

1 古典力学の復習

量子力学は多くの部分で古典力学 (特に Hamilton 形式) を基にしています。ここでは $\epsilon_{ijk}, \delta_{ij}$ の使い方の復習も兼ねて、古典力学の復習を行います。

[1.A] Euler-Lagrange 方程式

Lagrangian $L(q, \dot{q}) = T - V$ が与えられた時、最小作用の原理より次の運動方程式 (Euler-Lagrange の方程式) が得られる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 .$$

[1.B] 正準方程式 (Hamilton の運動方程式)

Hamiltonian $H(q, p) = T + V$ が与えられた時、正準方程式は次のように与えられる。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} .$$

Lagrangian 形式からは、次のように正準共役な運動量、および Hamiltonian が求められる。

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad H(q, p) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L .$$

[1.C] Poisson 括弧

$$\{A, B\}_{PB} \equiv \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] ,$$

Poisson 括弧を用いると、(時間に陽に依存しない) 一般の (q, p) の関数である物理量 $\mathcal{O}$ の時間発展が次のように与えられる。

$$\dot{\mathcal{O}} = \{\mathcal{O}, H\}_{PB} .$$

このことより、Hamiltonian が時間に陽に依存しない場合、Hamiltonian 自身が保存量であることが分かる。

例題 ポテンシャル $V = -\frac{e^2}{r}$ の下で質点 (質量 m) の 2 次元平面上の運動を考える。極座標 (r, θ) を用いると微小距離 (の 2 乗) と運動エネルギーは、

$$|d\mathbf{r}|^2 = \boxed{\text{ア}} , \quad T = \frac{m}{2} \frac{|d\mathbf{r}|^2}{dt^2} = \boxed{\text{イ}}$$

となる。よって、Lagrangian 及び Euler-Lagrange の運動方程式は、次のように与えられる。

$$L = \boxed{\text{ウ}} , \quad \boxed{\text{エ, オ}}$$

さて、Hamilton 形式に移行しよう。 (r, θ) に共役な運動量は

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \boxed{\text{カ}} , \quad p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \boxed{\text{キ}} ,$$

となるので、Hamiltonian および正準運動方程式は次のように与えられる。

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L = \boxed{\text{ク}} , \quad \boxed{\text{ケ, コ, サ, シ}}$$

これから明らかなように $\boxed{\text{ス}}$ は保存量である。また、当然ながら $\boxed{\text{セ}}$ も保存量であるからこの系には保存量が2つあることになる。

保存量について、別の観点から見てみよう。 (p, q) であらわされた物理量 $\mathcal{O}$ が保存量 (あるいは運動の恒量) であることは、Poisson 括弧をもちいれば次の条件となる。

$$\boxed{\mathcal{O}} = 0$$

これにより、上でもとめた (ス)、(セ) が保存量であることが再確認できる。

[1.1] (1次元調和振動子)

Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (1.1)$$

で与えられているとする。次の問に答えよ。

- (1) Euler-Lagrange 方程式を書き下せ。
- (2) q に正準共役な運動量 p を求め、これから Hamiltonian を求めよ。
- (3) 正準運動方程式を書き下し、 p を消去することにより Euler-Lagrange 方程式と一致することを示せ。
- (4) (q, p) 空間での軌道はエネルギー一定の条件から求められる。その概形を記せ。
- (5) 作用変数

$$J = \oint pdq \quad (\oint \text{は一周期についての積分}),$$

をエネルギーの関数として求めよ。

[1.2] (Poisson 括弧)

- (1) A, B, C が (q, p) の関数であり、 a, b, c が定数であるとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\text{反対称性: } \{A, B\}_{PB} = -\{B, A\}_{PB} \quad (1.2)$$

$$\text{線型性: } \{aA + bB, C\}_{PB} = a\{A, C\}_{PB} + b\{B, C\}_{PB} \quad (1.3)$$

$$\text{積: } \{AB, C\}_{PB} = A\{B, C\}_{PB} + \{A, C\}_{PB}B \quad (1.4)$$

$$\text{巾乗: } \{A^n, B\}_{PB} = nA^{n-1}\{A, B\}_{PB} \quad (1.5)$$

- (2) 次の式が成り立つことを示せ。

$$(a) \quad \{q_i, p_j\}_{PB} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\}_{PB} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{PB} = 0, \quad (1.6)$$

$$(b) \quad \{q_i^2, p_j\}_{PB} = 2q_i\delta_{ij}, \quad \{q_i, p_j^2\}_{PB} = 2p_j\delta_{ij}, \quad (1.7)$$

$$(c) \quad \{q_i^n, p_j^m\}_{PB} = nmq_i^{n-1}p_j^{m-1}\delta_{ij}. \quad (1.8)$$

- (3) 以下の Poisson 括弧を求めよ。

$$\{q_i + p_j, q_l - q_m\}_{PB}, \quad \{q_i + p_j^2, q_l - p_m\}_{PB}.$$

- (4) 正準方程式が次のように書き換えられることを示せ。

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{PB}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{PB}.$$

また、 (q, p) の一般の関数である $\mathcal{O}$ の時間発展が

$$\dot{\mathcal{O}} = \{\mathcal{O}, H\}_{PB},$$

と求められることを示せ。

[1.3] (2次元調和振動子)

2次元等方調和振動子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (1.9)$$

と与えられる。次の問に答えよ。

- (1) Lagrangian を極座標 (r, θ) を用いて書き表せ。
- (2) r, θ に正準共役な運動量 p_r, p_θ を求めよ。
- (3) 極座標での Hamiltonian を求めよ。
- (4) p_θ が保存量となることを示し、これより保存量を見出す十分条件を1つ述べよ。

[1.4] (中心力ポテンシャルにおける運動方程式)

質量 m の質点に中心力ポテンシャル $V(r)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) が働いているとする。

- (1) Lagrangian を球座標 (r, θ, ϕ) で表せ。
- (2) (r, θ, ϕ) についての Euler-Lagrange の運動方程式を示せ。
- (3) (r, θ, ϕ) に正準共役な運動量 (p_r, p_θ, p_ϕ) を求めよ。
- (4) Hamiltonian を求めよ。
- (5) 正準運動方程式を示せ。
- (6) この運動における保存量を3つ示せ。

[1.5] (中心力での運動と角運動量)

Hamiltonian が正準変数 x_1, x_2, x_3 と p_1, p_2, p_3 によって $H = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(r)$

(ただし、 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) と与えられている時、

- (1) 次の角運動量ベクトルが保存量であることを示せ。

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (\text{あるいは } L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k)$$

- (2) $\{L_i, L_j\}_{PB} = \epsilon_{ijk} L_k$ が成り立つことを示せ。
(注: ここでは Einstein の縮約の規則をもちいている。)

量子力学レポート問題 1.

[R1.1] 電磁場中を運動する質量 m 、電荷 q の質点の Lagrangian はスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いて

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} \quad (1.10)$$

と与えられる。

(1) Euler-Lagrange 方程式を示し、これが電場 $\mathbf{E}$ 、磁場 $\mathbf{B}$ からのローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

をうけて運動する粒子の運動方程式であることを示せ。ただし、電場・磁場はスカラー、ベクトルポテンシャルにより

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

で与えられる。

(質点の位置 $\mathbf{r}$ は動いているので、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$ を時間で微分するときに気をつけよ。)

(2) $\mathbf{r}$ に共役な運動量 $\mathbf{p}$ を求めよ。

(3) Hamiltonian を求めよ。

(4) 正準運動方程式を求め、運動量変数を消去すると Euler-Lagrange 方程式と一致することを確かめよ。