

量子力学 II レポート問題
(出題 2006/04/16、〆切 2006/04/23 の授業まで)

Report 1. (前期量子論から Schrödinger 方程式) 次の文中の□を埋めよ。答えのみでよい。ただし、ボルツマン定数は k , 光速は c プランク定数は h , また $\hbar = h/2\pi$ である。

- 古典統計力学では、温度が T における振動子の自由度あたりのエネルギーは (a) である。振動数が $\nu \sim \nu + d\nu$ の範囲にある単位体積あたりの振動子の状態数が $8\pi\nu^2 d\nu / c^3$ であることから、真空のエネルギー密度が (b) することとなる。1900 年、プランクは $E/V = \int (c) \times 8\pi\nu^2 d\nu / c^3$ という真空のエネルギー密度に対する内挿式を提案した。この (c) は、振動子の自由度あたりのエネルギーに対応し、振動数 ν の電磁波のエネルギーが (d) の整数倍に限られる、と考えることにより導くことができる。その後、アインシュタインとコンプトンにより、振動数 ν の光は、(d), (e) のエネルギーと運動量 (の大きさ) をもつ粒子の集合であり、光は波動性と粒子性の 2 重性をもつと認識されるようになった。
- 一方、ド・ブロイは運動量 p の粒子は $\lambda = (f)$ という波長の波動性をもつのではないかと提案し、後に回折実験で確かめられた。この考え方に従えば、Bohr の原子模型を簡単に解釈できる。半径 r の円軌道上を運動量 p の粒子が動いており、この粒子が定常波を作っているとすると、周長が (g) の整数倍となるので、(h) ($n = 1, 2, \dots$) なる関係が成り立つ。これは軌道角運動量が $L = (i)$ と離散化されるという要請と同じである。質量 m の質点にポテンシャル $V = -e^2/r$ が働く場合の平面上の運動を表すハミルトニアンは、極座標であらわすと $H(r, p_r, \theta, p_\theta) = (j)$ である。軌道角運動量 $p_\theta = L$ は保存量であることと、円軌道であるために r が一定であることを用いると、この定常状態のエネルギーは L を用いて $E(L) = (k)$ と表せる。 L が離散化されているので、エネルギーも離散化されることとなる。
- それでは、物質波において振動数とエネルギーの関係はどうなるであろうか? 波数を $k = 2\pi/\lambda$ 、角振動数を $\omega = 2\pi\nu$ とすると、一次元で進行する波の位相は時刻 t , 位置 x において $\theta_k(x, t) = (l)$ と与えられる。位相が一定の速度 (位相速度、 v_θ) が古典的速度 $v_{cl} = p/m$ と一致するとすれば、運動量 p と波数 k の関係、自由粒子の古典的エネルギー $E = p^2/2m$ と組み合わせると、エネルギー E と角振動数 ω の関係 $E = (m)$ をえるが、これは光子の場合とは異なってしまふ。一方異なる波数の波を重ね合わせる場合には、波束の進む速度は位相速度ではなく (n) で与えられる。例えば、波数 $k, k + \delta k$ の波を重ね合わせる場合、位相がそろった条件は δk の 1 次までで $\delta\theta(x, t) = \theta_{k+\delta k}(x, t) - \theta_k(x, t) = \delta k \times (o) = 0$ と与えられるので、(n) は $v_g = (p)$ となる。これを古典的速度と一致するとすれば、 ω と k 、 E と ω の関係は $\hbar\omega = (q)$ 、 $E = (r)$ となり、光子の場合と無矛盾となる。
- 上の E と ω , p と k の関係式は、平面波に対して成り立つものであり、波数や振動数が一定でない一般の波に対しては、エネルギーや運動量を、(s) として表せばよい。つまり、 $E \rightarrow (t)$, $p \rightarrow (u)$ と置き換えて波に作用する (s) と考えれば、平面波に対して成り立つのみでなく、それを重ね合わせた一般の波に対しても成り立つであろう。この置き換えを古典的な E と p の関係式に対して行い、ポテンシャルがある場合に拡張し、物質波を表す波動関数 $\psi(x, t)$ に作用させた方程式がシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) \quad (1)$$

である。

Report 2. (プランク公式)

1. ボルツマンの原理「温度 T において、エネルギー E という状態をとる確率は $\exp(-E/kT)$ に比例する」と、プランクの仮説「振動数 ν の光は、 $E_\nu = nh\nu (n = 0, 1, 2, \dots)$ というエネルギーしかとれない」を組み合わせ、温度 T における振動数 ν の光がもつ平均的なエネルギー $\langle E_\nu \rangle_T$ を求めよ。
2. 上の $\langle E_\nu \rangle_T$ の低振動数極限 ($h\nu/kT \ll 1$)、高振動数極限 ($h\nu/kT \gg 1$) における近似的な表式を求めよ。これらに対してどのような解釈が成り立つか？

Report 3. (コンプトン散乱)

波長 λ の光子が質量 m の静止した電子と散乱した。相対論的なエネルギーと運動量の関係 $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ を利用して、角度 θ に散乱される光子の波長 $\lambda(\theta)$ を求めよ。

Report 4. (シュレディンガー方程式と Hamilton-Jacobi 方程式の関連)

ポテンシャルを含む(かつ時間を含む)シュレディンガー方程式において、波動関数を $\psi(x, t) = \exp(iS(x, t)/\hbar)$ とおいたとき、 S が満たすべき方程式を求めよ。また $\hbar \rightarrow 0$ の極限で S が満たす方程式を求めよ。