量子力学 II レポート問題 (2)

(出題 2006/04/23、〆切 2006/05/14 の授業まで)

Report 5. (確率の保存と確率密度流)
1 次元空間でポテンシャル $V(x)$ 中を質量 m の粒子が運動している。シュレディンガー方程式から出発して、次の問題に答えよ。

1. 連続の方程式 ($\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$) が成り立つことをしめし、このときの確率密度流 j を波動関数 $\psi(x,t)$ で表せ。

2. 波動関数 ψ, φ が遠方で十分速く 0 になるとする。Hamiltonian のエルミート性 $\displaystyle\int dx(\hat{H}\psi)^* \varphi = \int dx \psi^* (\hat{H}\varphi)$ を示せ。

Report 6. (エーレンフェストの定理)
1 次元空間でのポテンシャル $V(x)$ 中を質量 m の粒子が運動している。シュレディンガー方程式から出発して、次のエーレンフェストの定理が成り立つことを示せ。

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

Report 7. (ガウス波束の平面波展開)

フーリエ変換は一言でまとめると、「任意の関数は平面波展開でき、その展開係数はフーリエ逆変換で表される」といえる。

$$f(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} a(k) \exp(ikx) \ , \quad a(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) \exp(-ikx) \ ,$$

このことを用いて波束について考えてみよう。
時刻 $t = 0$ において、一次元的に運動する粒子の波動関数が

$$\psi(x, t = 0) = A \exp(-x^2/2a^2 + ik_0 x)$$

と表されているとする。

1. 上の波動関数を規格化せよ。($\displaystyle\int |\psi|^2 dx = 1$ となるように A を求めよ。)

2. $t = 0$ におけるフーリエ係数 $g(k, t = 0)$ を求めよ。

$$\psi(x, t = 0) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} g(k, t = 0) \exp(ikx)$$

3. ポテンシャルがない $(V = 0)$ とき、$g(k, t)$ が時間に依存するとしてシュレディンガー方程式に代入すると、

$$i\hbar \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} g$$

なる方程式が得られることを示せ。またこれをといて $g(k,t) = g(k, t = 0) \exp(-i\omega_k t), (\hbar\omega_k = \hbar^2 k^2/2m)$ となることを示せ。

4. 前問より、任意の時刻の波動関数は、

$$\psi(x, t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} g(k) \exp(ikx - i\omega_k t)$$

$(g(k) = g(k, t = 0)$ とおいた$)$ となることがわかる。ガウス積分を実行し、$|\psi(x,t)|^2$ のピークが $v_g(k_0) = \hbar k_0/m$ で動くことを示せ。

以下の演習問題は提出の必要はありません。各自解いておいてください。

演習問題 1. (3 次元波動関数の規格化)

3 次元にひろがった波動関数が以下のような形で与えられているとき、規格化係数 A を求めよ。

1. $\psi(\boldsymbol{r}) = A\exp(-\boldsymbol{r}^2/a^2)$
2. $\psi(r,\theta,\phi) = A\exp(-r/a)$　(3 次元球座標での体積積分に注意せよ。)
3. $\psi(x,y,z) = A(x+y-z)\exp(-r/a)$　$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$

演習問題 2. (粒子の存在確率)
2 次元にひろがった波動関数が

$$\psi(x,y) = A\exp(-(x^2+y^2)/2a^2)$$

と与えられている。

1. 規格化係数 A を求めよ。
2. 半径が $b < r < c$ の範囲に粒子が見出される確率を求めよ。

量子力学 II レポート問題略解 (1)

Report 1. (前期量子論から Schrödinger 方程式へ)
(a)kT、(b) 発散、(c) $\dfrac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}$ 、(d)$h\nu$、(e)$h/\lambda = h\nu/c$、(f)$\lambda = h/p$、(g) 波長 $(\lambda = h/p)$
(h) $2\pi r = nh/p$ (i) $L = pr = n\hbar$ (j) $H(r,p_r,\theta,p_\theta) = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} - \dfrac{e^2}{r}$ (k) $E(L) = -\dfrac{me^4}{2L^2}$
(ℓ) $\theta_k(x,t) = kx - \omega t$ (m) $E = \hbar\omega/2$ $(\omega/k = \hbar k/m \to \hbar\omega = p^2/m)$ (n) 群速度
(o) $\delta\theta(x,t) = \delta k \times (x - \dfrac{d\omega}{dk}t)$ (p) $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ (q) $\hbar\omega = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m} + \text{const.}$ (r) $E = \hbar\omega + \text{const.}$
(s) 演算子、(t) $E \to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ (u) $p \to -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ (又は、 $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$)

Report 2. (プランク公式)

1. $< E_\nu >_T = \dfrac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}$
2. $< E_\nu >_T = \begin{cases} kT & (h\nu/kT \ll 1, \text{振動子の古典統計力学}) \\ h\nu\ \exp(-h\nu/kT) & (h\nu/kT \gg 1, \text{光子の古典統計力学}\ ^*) \end{cases}$
   ($*$: $\exp(-h\nu/kT)$ が十分小さいとする場合。)

Report 3. (コンプトン散乱) $\lambda(\theta) = \lambda + \dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

Report 4. (シュレディンガー方程式と Hamilton-Jacobi 方程式の関連)
$\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x)\left[-\dfrac{i\hbar}{2m}\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right] = 0$, $\hbar \to 0$ のときには、 [...] 部分が消える。