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2\delta V[\Phi_0]}{\partial\Phi^2}\right)$$

$\delta V[\Phi_0]=0$なる場の配位(停留点)の経路積分

この時、$\delta\mathcal{O} = 0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathcal{O}\rangle$にも超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int \mathcal{D}\Phi_0 \underbrace{\mathcal{O}(\Phi_0)}_{\boxed{\text{停留点での演算子}\mathcal{O}\text{の値}}} \exp\left(-\int_M \mathcal{L}(\Phi_0)\right) \mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 \delta V[\Phi_0]}{\partial \Phi^2}\right)$$

この時、$\delta\mathscr{O}=0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathscr{O}\rangle$にも超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathscr{O}\rangle = \int \mathscr{D}\Phi_0\, \mathscr{O}(\Phi_0)\ \exp\left(-\underline{\int_M \mathscr{L}(\Phi_0)}\right) \mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 \delta V[\Phi_0]}{\partial \Phi^2}\right)$$

停留点でのQ-closed
作用の値

この時、$\delta\mathcal{O} = 0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathcal{O}\rangle$にも超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int \mathcal{D}\Phi_0\, \mathcal{O}(\Phi_0)\, \exp\left(-\int_M \mathcal{L}(\Phi_0)\right) \underbrace{\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 \delta V[\Phi_0]}{\partial\Phi^2}\right)}_{}$$

停留点周りののQ-exact作用の1loop行列式

この時、$\delta\mathcal{O}=0$となるQ-closed(BPS)な演算子の期待値$\langle\mathcal{O}\rangle$にも超対称局所化は適用できることに注意

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int \mathcal{D}\Phi_0\, \mathcal{O}(\Phi_0)\ \exp\Big(-\int_M \mathcal{L}(\Phi_0)\Big)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2\delta V[\Phi_0]}{\partial\Phi^2}\right)$$

局所化の手続き(各ステップ計算が大変)

1. M上の局所化で使うsuperchargeとQ-closed actionを作る

2. Q-exact項を作れ

3.Φ_0を具体的に決定せよ。

4.1-loop detを具体的に計算せよ

実際に$M=S^4$上のSYMで局所化をするときにSUSY不変なラグランジアンをどう作るか？

答え:4d $\mathcal{N}=4$ SYMの作用にconformal massを付けて、SUSY変換のパラメーターをconformal Killing spinor ϵ、SUSY変換に$\nabla_\mu \epsilon$に依存する項を入れるとpartial off-shell SUSYがある

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left(F_{MN}^2+\Psi\Gamma^M D_M\Psi+\sum_{i=1}^{7}K^{i2}+\sum_{A=1}^{6}\frac{2}{r^2}\phi_A^2\right)$$

$$\delta_\epsilon A_M=\epsilon\Gamma_M\Psi$$

$$\delta_\epsilon\Psi=\frac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}\epsilon+K^i\nu_i+\phi_A\Gamma^{A\mu}\nabla_\mu\epsilon$$

$$\delta_\epsilon K_i=\mathrm{i}\nu_i\Gamma^M D_M\Psi$$

Q-exact項の選び方は？

$$\text{答え}:V=\int_{S^4}\Psi\overline{\delta\Psi}$$

・停留点での場の配位

$$\Phi_0:\ \partial_\mu\phi_0=0,\ \sum_i (K^i)^2=\frac{\phi_0^2}{r^2},\ \Psi=\cdots=A_\mu=0$$

・停留点でのQ-closed作用と演算子の値

$$\int_{S^4}\mathscr{L}[\Phi_0]=\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left(F_{MN}^2+\Psi\Gamma^M D_M\Psi+\sum_{A=1}^{6}\frac{2}{r^2}\phi_A^2+\sum_{i=1}^{7}K^{i2}\right)\Bigg|_{\Phi=\Phi_0}=\frac{4\pi r^2}{g^2}\mathrm{Tr}\phi_0^2$$

$$W_\square\Bigg|_{\Phi=\Phi_0}=\mathrm{Tr}e^{2\pi r\phi_0}$$

1-loop detの計算法は？

横断的楕円型偏微分作用素の指数定理を用いて
1-loop行列式が計算する方法を開発した。

$\mathcal{N}=4$の場合は1-loop行列式は1でインスタントン分配函数はϕ_0に依らないので

$$\langle W_{\square}\rangle = \int d\phi_0\,(\mathrm{Tr}e^{2\pi r\phi_0})e^{-\frac{4\pi^2r^2}{g^2}\mathrm{Tr}\phi_0^2}$$

はGaussian matrix modelに一致し、ESZの予想が示された

Pestunの仕事のまとめ

１.ESZの予想が証明を与えた。

２.位相的ツイストしなくても局所化ができて
しかも具体的に停留点が分かる理論がある

３.横断的楕円型偏微分作用素の指数定理を用いて
1-loop行列式が計算する方法を開発した。

疑問：一般の曲がった空間のCurved rigid SUSYとは何か？

1次元

- S^1 [Hori-Kim-Yi '14, (Hwang-Kim-Kim-Park) '14]

Witten indexのJeffrey-Kirwan留数による記述

- I [Sugiyama-YY '20]

2次元

- S^2 [Benini-Cremonesi, Doroud et. al '12] ケーラーポテンシャル
- T^2 [Benini-Eager-Hori-Tachikawa '13] 楕円種数
- D^2 [Honda-Okuda, Hori-Romo '13] ミラーCY3 foldの周期積分、D-brane central charge
- S^2_ε [Closset-Cremonesi-Park '15] quasimap invariants, B模型湯川
- Σ_g [Benini-Zaffaroni 16] quantum cohomologyに付随するFrobenius代数(2d TQFT)
- $I \times S^1$ [Sugiyama-YY '20] Open string Witten index (杉山さんの講演を聞いてください)

3次元

- S^3, S^3_b [Kapustin-Willet-Yaakov '09, Jafferis '10, Hama-Hosomichi-Lee '10, '11]

  M2 braneの自由度, F定理, S-duality wall, 3d-3d対応, 双対性

- $S^1 \times S^2$ [Kim '09, Imamura-Yokoyama '10]

  超共形指数, BPS演算子の数え上げ、双対性のチェック

- $S^1 \times D^2$ [YY-Sugiyama '14, Bullimore-Crew-Zhang '20]

  境界条件を課したBPS演算子の数え上げ、vertex function(K理論的quasimap不変量)

- $S^1 \times \Sigma_g, M_3$ [(Ohta-YY'12), Benini-Zaffaroni '15, Closset-Kim '16, Closset-Kim-Willet '17]

  BHエントロピー、量子K理論との対応、Coulomb or Higgs branchヒルベルト級数,

3次元

・S^3上のHiggs branch演算子とCoulomb branch演算子

[Dedushenko-Pufu-Yacoby '16, D-Fan-P-Y '17 '18]

・$\mathbb{R}^3_\varepsilon$上のCoulomb branch演算子 (モノポール演算子)

[Okuda-YY '19, Assel-Cremonesi-Renwick '19]

Bullimore-Dimofte-Gaiotto '15のabelianized quantized Coulomb branch chiral ring との関係を決定した。壁越え現象とモノポール演算子のOPEの非可換性

・$I \times T^2$ [Sugiyama-YY '20, (Deduhensko-Nekrasov '21, Bullimore-Crew-Zhang '21, Dedushenko '23)]

４.Curved rigid SUSYとは何か？

Curved Rigid SUSYの系統的な構成法[Festuccia-Seiberg '11]

一度、理論を線形化された超重力理論まで
拡張してから、重力多重項の背景を固定して
(グラビティーノのSUSY変換)= 0 の非自明な解を探す。

SUSYの構成法の例：2d $\mathcal{N}=(2,2)$の場合[Closset-Cremonesi]

New minimal SUGRAの場

$g_{\mu\nu}$: 2次元の計量,　　　ψ_μ:グラビティーノ,

$A_\mu^{(R)}$: R対称性ゲージ場,　　　$C_\mu, \tilde{C}_\mu$:グラビフォトン

これらのNew minimal SUGRA multipletは

Supercurrent $\mathscr{R}$-current multipletに結合する

構成法の例：2d $\mathcal{N}=(2,2)$の場合[Closset-Cremonesi '14]

$$\underline{\delta_\epsilon \psi_\mu = 0, \delta_{\bar{\epsilon}} \tilde{\psi}_\mu = 0}$$

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\epsilon = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\epsilon + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\epsilon$$

$$(\nabla_\mu + \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\bar{\epsilon} = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\bar{\epsilon} + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\bar{\epsilon}$$

$$H := -\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(C_\nu + \tilde{C}_\nu)$$

$$G := \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(\tilde{C}_\nu - C_\nu)$$

S^2上のCurved Rigid SUSYの解

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\varepsilon = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\varepsilon + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\varepsilon, \qquad (\nabla_\mu + \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\bar{\varepsilon} + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\bar{\varepsilon}$$

・$H = \frac{\mathrm{i}}{r},\ A_\mu^{(R)} = G = 0$の場合

$$\nabla_\mu\epsilon = \frac{\mathrm{i}}{2r}\gamma_\mu\epsilon,\ \nabla_\mu\tilde{\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{2r}\gamma_\mu\bar{\epsilon}$$

Benini-Cremonesi '12でS^2上のGLSMの局所化に用いられてた conformal Killing spinorに一致

・$G = \frac{\mathrm{i}}{r},\ A_\mu^{(R)} = H = 0$の場合

$$\nabla_\mu\varepsilon = \frac{\mathrm{i}}{2r}\gamma_\mu\gamma^3\epsilon,\ \nabla_\mu\bar{\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{2r}\gamma_\mu\gamma^3\bar{\epsilon}$$

Doround et. al. '12でS^2上のGLSMの局所化に用いられてた conformal Killing spinorに一致

S^2上のCurved Rigid SUSYの解

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\epsilon = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\epsilon + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\epsilon, \qquad (\nabla_\mu + \mathrm{i}A_\mu^{(R)})\bar{\epsilon} = -\frac{1}{2}H\gamma_\mu\bar{\epsilon} + \frac{\mathrm{i}}{2}G\gamma_\mu\gamma^3\bar{\epsilon}$$

・Closset-Cremonesiが見つけた新しい解

$$A_\mu^{(R)} = \frac{1}{2}\omega_\mu,\ \epsilon_- = 0,\ C_\mu = \varepsilon V_\mu,\ \tilde{C}_\mu = 0, \cdots$$

・ε: Ω背景, $\varepsilon = 0$の時は昔WittenのAツイストに一致する。

・これの局所化はClosset-Cremonesi-Park '15が行った。

Remark: これを一次元リフトした$S^1 \times_q S^2$上のSUSY index[Benini-Zaffaroni '15]がある。

$T^2 \times_q S^2$は[Honda-YY '15]がある。

S^2上の局所化の意味

Benini-Cremonesi, Doroud et. alの局所化公式はKahler potentialを与えるだろう

[Jockers-Lapan-Morrison-Kumar-Romo ’12]

$$Z_{S^2} \sim \exp\left(-K(z,\bar{z})\right)$$

一方、Closset-Cremonesi-Parkの局所化公式はオメガ背景$\varepsilon = 0$ ($C_\mu = 0$)の場合は

通常のAツイストでミラーのB模型湯川を与える[CCP ’15]

$$\langle \sigma^3 \rangle_{S^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \oint \frac{d\sigma}{2\pi \mathrm{i}} z^k \sigma^3 \frac{(-5\sigma)^{5k+1}}{\sigma^{5(k+1)}} = -\frac{5}{1-5^5 z} = \int_{\mathrm{CY3}^\vee} \Omega(z) \wedge \nabla_z^3 \Omega(z)$$

オメガ背景$\varepsilon \neq 0$ の場合はquasimap spaceの$\mathbb{C}^*$作用での局所化[Givental '96]

の拡張になっている[Ueda-YY, B. Kim-J. Oh-Ueda-YY ’16,]

3次元境界付き超対称場の量子論に
関連する(最近じゃない)話題と超対称局所化

Dimofte-Gaiotto-Paquette '17による境界付きのduality

Costello-GaiottoによるVOA '18 (私の印象:Rastelliの仕事の3次元アナログ)

Aganagic-Okounkov '16によるelliptic stable envelopeとvertex functionの関係

Dimofte-Gaiotto-Paquette ’17による境界付きのduality

2d $\mathcal{N}=(0,2)$ 境界条件を保つ

$S^1 \times D^2$上のSUSY index

3d v.m.はNeumann($\mathcal{N}$) b.c.

[YY-Sugiyama '14]

$\longleftrightarrow$

2d $\mathcal{N}=(0,2)$ 境界条件を保つ

$S^1 \times D^2$上のSUSY index

3d v.m.はDirichlet ($\mathcal{D}$) b.c.

[Dimofte-Gaiotto-Paquette ’17]

$$Z_{\mathcal{N}/\mathcal{D}} = \mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\beta(D-J_3-R)} q^{D+R} \prod_i y^{F_i}$$

’t Hooft anomalyがマッチする

とき境界付き場の理論は双対で

SUSY indexが一致するだろう。

(DGP ’17)

2d $\mathcal{N} = (0,2)$ 境界条件を保つ$S^1 \times D^2$上のSUSY indexの局所化公式[YY-Sugiyama '14]

$$Z_{\mathcal{N}} = \frac{(q;q)_\infty^{\mathrm{rank(G)}}}{|W_G|} \oint \prod_{a=1}^{\mathrm{rank(G)}} \frac{dx_a}{2\pi \mathrm{i} x_a} \prod_{\alpha \in \mathrm{root}(G)} (x^\alpha; q)_\infty \, Z_{1-\mathrm{loop}}^{\mathrm{c.m.}}(x, y, ; q) \, Z_{\mathrm{ell}}(x, y; q)$$

3d $\mathcal{N} = 2$ chiral multipletの1-loop行列式 with Dirichlet/Neumann境界条件

$$Z_{1-\mathrm{loop}}^{\mathrm{c.m.}} = \begin{cases} \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_G)} \prod_{\rho \in \mathrm{weigtht}(R_F)} (x^{-w} y^{-\rho} q^{1-\Delta/2}; q)_\infty, & \text{(Dirichlet)} \\ \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_G)} \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_F)} \dfrac{1}{(x^w y^\rho q^{\Delta/2}; q)_\infty}, & \text{(Neumann)} \end{cases}$$

境界のトーラス$\partial(S^1 \times D^2) = T^2$上の $\mathcal{N} = (0,2)$楕円種数

$$Z_{\mathrm{ell}} = \begin{cases} \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_G)} \prod_{\rho \in \mathrm{weigtht}(R_F)} \theta_1(x^w y^\rho q^{\Delta/2}; q), & \text{(Fermi)} \\ \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_G)} \prod_{w \in \mathrm{weigtht}(R_F)} \dfrac{1}{\theta_1(x^w y^\rho q^{\Delta/2}; q)}, & \text{(chiral)} \end{cases}$$

YSの2d $\mathcal{N}=(0,2)$ 境界条件を保つ$S^1\times D^2$上のSUSY index の局所化公式についてのremark

・Gauge (gauge-flavor) mixed effective Chern-Simons項とboundaryの2d $\mathcal{N}=(0,2)$ multipletの1-loop gauge anomalyが相殺するようにboundary multipletを選ぶ(anomaly inflow)

例：G=U(1) level k CS-matter理論の場合

$$\underbrace{k+\frac{1}{2}\sum_{i:\text{Dirichlet}}Q_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i:\text{Neumann}}Q_i^2}_{\text{3d chiral multipletの1-loop効果でのレベルシフト}}=\underbrace{\sum_{i:\text{fermi}}\tilde{Q}_i^2-\sum_{i:\text{chiral}}\tilde{Q}_i^2}_{\text{2d }\mathcal{N}=(0,2)\text{ multipletの1-loop効果でのレベルシフト}}$$

・3dのtwist b.c.からelliptic genusはNSセクターで定義されている

2d $\mathcal{N}=(0,2)$ 境界条件を保つ$S^1\times D^2$上の3d vector multipletに

Dirichlet境界条件($\mathscr{D}$) SUSY index の局所化公式[DGP '17, BCZ '20]

$$Z_{\mathscr{D}}=\frac{1}{(q;q)_\infty^{\mathrm{rank(G)}}}\sum_{\mathfrak{m}\in\Lambda(G)}\prod_{\alpha\in\mathrm{root}(G)}\frac{1}{(s^{\alpha+1}q^{\alpha(\mathfrak{m})};q)_\infty}Z^{\mathrm{c.m.}}_{1-\mathrm{loop}}(s,y;q)\ q^{\frac{1}{2}k_{\mathrm{eff}}\mathrm{Tr}(\mathfrak{m}^2)}s^{k_{\mathrm{eff}}\mathfrak{m}}$$

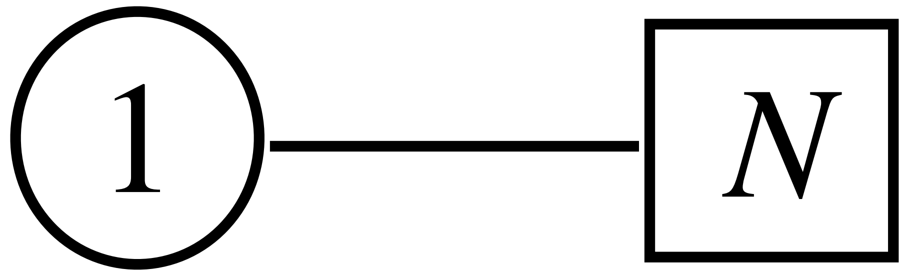
3d $\mathcal{N}=2$ chiral multipletの1-loop行列式

with Dirichlet/Neumann境界条件

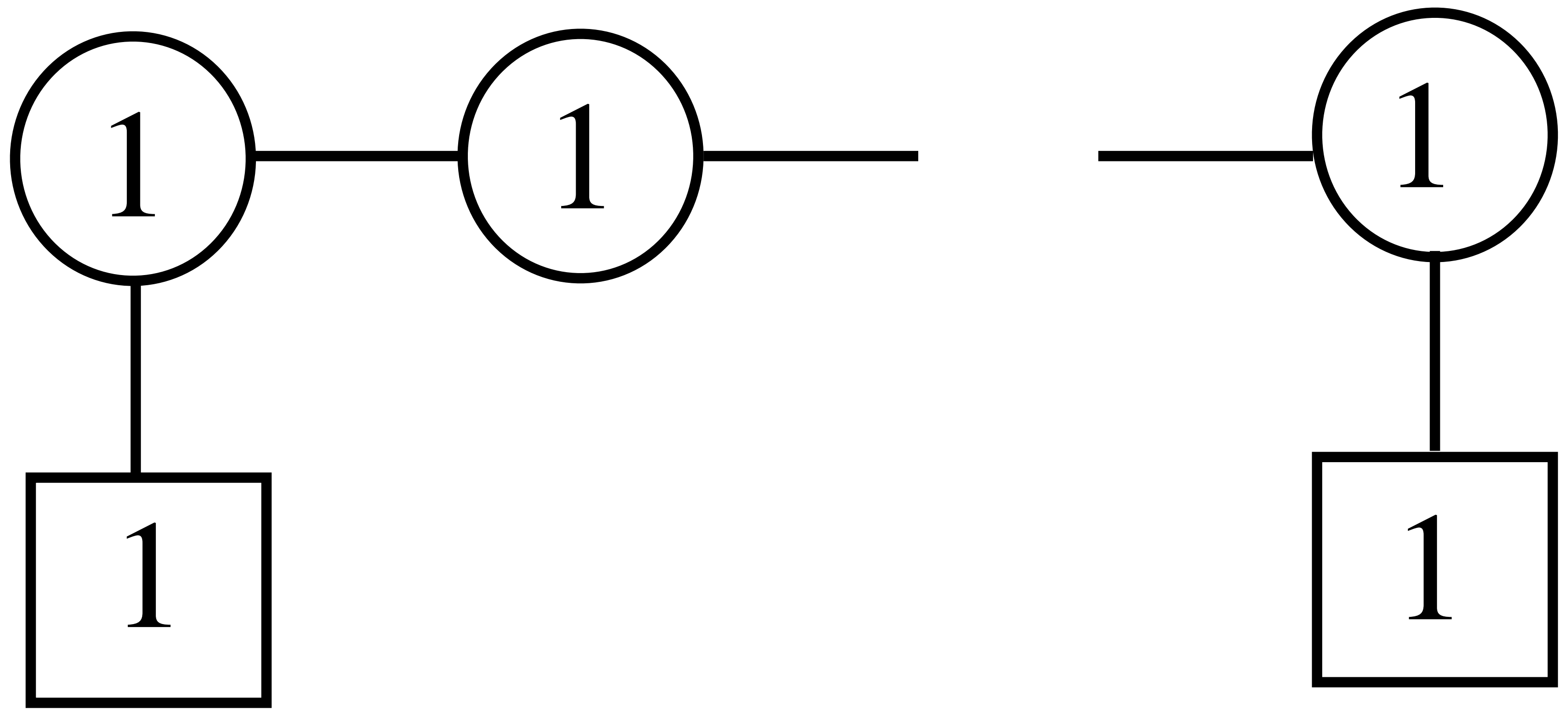
$$Z^{\mathrm{c.m.}}_{1-\mathrm{loop}}=\begin{cases}\displaystyle\prod_{w\in\mathrm{weigtht}(R_G)}\prod_{\rho\in\mathrm{weigtht}(R_F)}(s^{-w}y^{-\rho}q^{1-\frac{\Delta}{2}-\rho(\mathfrak{m})};q)_\infty, & \text{(Dirichlet)}\\ \displaystyle\prod_{w\in\mathrm{weigtht}(R_G)}\prod_{w\in\mathrm{weigtht}(R_F)}\frac{1}{(s^{w}y^{\rho}q^{\frac{\Delta}{2}+\rho(\mathfrak{m})};q)_\infty}, & \text{(Neumann)}\end{cases}$$

3d $\mathcal{N}=4$ mirror symmetry with a boundary [Costello-Gaiotto '18] の簡単な例

N-flavors SQED



SQEDのミラー



SQEDのミラー+bdy. fermion multiplet

$$Z_{\mathcal{N}} = (q;q)_\infty^{2(N-1)} \oint \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_i}{2\pi \mathrm{i} x_i} \prod_{i=1}^{N} \frac{(x_i^{-1}x_{i-1}sq^{\frac{1}{2}};q)_\infty (x_i x_{i-1}^{-1} s^{-1} q^{\frac{1}{2}};q)_\infty}{(x_i x_{i-1}^{-1} q^{\frac{1}{2}};q)_\infty (x_i^{-1} x_{i-1} q^{\frac{1}{2}};q)_\infty}$$

N-flavors SQED

$$Z_{\mathcal{D}} = \frac{1}{(q;q)_\infty^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{Nm^2}(-s)^{Nm} y^m (sq^{1+m};q)_\infty^N (s^{-1}q^{1-m};q)_\infty^N$$

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathscr{N}} = Z_{\mathscr{D}} = 1 &+ \left[2 - 3\left(s + \frac{1}{s}\right)\right] q \\
&+ \left[\left(y + \frac{1}{y}\right) - 3\left(ys + \frac{1}{ys}\right) + 3\left(ys^2 + \frac{1}{ys^2}\right) - \left(ys^3 + \frac{1}{ys^3}\right)\right] q^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left[14 - 6\left(s + \frac{1}{s}\right) + 3\left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right)\right] q^2 + O\left(q^{\frac{5}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Mathematicaで計算すると$q^{\frac{1}{2}}$のorder by orderの計算で一致するっぽい

non-abelianの時は$Z_{\mathscr{D}}$の方が上手くいかん

二つの境界条件$\mathscr{D}, \mathscr{N}$に付随して境界にそれぞれVOAが構成できる。

[Costello-Gaiotto '17]

・$\mathscr{D}$(C-twist)の方は(物理的に初等的な構成法はない？)難しい

・$\mathscr{N}$(H-twist)はVOAは次のBRST cohomologyで定義される

(Rastelliの4d superconformal gauge theoryに付随するVOAの拡張になってる)

hypermultiplet scalar $(q_i, \tilde{q}_i)$に付随して境界に

symplectic bosonが定義される

$$q_i(z)\tilde{q}_j(0) \sim \frac{\delta_{ij}}{z}$$

gauge anomalyを相殺する境界のfermion $(\psi_i, \bar{\psi}_i)$

$$\psi_i(z)\bar{\psi}_j(0) \sim \frac{\delta_{ij}}{z}$$

3d G vector multipletに付随して境界に

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ bc-ghost (b^a, c^a) が定義される

ここでは簡単のためにabelian gauge theoryを考える

$$Q_{BRST} = \int \frac{dz}{2\pi \mathrm{i}} c^a (J^a_{sb} + J^a_f + J^a_{bc})$$

$$J^a_{sb} := \mu^a_{\mathbb{C}}(q, \tilde{q}) \quad J^a_f := \mu^a_{\mathbb{C}}(\psi, \bar{\psi}) \quad J^a_{bc} := b^a c^a$$

$Q^2_{BRST} = 0$とanomaly inflowが満たされることが対応している。

VOAを$KerQ_B/ImQ_B$定義する。

[YY '23]

Costello-GaiottoのH-twistのabelian gauge theoryのVOAは

KuwabaraのtoricのhyperKahler VOAのfermionによる拡張になってる。

特にHiggs branchの真空が$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$ (SQEDのミラー)時はVOAはW代数

$W^{1-N}(\mathfrak{sl}_N, f_{\mathrm{subreg}})$を部分代数として含んでいる。$N=3$はBershadsky-Polyakov代数と呼ばれる。

また代数が以下の元で生成されると予想した。$N=3$は閉じるのをチェックしたので

BP代数の拡張を発見した。$Z_{\mathcal{N}} = \mathrm{Tr}(-1)^{J_{F,0}} q^{L_0} s^{J_{F,0}} y^{J_{SB,0}+J_{F,0}}$が成り立つと予想した。

$$J_F := -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_i\bar{\psi}_i \qquad G_I^+ := \prod_{i\in I^c} q_i \prod_{j\in I}\bar{\psi}_j, \qquad G_I^- := \prod_{i\in I^c}\tilde{q}_i\prod_{j\in I}\psi_j$$

$$J_{SB} := -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i\tilde{q}_i \qquad M_i^+ := q_i\psi_i \qquad M_i^- := \tilde{q}_i\bar{\psi}_i$$

$$Z_{\mathcal{N}} = = 1 + \left[2 - 3\left(s + \frac{1}{s}\right)\right] q$$

$$+ \left[\left(y + \frac{1}{y}\right) - 3\left(ys + \frac{1}{ys}\right) + 3\left(ys^2 + \frac{1}{ys^2}\right) - \left(ys^3 + \frac{1}{ys^3}\right)\right] q^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \left[14 - 6\left(s + \frac{1}{s}\right) + 3\left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right)\right] q^2 + O\left(q^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$N = 3$$

$$J_F := -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i \bar{\psi}_i \qquad G_I^+ := \prod_{i \in I^c} q_i \prod_{j \in I} \bar{\psi}_j, \qquad G_I^- := \prod_{i \in I^c} \tilde{q}_i \prod_{j \in I} \psi_j$$

$$J_{SB} := -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i \tilde{q}_i \qquad M_i^+ := q_i \psi_i \qquad M_i^- := \tilde{q}_i \bar{\psi}_i$$