量子力学 II レポート問題 (4)

(出題 2007/05/28、〆切 2007/06/18 の授業まで)

Report 12. (エルミート演算子) エルミート演算子 $\hat{A}$ は任意の状態 $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ について次の関係式を満たす。

$$\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\hat{A}\psi|\varphi\rangle$$

1. エルミート演算子の固有値が実数であることを示せ。
2. エルミート演算子の異なる固有値に属する固有関数が直交することを示せ。
3. 一次元空間で、運動量演算子 $\hat{p}$ がエルミートであること (上の式が成り立つこと) を波動関数 $\psi(x), \varphi(x)$ を用いて示せ。ただし、$\psi(x), \varphi(x)$ は $x \to \pm\infty$ で十分速く 0 になるものとする。

Report 13. (状態ベクトルの展開—離散スペクトル) ある物理量 A の固有状態 $|u_i\rangle (i = 0, 1, 2, \ldots)$ が、正規直交完全系を作っているとする。

$$\hat{A}|u_i\rangle = a_i|u_i\rangle \ , \quad \langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \ , \quad \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = 1 \ .$$

1. 任意の状態 $|\psi\rangle$ が $|u_i\rangle$ により展開できることを示し、展開係数 c_i を求めよ。
2. 展開係数 c_i を用いて状態 $|\psi\rangle$ のノルム $\langle\psi|\psi\rangle$ を求めよ。
3. 展開係数 c_i と固有値 a_i を用いて状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の期待値を求めよ。

Report 14. (状態ベクトルの展開—連続スペクトル) ある物理量 A の固有状態 $|u_x\rangle (x \in R)$ が、正規直交完全系を作っているとする。

$$\hat{A}|u_x\rangle = x|u_x\rangle \ , \quad \langle u_x|u_y\rangle = \delta(x-y) \ , \quad \int dx |u_x\rangle\langle u_x| = 1 \ .$$

1. 任意の状態が $|\psi\rangle = \displaystyle\int dx\, c(x)|u_x\rangle$ と展開できることを示し、展開係数 $c(x)$ を求めよ。
2. 展開係数 $c(x)$ を用いて状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の期待値を求めよ。ただし $|\psi\rangle$ は規格化されているものとする。

量子力学 II レポート問題略解 (Report 7-10)

Report 7. (ガウス波束の平面波展開)

1. $A = (1/\pi a^2)^{1/4}$ 　 2. $g(k) = (a^2/\pi)^{1/4} \exp(-a^2(k-k_0)^2/2)$ 　3. (略)
4. (略) 授業で行ったように、ガウス積分を実行して $\rho(x,t) = |\psi|^2$ のピークが $x = v_0 t = \dfrac{\hbar k_0}{m} t$ と動くことを示せる。別解として、$\langle x\rangle = \displaystyle\int dk g^*(k,t)\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right) g(k,t)$ から求めることもできる。

Report 8. (シュレディンガー方程式における時間の分離)

1. $\dfrac{df}{dt} = -\dfrac{iE}{\hbar} f \ , \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\varphi + V(\boldsymbol{r})\varphi = E\varphi \ .$
2. シュレディィンガー方程式に代入して左辺、右辺はそれぞれ次の様になり一致する。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_n C_n E_n e^{-iE_n t/\hbar}\,\varphi_n(\boldsymbol{r}) \ , \quad \hat{H}\psi = \sum_n C_n e^{-iE_n t/\hbar}\,\hat{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = \sum_n C_n e^{-iE_n t/\hbar}\,E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}) \ .$$

Report 9. (階段型ポテンシャルでの反射と透過)

1. $\varphi_D(x) = \varphi_C^*(x)$ であることを用いて、

$$\varphi_{C,D}(x) = \begin{cases} \dfrac{k \pm k'}{2k} \exp(ikx) + \dfrac{k \mp k'}{2k} \exp(-ikx) & (x < 0) \\ \exp(\pm ik'x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

2. 独立解は一つしか存在しない。

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \left(\dfrac{k + i\rho}{2k} \exp(ikx) + \dfrac{k - i\rho}{2k} \exp(-ikx) \right) & (x < 0) \\ C \exp(-\rho x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

Report 10. (トンネル効果)

$\gamma^2 = \dfrac{(k^2 - k'^2)^2}{4k^2 k'^2} = \dfrac{V_0^2}{4E(E + V_0)}$ とおくと、 $T = \dfrac{1}{1 + \gamma^2 \sin^2(k'\ell)}$, $R = \dfrac{\gamma^2 \sin^2(k'\ell)}{1 + \gamma^2 \sin^2(k'\ell)}$.