

Narain CFTの有理性と 単純カルレントを用いた分配関数の構成

京都大学数理解析研究所 D2 古田悠馬

Based on arXiv:2307.04190

概要

ある種の誤り訂正符号から，Narain CFT
（トーラス上のコンパクトボソン）を構成できる

→物理量が誤り訂正符号の言葉で表せる（計算しやすい）

逆にどのようなNarain CFTが誤り訂正符号から構成できるか？

概要（主な結果）

Narain CFTが誤り訂正符号から構成できるための条件を**トーラス**と**B field**で表す

従来考えられていた誤り訂正符号より**広いク
ラスの符号まで拡張できる**ことが分かった

目次

- Narain CFTについて
- 符号を用いた構成
- 単純カレントによる分配関数の構成
- 符号的構造を持つための条件

目次

- Narain CFTについて
- 符号を用いた構成
- 単純カレントによる分配関数の構成
- 符号的構造を持つための条件

Narain CFTとは

n 次元トーラス上の n 個のボソン

- トーラス $\mathbb{R}^n/\Lambda$ を決定する n 次元格子 Λ
- 2階反対称テンソル B

の2つでパラメーター付けされる

⇒ **even self-dual lattice** によってパラメーターづけることもできる (ただし Lorentzian metric)

Narain CFTのHolography

Narain CFTすべてのaveragingと3次元CS重力の双対性(Maloney, Witten2020, Afkhami-Jeddi et al. (2021))

全てではなく特定の性質を持つNarain CFTのaveragingも考えられている(特定の誤り訂正符号から構成されるNarain CFT… cf: Angelinos, Chakraborty, Dymarsky(2022), Kawabata, Nishioka, Okuda(2022), Merulia, Mukhi, Singh(2021), Ashwinkumar et al.(2021)…)

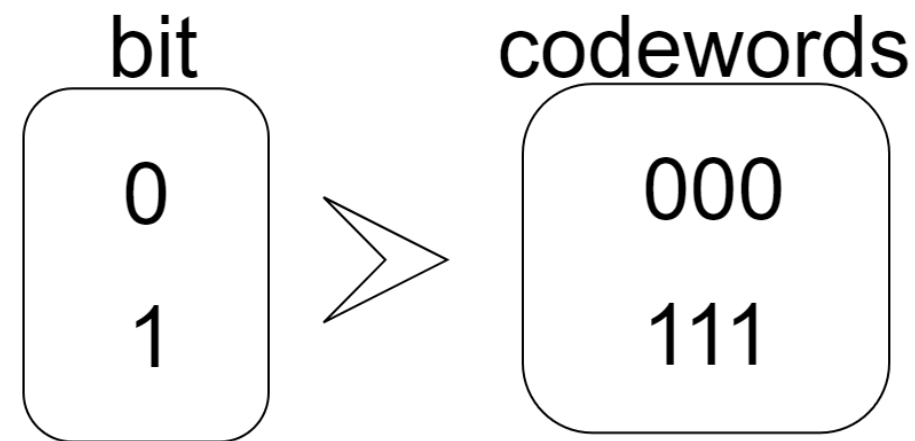
目次

- Narain CFTについて
- 符号を用いた構成
- 単純カレントによる分配関数の構成
- 符号的構造を持つための条件

誤り訂正符号による構成

誤り訂正符号(over $\mathbb{F}_p$)

$\cdots \mathbb{F}_p^n$ の k 次元部分線形空間



生成行列

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} : k \times n \text{ 行列}$$

今回登場する誤り訂正符号

$n \times 2n$ 行列を生成行列に持つ doubly even self-dual code



同値変形により，生成行列を

$$G = (I \ B)$$

の形にできる (B-form code)

誤り訂正符号による構成

Narain CFTの構成

doubly even self-dual
な誤り訂正符号



even self-dual
な格子



Narain CFT

※計量はLorentzian

分配関数と重み多項式

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta|^{2n}} \sum_{(p_L, p_R) \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}p_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}p_R^2} = \frac{1}{|\eta|^{2n}} W_c\left(\frac{b\bar{b}+c\bar{c}}{2}, \frac{b\bar{b}-c\bar{c}}{2}, \frac{a\bar{a}}{2}\right)$$

誤り訂正符号による構成

Narain CFTの構成

doubly even self-dual
な誤り訂正符号

※計量はLorentzian

even self-dual
な格子

全ての
Narain CFT

When?

Narain CFT

分配関数と重み多項式

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta|^{2n}} \sum_{(p_L, p_R) \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}p_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}p_R^2} = \frac{1}{|\eta|^{2n}} W_c\left(\frac{b\bar{b}+c\bar{c}}{2}, \frac{b\bar{b}-c\bar{c}}{2}, \frac{a\bar{a}}{2}\right)$$

目次

- Narain CFTについて
- 符号を用いた構成
- 単純カレントによる分配関数の構成
- 符号的構造を持つための条件

単純カルレントとは

以下を満たすプライマリー場 $\mathcal{O}_a$ を**単純カルレント**という

どのようなプライマリー場 $\mathcal{O}_b$ に対しても

$$\mathcal{O}_a(z)\mathcal{O}_b(0) \sim \mathcal{O}_c(z)$$

となる。

全ての単純カルレントは有限アーベル群をなす
(特にVerlinde代数の可換部分群)

モジュラー不変な分配関数の分類

単純カレントによる ``twist'' を行うことでモジュラー不変な分配関数を構成することができる (Kreuzer, Schellekens 1994)

$$Z = \sum_{a:\text{primary}} M_{a,\beta} \chi_a \bar{\chi}_{[\beta]a}$$

$M_{a,\beta}$ がどのような数かによって
 χ_a 同士の組み合わせが決まる

Discrete Torsion

一般に,

$$M_{a,\beta} \propto \prod_i \delta^{(1)}(Q_i(a) + X_{ij}\beta_j)$$

となる。 $\therefore (\delta \text{の中身}) = 0$ (twist eq.) の解が χ_a 同士の組み合わせを決めている

X_{ij} には discrete torsion と呼ばれる反対称行列が含まれる

→ 単純カレントによる構成の自由度

今回の単純カレント orbifold

$B=0$ のNarain CFT $\Rightarrow$ diagonal modular inv.
partition function

これを元に他のNarain CFTを構成

- どのように *discrete torsion* を選べば符号的構造をもつ *Narain CFT* になる？
- *discrete torsion* の意味

今回の仮定

$\Lambda^\top \Lambda = \text{diag}(\frac{2q_1}{p_1}, \dots, \frac{2q_n}{p_n})$ となる場合

→ Verlinde algebra $K =$

$$\mathbb{Z}_{2p_1q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2p_nq_n} \cong \{ \mathcal{O}_{(i_1, \dots, i_n)} \mid i_k \in \mathbb{Z}_{2p_kq_k} \}$$

和の構造: $\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \sim \mathcal{O}_{a+b}$

$$\mathcal{S} := \langle \mathcal{O}_{(2q_1, 0, \dots, 0)}, \dots, \mathcal{O}_{(0, \dots, 0, 2q_n)} \rangle \subset K$$

目次

- Narain CFTについて
- 符号を用いた構成
- 単純カレントによる分配関数の構成
- 符号的構造を持つための条件

Theorem その 1

ある $\epsilon_{ij} \in \mathbb{Z}$ があって, B field が

$$\left(\frac{\Lambda^T B \Lambda}{2} \right)_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{p_i}, \quad \forall i, j \cdots (\star)$$

を満たすとき, Λ, B で決まる Narain CFT は $B = 0$ の理論を $\mathcal{S}$ によって単純カレント orbifold した理論 (discrete torsion は $\frac{\Lambda^T B \Lambda}{2}$) と一致する。

Theorem その 2

(★)のとき, primary場の集合から $(\mathbb{Z}_{p_1 q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n q_n})^2$ への写像を次で定義:

$$\begin{aligned} \mu: \mathcal{O}'_{l, -l-2qa} & \quad \text{※}\mathcal{O}' \text{ は non chiral primary 場} \\ \mapsto (-q_1 a_1, \dots, -q_n a_n, l_1 + q_1 a_1, \dots, l_n + q_n a_n) \end{aligned}$$

すると $\text{Im} \mu$ は $(\mathbb{Z}_{p_1 q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n q_n})^2$ の **加法部分群**
→ 誤り訂正符号の一般化

分配関数と重み多項式

誤り訂正符号による Narain CFT の構成
…分配関数 = 符号の重み多項式で書けた

$\text{Im}\mu$ にも「重み多項式」 $W(x_1, \dots, x_n)$ を定義できる
このとき,

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{|\eta|^{2n}} W\left(\left\{\psi_{a_1 b_1}^{(p_1 q_1)}\right\}, \dots, \left\{\psi_{a_n b_n}^{(p_n q_n)}\right\}\right)$$

→従来の Narain CFT の構成の「逆写像」ができた

具体例: B form code over $\mathbb{F}_p$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2}{p}}I, B = \epsilon(\text{antisym. 整数値 } n \times n \text{ 行列, } p: \text{素数})$$

twist eq. を解くことで $\text{Im} \mu \subset \mathbb{Z}_p^{2n}$ は

$$G = \begin{pmatrix} I & \epsilon^T \end{pmatrix}$$

で生成される B-form code ($\mathbb{F}_p$ code を用いた構成と consistent!)

具体例: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ code

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

このとき twist eq. を解いて $\text{Im} \mu$ を求めると

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ の加法部分群
(より広いクラスの誤り訂正符号)

まとめ

- Narain CFTが符号的な構造を持つための十分条件を Λ, B の言葉で書き下した
- その条件を満たすとき, Narain CFTは**単純カレント**による構成とみなすこともできる
- 現れる誤り訂正符号は従来定義されていたものよりも**広いクラス**
- これまでの誤り訂正符号→Narain CFTの構成の「**逆写像**」になっている

今後の展望

- $\Lambda^T \Lambda$ が対角でない場合への一般化
- そのとき現れる「誤り訂正符号」は何か？
- Discrete Torsionは数学的にはKreuzer Schellekens Bihomomorphism(KSB)
→今回の話を一般のKSBに応用できる？(2d $\leftrightarrow$ 3d)
- 全てのNarain RCFTを離散数学的な対象で構成できるか