



されている[3]。

$W$ ボソンの凝縮が起きたとき、超伝導の場合のように電磁場が質量を持つプロカ場になると思われる。この問題を扱った文献が見当たらなかったため、第3節では、このプロカ場の方程式を導き、プロカ場の質量の値も決定される。その最大質量は  $84.5\text{GeV}$  となった。

## 2. $W$ ボソンの凝縮

Weinberg-Salam の電弱相互作用の統一理論において、そのフェルミオンを除いた Lagrangian は次で与えられる

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(B) + |(\partial_\mu - \frac{1}{2}ig'B_\mu - \frac{1}{2}ig\tau_a A_\mu^a)\phi|^2 - V(\phi) \quad (2.1)$$

ここで  $A_\mu^a$  は  $SU(2)$  ゲージ場、 $B_\mu$  は  $U_Y(1)$  ゲージ場、

$$F_{\mu\nu}(B) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad a = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$W_\mu^\pm$  ボソンの定義は

$$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2)/\sqrt{2}, \quad A_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu^2 = i\frac{W_\mu^+ - W_\mu^-}{\sqrt{2}}, \quad g_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1) \quad (2.4)$$

したがって、

$$-\frac{g}{2}(\tau_1 A^1 + \tau_2 A^2) = -\frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & gW^+/\sqrt{2} \\ gW^-/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$-\frac{1}{2}g'B - \frac{1}{2}g\tau_3 A^3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} g'B + gA^3 & 0 \\ 0 & g'B - gA^3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

電磁場  $A_\mu, Z_\mu$  ボソンの導入

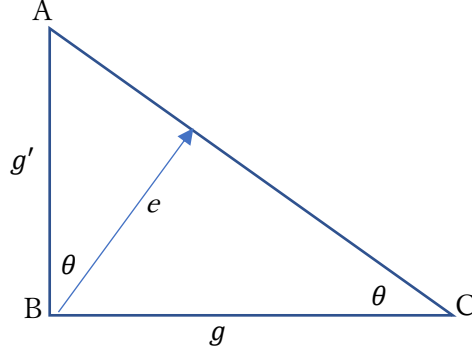
$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ A_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu c - Z_\mu s \\ A_\mu s + Z_\mu c \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

したがって、

$$g'B - gA^3 = A(g'c - gs) - Z(g's + gc) \quad (2.8)$$

$$g'B + gA^3 = A(g'c + gs) + Z(-g's + gc) \quad (2.9)$$

$A_\mu$ が電磁場なら、 $g'c = gs = e$ (電子の電気素量)とすればよい( $c = \cos\theta$ ,  $s = \sin\theta$ )。



☒ Weinberg angle  $\theta$

その結果次のように纏められる：

$$g'B - gA^3 = -Z(g's + gc) = -Z\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (2.10)$$

$$g'B + gA^3 = 2eA + eZ\frac{c^2 - s^2}{cs} \quad (2.11)$$

$$g'B = Ag'c - Zg's = Ae - Z\frac{es}{c} \quad (2.12)$$

Zボソンは捨てる。ヒグス・ポテンシャルは次のように与えられる：

$$V(\phi) = \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2, \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi = \varphi_0 + h/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mu^2 = 2\lambda\varphi_0^2 \quad (2.13)$$

このヒグス場 $\varphi$ を用いると、ヒグス運動項は次のように書ける：

$$\partial_\mu\phi - i \begin{pmatrix} eA_\mu & (g/\sqrt{2})W_\mu^+ \\ (g/\sqrt{2})W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} -i\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\varphi \\ \partial_\mu\varphi \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

まとめると、

$$|(\partial_\mu - \frac{1}{2}ig'B_\mu - \frac{1}{2}ig\tau_a A_\mu^a)\phi|^2 = (\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{g^2}{2}(W_\mu^+W^{-\mu})\varphi^2 \quad (2.15)$$

また、 $F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + g(A_\mu^1A_\nu^2 - A_\nu^1A_\mu^2)$ の2乗項は

$$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^3)^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^3) - \frac{g^2}{2}[(A^1)^2(A^2)^2 - (A^1 \cdot A^2)^2] - gF_{\mu\nu}(A^3)A^{1\mu}A^{2\nu} \quad (2.16)$$

$$F_{\mu\nu}(A^3) = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$$

となるので、Higgs Lagrangian は、電磁場 $A_\mu$ と $W_\mu^\pm$ で書き表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A) - ieF_{\mu\nu}(A)(W^{-\mu}W^{+\nu}) - \frac{1}{2}g^2[(W_\mu^+W^{-\mu})^2 - (W_\mu^+W^{+\mu})(W_\nu^-W^{-\nu})] \\ & + \frac{g^2}{2}\varphi^2(W^-W^+) + (\partial_\mu\varphi)^2 + 2\lambda\varphi_0^2\varphi^2 - \lambda(\varphi^4) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^1)^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^2)^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで最後の2項は次のように書ける：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^1)^2 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^1) - \frac{g^2}{2}[(A^2)^2(A^3)^2 - (A^2A^3)^2] - gF_{\mu\nu}(A^1)A^{2\mu}A^{3\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^1) + \frac{e^2}{4}[(W^+ - W^-)^2(A)^2 - ((W^+ - W^-)A)^2] - i\frac{e}{\sqrt{2}}F_{\mu\nu}(A^1)(W^{+\mu} - W^{-\mu})A^\nu, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^2)^2 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^2) - \frac{g^2}{2}[(A^3)^2(A^1)^2 - (A^3A^1)^2] - gF_{\mu\nu}(A^2)A^{3\mu}A^{1\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^2) - \frac{e^2}{4}[(W^+ + W^-)^2(A)^2 - ((W^+ + W^-)A)^2] - \frac{e}{\sqrt{2}}F_{\mu\nu}(A^2)(W^{+\mu} + W^{-\mu})A^\nu \end{aligned} \quad (2.19)$$

電磁場として1,2成分のみ考え、それに応じて $W_\mu^\pm$ ボソンも1,2成分のみ考え、絶対値と位相で表す：

$$\begin{aligned} A^\mu &= (0, A^1, A^2, 0) = (0, -\frac{Hy}{2}, \frac{Hx}{2}, 0) \\ W_1^- &= R_1 \exp(i\theta_1), \quad W_2^- = R_2 \exp(i\theta_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

全体のLagrangian は次のようになる：

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A) + 2eF_{12}R_1R_2\sin\theta - 2g^2\sin^2\theta R_1^2R_2^2 + \frac{g^2}{2}\varphi^2 R_\mu R^\mu + (\partial_\mu\varphi)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda\varphi_0^2\varphi^2 - (\lambda\varphi^4) \\
& - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^1) - \frac{e^2H^2}{4}(R_1x\sin\theta_1 + R_2y\sin\theta_2)^2 + \frac{eH}{\sqrt{2}}F_{12}(A^1)[R_1x\sin\theta_1 + R_2y\sin\theta_2] \\
& - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A^2) - \frac{e^2H^2}{4}(R_1x\cos\theta_1 + R_2y\cos\theta_2)^2 - \frac{eH}{\sqrt{2}}F_{12}(A^2)[R_1x\cos\theta_1 + R_2y\cos\theta_2] \\
& \theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ (Weinberg angle とは異なる)} \tag{2.21}
\end{aligned}$$

以下 $R_1, R_2, \theta, \varphi$ -potential の極値を求める。それには Lagrangian (2.21)を各変数について微分すればよい：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial R_1} &= 2eH\sin\theta R_2 - 4g^2\sin^2\theta R_1 R_2^2 - g^2\varphi^2 R_1 - \frac{1}{2}e^2H^2(x^2R_1 + R_2xy\cos\theta) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial R_2} &= 2eH\sin\theta R_1 - 4g^2\sin^2\theta R_1^2 R_2 - g^2\varphi^2 R_2 - \frac{1}{2}e^2H^2(y^2R_2 + R_1xy\cos\theta) = 0
\end{aligned}$$

これより  $\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{g^2\varphi^2 + e^2H^2x^2/2}{g^2\varphi^2 + e^2H^2y^2/2} = f^2$  が得られる。以下、 $x \sim y \sim 0$  の近傍を考える。したがって

$f \sim 1$  である。すなわち  $R_2 \sim R_1$  が得られる。他の領域では矛盾に落ち入る。これを上の第2式に代入すると次式が成り立つ：

$$eH\sin\theta - 2g^2\sin^2\theta R_1^2 - \frac{g^2\varphi^2}{2} = 0 \tag{2.22}$$

次に $\varphi$ の potential を微分すると、

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + (g^2/4\lambda)R_\mu R^\mu = \varphi_0^2 - (g^2/2\lambda)R_1^2 \tag{2.23}$$

これを (2.22) に代入すると、 $\frac{g^2\varphi_0^2}{2} = m_w^2$  を用いて、次の(2.24)式が得られる：

$$eH\sin\theta - m_w^2 = 2g^2\sin^2\theta R_1^2 - \frac{g^4}{4\lambda}R_1^2 \tag{2.24}$$

一方(2.23)に、 $4\lambda\varphi_0^2 = m_h^2$ を用いると、

$$4\lambda\varphi^2 = m_h^2 - g^2R_1^2/2 \tag{2.25}$$

これを(2.22)に代入すると

$$m_h^2 \sin^2 \theta - eH \sin \theta = \sin^2 \theta 4\lambda \varphi^2 - \frac{g^2 \varphi^2}{2} \quad (2.26)$$

が得られる。

最後に  $\theta$  について極値を考えると、Lagrangian (2.21) より

$$(eH - g^2 R_1^2 \sin \theta) \cos \theta = 0 \quad (2.27)$$

磁界  $H$  が大きい場合を考えているので  $\cos \theta = 0$  より、 $\theta = \pm\pi/2$  が極値を与える。(2.24) に  $\theta = \pi/2$  を入れると

$$eH - m_w^2 = 2g^2 R_1^2 \left(1 - \frac{g^2}{8\lambda}\right) \quad (2.28)$$

を得る。ここで  $\frac{g^2 \varphi_0^2}{2} = m_w^2$ ,  $4\lambda \varphi_0^2 = m_h^2$  の比をとると、

$$\frac{g^2}{8\lambda} = \frac{m_w^2}{m_h^2} = 0.41 \quad (2.29)$$

したがって、(2.28) は正となる： $eH > m_w^2$

また、(2.26) に  $\theta = \pi/2$  を入れると  $m_h^2 > eH$  を得る。なぜなら

$$m_h^2 - eH = 4\lambda \varphi^2 \left(1 - \frac{g^2}{8\lambda}\right) \quad (2.30)$$

になり、(2.28) と同じ形になるからである。

最後に、(2.28) と (2.30) の比をとると

$$\frac{eH - m_w^2}{m_h^2 - eH} = \frac{g^2 R_1^2}{2\lambda \varphi^2} = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\varphi^2}$$

これより次が得られる：

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 \frac{m_h^2 - eH}{m_h^2 - m_w^2} \quad (2.31)$$

**結論：**  $m_w^2 < eH < m_h^2$  の間の磁界に対し  $W$  ボソンの凝縮がある。磁界は  $x, y \sim 0$  なので、線状に近い。

### 3. 電流密度とプロカ場の質量

この節の目的は、 $W$ ボソンの凝縮があるとき、電磁場が質量を持つプロカ場に変身することを示し、その質量も決定することである。

$SU(2)$  のゲージ場  $A_\mu^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , において、その  $a = 1, 2$  成分の運動項は次のように表される：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^1)^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^2)^2 &= -\frac{1}{2}|D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu|^2 \\ &= -(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\mu R^\nu) - e^2 R^2 U^2 - [(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\nu R^\mu) + e^2(R \cdot U)^2]\cos\theta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (3.2)$$

$$W_\mu^- = W_\mu = R_\mu \exp(i\theta_\mu), \quad (3.3)$$

$$U_\mu = A_\mu - \frac{\partial_\mu \theta_\nu}{e}, \quad (3.4)$$

$$\theta = \theta_\mu - \theta_\nu. \quad (3.5)$$

これは Appendix で示される。この結果を用いると、Lagrangian (2.17) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A) - \frac{1}{2}|D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu|^2 - ieF_{\mu\nu}(A)(W^{-\mu}W^{+\nu}) - V(W, \varphi) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(A) - ieF_{\mu\nu}(A)(W^{-\mu}W^{+\nu}) - (\partial_\mu R_\nu)(\partial^\mu R^\nu) - e^2 R^2 U^2 \\ &\quad - [(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\nu R^\mu) + e^2(R \cdot U)^2]\cos\theta - V(W, \varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

この Lagrangian から、電磁場  $A_\nu$  に対する運動方程式が得られる：

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\partial_\mu F^{\mu\nu} - ie\partial_\mu(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = -2e^2 R^2 U^\nu - 2e^2 \cos\theta (R \cdot U) R^\nu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで全微分項は次のように書き表されることに注意しよう：

$$\partial_\mu(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}) = \partial_\mu(R^\mu R^\nu) 2i \sin\theta + i\partial_\mu \theta R^\mu R^\nu 2\cos\theta. \quad (3.8)$$

第2節で見たように、 $W$ -凝縮の状態では  $\cos\theta = 0$ , (2.28)であり、かつ  $R_\mu$  は定数である。したがって Eq. (3.8) は 0 となる。結局、(3.7) は次の Maxwell の方程式となり、current  $J^\nu$  も

定まる：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(A) = 2e^2 R^2 U^\nu = J^\nu. \quad (3.9)$$

明らかに current は保存する： $\partial_\nu J^\nu = 0$ 。それ故、 $U^\nu$  も保存する：

$$\partial^\nu U_\nu = \partial^\nu A_\nu - \partial^\nu \partial_\nu \theta_\mu / e = 0. \quad (3.10)$$

ここで Lorentz condition  $\partial^\nu A_\nu = 0$  を置くと、 $\partial^\nu \partial_\nu \theta_\mu = 0$  が出る。したがって (3.9) 式は  $U^\nu$  によって書き直すことができる：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(U) = \square(A^\nu - \frac{\partial^\nu \theta_\mu}{e}) = 2e^2 R^2 U^\nu = -M^2 U^\nu = J^\nu, \quad (3.11)$$

ここで  $R^2 = -2R_1^2$  なので、 $4e^2 R_1^2 = M^2$  と置いた。これは質量  $M$  を持つプロカ場  $U^\nu$  の方程式に外ならない：

$$(\square + M^2)U^\nu = 0, \quad (3.12)$$

$$M^2 = 4e^2 R_1^2 = 2(e/g)^2 \frac{eH - m_w^2}{1 - (m_w/m_h)^2}. \quad (3.13)$$

ここで質量項は (2.29) and (2.31) 式を用いて得られた。

この節では、 $W$  ボソンの凝縮の状態では、電磁場  $A_\mu$  がプロカ場  $U_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta_\nu / e$  に変る、ここで  $\theta_\nu$  は  $W^{-\nu}$  の位相である。また質量  $M$  は (3.13) で与えられ、その最大質量は  $M_{max} = 0.88 \times \sqrt{m_h^2 - m_w^2} = 84.5 \text{ GeV}$  となる。電流密度は (3.11) で与えられる。

## 謝辞

岡村隆、小門陽、両氏との有益な議論に感謝いたします。

## Appendix (3.1) 式の証明

$K$  を次で定義する：

$$\begin{aligned} K &\equiv |D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu|^2 = (D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu)(D^\mu W^\nu - D^\nu W^\mu)^+ \\ &= (D_\mu W_\nu)(D^\mu W^\nu)^+ + (D_\nu W_\mu)(D^\nu W^\mu)^+ - (D_\mu W_\nu)(D^\nu W^\mu)^+ - (D_\nu W_\mu)(D^\mu W^\nu)^+, \end{aligned}$$

ここで



$$\begin{aligned}
D_\mu W_\nu &= (\partial_\mu - ieA_\mu)[R_\nu \exp(i\theta_\nu)] = (\partial_\mu R_\nu + R_\nu i\partial_\mu \theta_\nu - ieA_\mu R_\nu) \exp(i\theta_\nu) \\
&= [\partial_\mu R_\nu - ieR_\nu \left( A_\mu - \frac{\partial_\mu \theta_\nu}{e} \right)] \exp(i\theta_\nu) = (\partial_\mu R_\nu - ieR_\nu U_\mu) \exp(i\theta_\nu)
\end{aligned}$$

順次計算を続けると

$$(A) = (D_\mu W_\nu)(D^\mu W^\nu)^+ = (\partial_\mu R_\nu - ieR_\nu U_\mu)(\partial^\mu R^\nu + ieR^\nu U^\mu) = (\partial_\mu R_\nu)(\partial^\mu R^\nu) + e^2 R^2 U^2$$

$$(B) = (D_\nu W_\mu)(D^\nu W^\mu)^+ = (A)$$

$$\begin{aligned}
(C) &= (D_\nu W_\nu)(D^\nu W^\nu)^+ = (\partial_\nu R_\nu - ieR_\nu U_\nu) \exp(i\theta_\nu) (\partial^\nu R^\nu + ieR^\nu U^\nu) \exp(-i\theta_\nu) \\
&= [(\partial_\nu R_\nu)(\partial^\nu R^\nu) + e^2(R \cdot U)^2] \exp(-i\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D) &= (D_\nu W_\mu)(D^\mu W^\nu)^+ = (\partial_\nu R_\mu - ieR_\mu U_\nu) \exp(i\theta_\mu) (\partial^\mu R^\nu + ieR^\nu U^\mu) \exp(-i\theta_\nu) \\
&= [(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\nu R^\mu) + e^2(R \cdot U)^2] \exp(i\theta),
\end{aligned}$$

加えると

$$(C)+(D) = [(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\nu R^\mu) + e^2(R \cdot U)^2] 2\cos\theta, \quad \theta = \theta_\mu - \theta_\nu.$$

全部の和をとると、次が得られる：

$$K/2 = (\partial_\mu R_\nu)(\partial^\mu R^\nu) + e^2 R^2 U^2 + [(\partial_\mu R_\nu)(\partial^\nu R^\mu) + e^2(R \cdot U)^2] \cos\theta.$$

## 文献

[1] Jan. Ambjorn and P. Olesen, “Electroweak magnetism, W condensation and antiscreening,” arXiv:hep-ph/9301220, Nucl. Phys. B318, 606(1990), ibid. B380, 193(1990)

[2] K.Enguist and P. Olesen, Phys. Lett. B319,195(1994), S.G. Matinyan and G. K. Savvidy, Nucl. Phys. B134,539(1978)

[3] Juan Maldacena, “Comments on magnetic black holes,” arXiv: 2004.06084v2[hep-th]10 Jul 2020