

量子力学 II レポート問題 (7)
(出題 2007/07/23、〆切 2007/09/14)

Report 19. (角運動量の表現)

$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{j}_k$ を満たす $\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z$ を角運動量代数とよぶ。昇降演算子を $\hat{j}_{\pm} \equiv \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$ と定義する。

1. 次の交換関係が成り立つことを示せ。 $[\hat{J}^2, \hat{j}_z] = 0$, $[\hat{j}_z, \hat{j}_{\pm}] = \pm\hat{j}_{\pm}$, $[\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hat{j}_z$
第一式は $\hat{J}^2$ と $\hat{j}_z$ は同時対角化可能であること、第2式は $\hat{j}_{\pm}$ が $\hat{j}_z$ の固有値を ± 1 変化させる演算子であることを示している。

$\hat{J}^2$ の固有値が与えられたとき、 $\hat{j}_z$ の固有値には最大値が存在する。 $(\hat{J}^2$ の固有値は $\hat{j}_z$ の固有値の2乗以上であるから。) この最大値を j とおく。 $\hat{J}^2$ と $\hat{j}_z$ の同時固有状態を $|j, m\rangle$ (m は $\hat{j}_z$ 固有値) と表そう。

2. 次の関係式を示せ。 $\hat{J}^2 = \hat{j}_- \hat{j}_+ + \hat{j}_z (\hat{j}_z + 1) = \hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_z (\hat{j}_z - 1)$
3. $\hat{j}_+ |j, j\rangle = 0$ であることから、 $\hat{J}^2$ 固有値を j であらわせ。
4. $\hat{j}_z$ の最小固有値を m_0 とする。 $\hat{j}_- |j, m_0\rangle = 0$ であることから、 $m_0 = -j$ をしめせ。

これらから、 $\hat{J}^2$ の固有値が与えられたとき、 $\hat{j}_z$ 固有値は $m = -j, -j+1, \dots, j$ となり、 $2j$ が整数であることが分かる。

量子力学 II レポート問題略解 (Report 17-18)

Report 17. (球面波)

1. (略), 2. (略) (代入して整理せよ。)
3. $\left(-\frac{d}{dx}\right) \sin x = -\cos x = \sin(x - \pi/2)$ 、 $\left(-\frac{d}{dx}\right) \cos x = \sin x = \cos(x - \pi/2)$ より、
 $\left(-\frac{d}{dx}\right) (A \sin x + B \cos x) = A \sin(x - \pi/2) + B \cos(x - \pi/2)$
これを繰り返し利用して、 $\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\ell} (A \sin x + B \cos x) = A \sin(x - \ell\pi/2) + B \cos(x - \ell\pi/2)$

Report 18. (級数展開によるシュレディンガー方程式の解法 — 水素原子)

1. $\alpha = 2\rho = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m|E|}$, $\lambda = \frac{1}{\rho a_0} = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{mc^2}{2|E|}}$ 2. $xL'' + (2\ell + 2 - x)L' + (\lambda - \ell - 1)L = 0$
3. $a_{k+1} = \frac{k + \ell + 1 - \lambda}{(k+1)(k+2\ell+2)} a_k$ 4. $\lambda = n_r + \ell + 1$ より、 $E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$ ($n = n_r + \ell + 1$)
5. $L = \text{定数となるので}$, $R_{n\ell}(x) = Nx^{\ell} \exp(-x/2)$, $N = \frac{1}{\sqrt{(2\ell+2)!}}$ ($n = \ell + 1$)
($\int x^2 dx |R_{n\ell}|^2 = |N|^2 \int x^{2\ell+2} \exp(-x) = |N|^2 (2\ell+2)! = 1$)
6. $\lambda = n = \ell + 2$ であるから漸化式より、 $a_1 = -a_0/(2\ell+2) \rightarrow R_{20}(x) = N(1 - x/2) \exp(-x/2)$
 x について規格化すると、
 $\int x^2 dx |R_{20}(x)|^2 = |N|^2 \int dx x^2 (1 - x + x^2/4) e^{-x} = |N|^2 (2! - 3! + 4!/4) = 2|N|^2 = 1$
よって、 $N = 1/\sqrt{2}$. r についての規格化は、
 $\int r^2 dr |R_{20}(\alpha r)|^2 = |N|^2 \alpha^{-3} \int x^2 dx |R_{20}(x)|^2 = 2|N|^2 \alpha^{-3} = 1$
ここで、 $\lambda = n = 1/\rho a_0$ より、 $\alpha = 2\rho = 2/na_0 = 1/a_0$ ($n = 2$) であるから、
 $N = \alpha^{3/2}/\sqrt{2} = a_0^{-3/2}/\sqrt{2} = 2(2a_0)^{-3/2}$
 $R_{20}(r) = (2a_0)^{-3/2} (2 - x) \exp(-x/2) = (2a_0)^{-3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$