
原子核物理学入門

京都大学・基礎物理学研究所 大西 明

*Summer Challenge 2017,
Aug. 2017, KEK, Tsukuba, Japan*

原子核物理学入門

1. はじめに

原子核物理学の広がり，中性子星の構造と組成

2. 原子核の大きさ

微分断面積と散乱振幅，ラザフォード散乱と構造因子，原子核の密度分布，不安定原子核

3. 原子核の質量

質量公式，フェルミガス模型

4. 核物質の状態方程式

対称核物質の状態方程式，対称エネルギー，対称エネルギーの実験的制限

5. クォーク物質とハドロン物質

クォーク物質ハドロン物質

6. 中性子星と核物質状態方程式

中性子星の質量・半径と状態方程式重い中性子星とハイペロンパズル中性子星
物理の今後

7. おわりに

原子核物理学の広がり

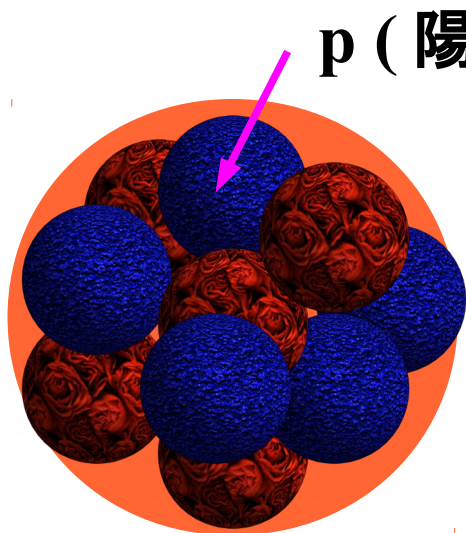
原子核物理学の広がり

■ 天然に存在する原子核

- 中性子数 (N) \approx 陽子数 (Z) (軽い原子核の場合)

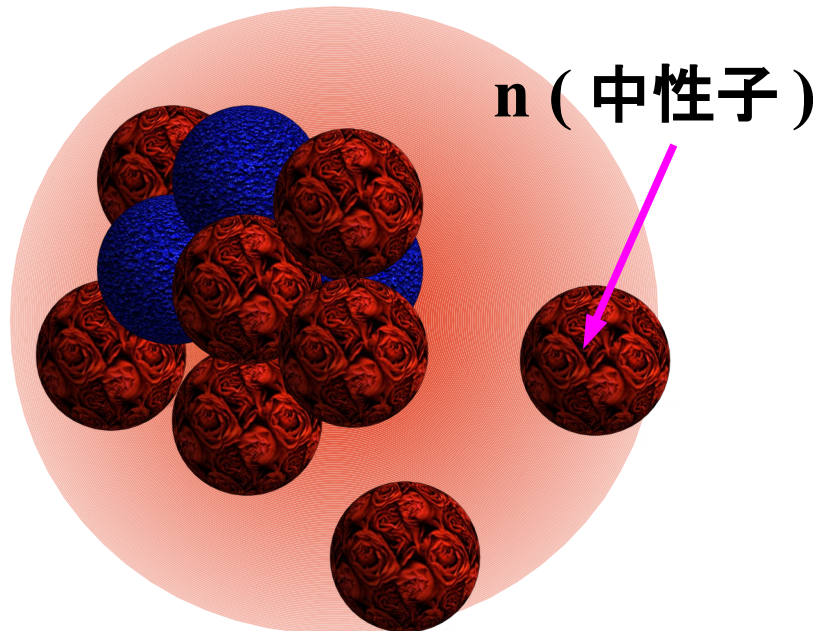
■ エキゾチックな原子核

- 不安定原子核 (中性子過剰核、陽子過剰核、超重元素)
- ハドロン核 (核子以外のハドロンを含む原子核)



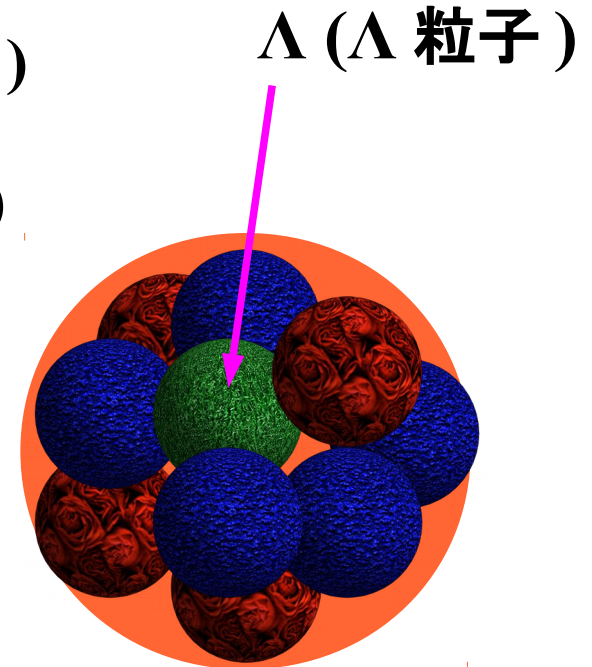
$$N \approx Z$$

例: ^{40}Ca (N=Z=20)



中性子過剰核 $N \gg Z$

例: ^{11}Li (Z=3, N=8)



ハイパー核

例: $^{12}_{\Lambda}\text{C}$ (Z=6, N=5 と Λ)

ニホニウムの作り方 (^{278}Nh)

■ 新元素 Z=113 の発見：理化学研究所 (2004/09/28)

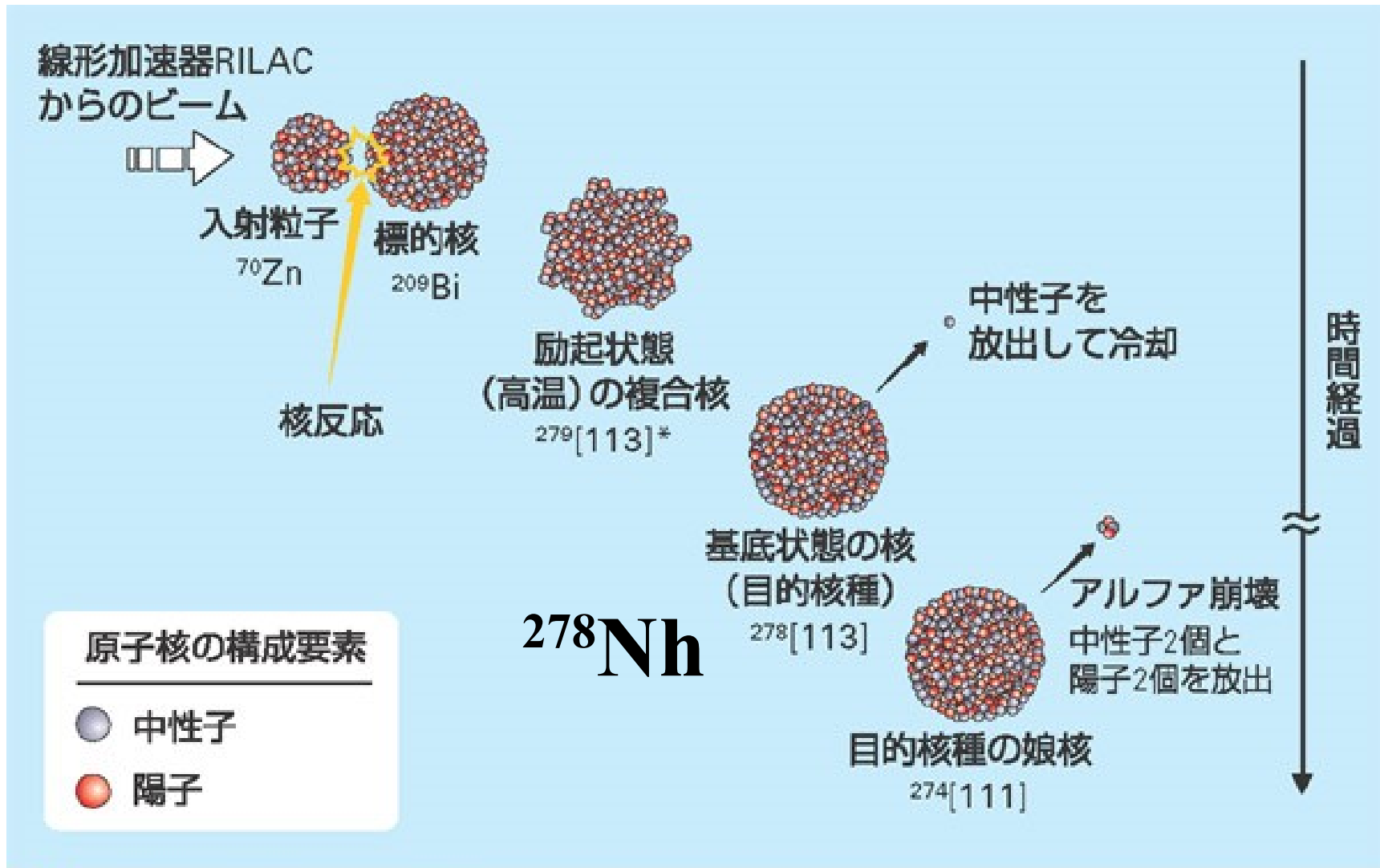
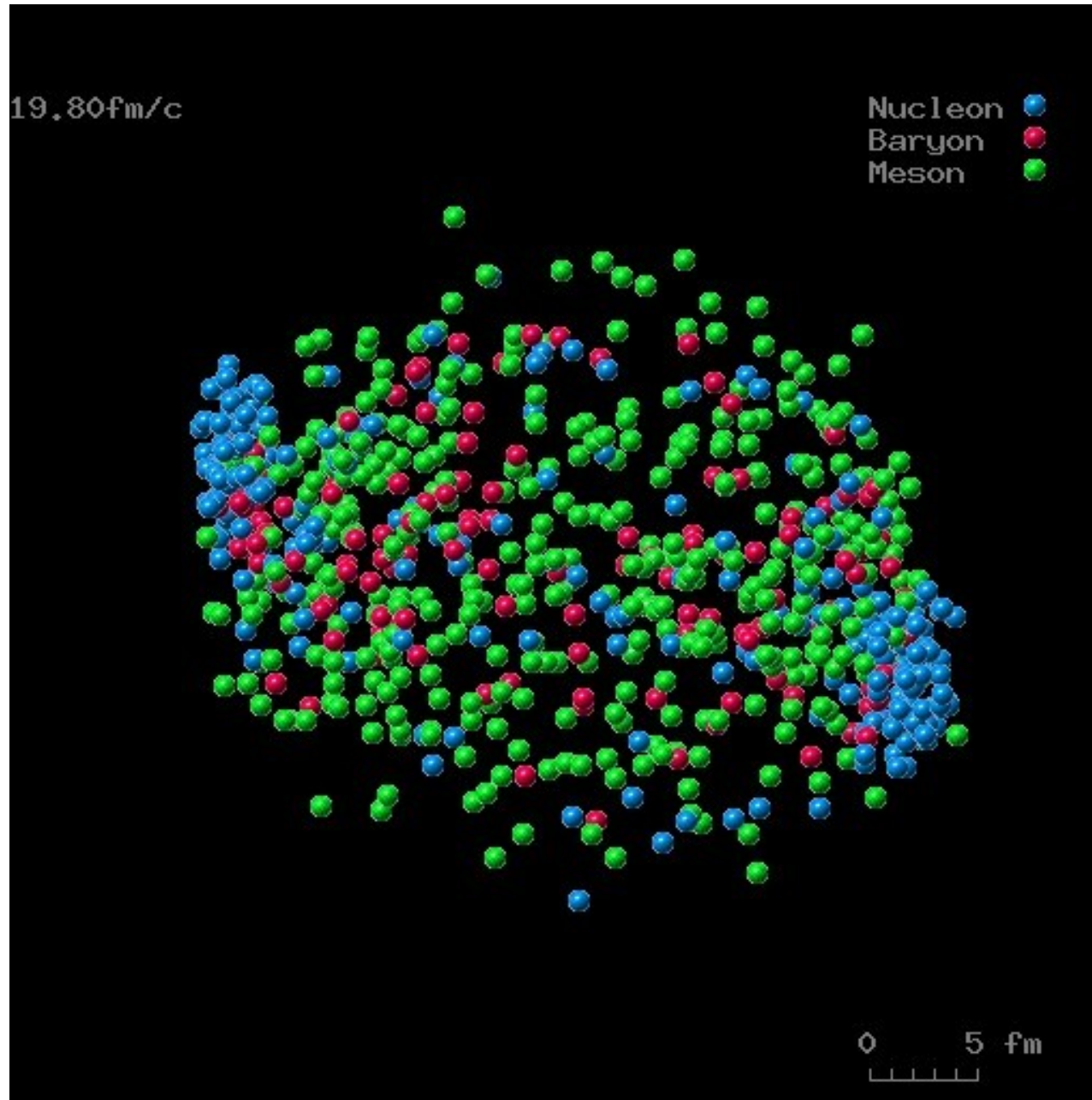


図1 原子番号113元素の合成と崩壊連鎖

3 例目をみつけて命名権獲得。ニホニウムへ。

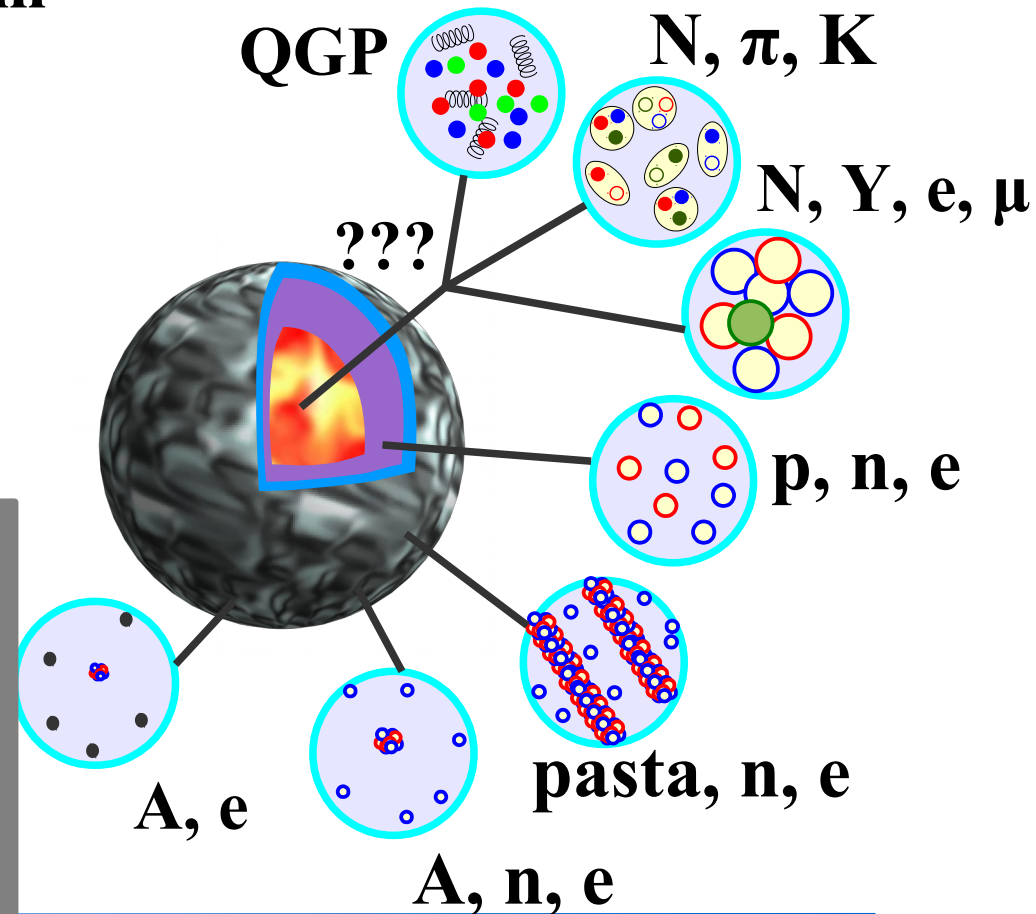
高エネルギー重イオン衝突



中性子星の構造と組成

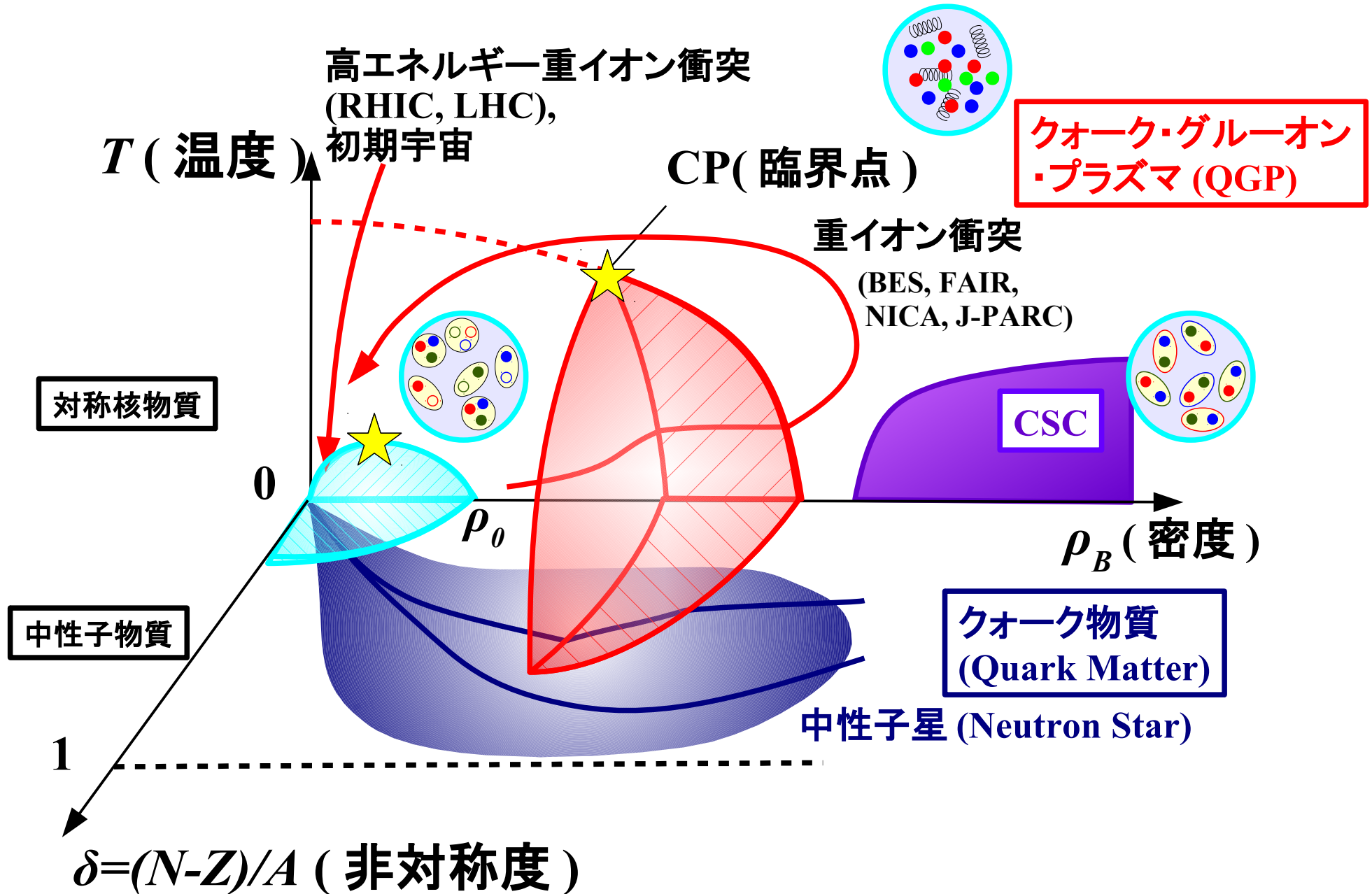
- 質量：太陽質量 (M_{\odot}) の 1-2 倍 (代表的には $M \sim 1.4 M_{\odot}$)
- 半径： $5 \text{ km} < R < 20 \text{ km}$ (代表的には $R \sim 10 \text{ km}$)
- 中性子星の密度 = $(2-7) \times 10^{14} \text{ g / cm}^3$ ($M \sim 1.4 M_{\odot}$, $R = 10-15 \text{ km}$)
- 原子核の密度 $\sim 2.5 \times 10^{14} \text{ g / cm}^3$

中性子星の平均密度は
原子核の 1~3 倍！



中性子星コア(中心部分)は、
宇宙に現存する観測可能な
「最高密度物質」
→ 様々な構成粒子が
現れると期待！

高温・高密度核物質の相図 (QCD Phase Diagram)



講義の内容

■ 目標

原子核の基本的性質（半径・質量）の理解に基づいて、核物質の状態方程式と中性子星の物理を概観する。

■ イントロダクション

- 原子核物理学の広がり，中性子星の構造と組成

■ 基本部分：ミクロな世界の理解の基礎

- 原子核の大きさ：散乱問題から原子核の半径へ（量子力学）
- 原子核の質量：フェルミガス模型から原子核の質量へ（統計力学）

■ 応用部分：多体問題から中性子星へ

- 核物質の状態方程式
- クォーク物質とハドロン物質
- 中性子星と核物質状態方程式

■ まとめ

原子核の大きさ

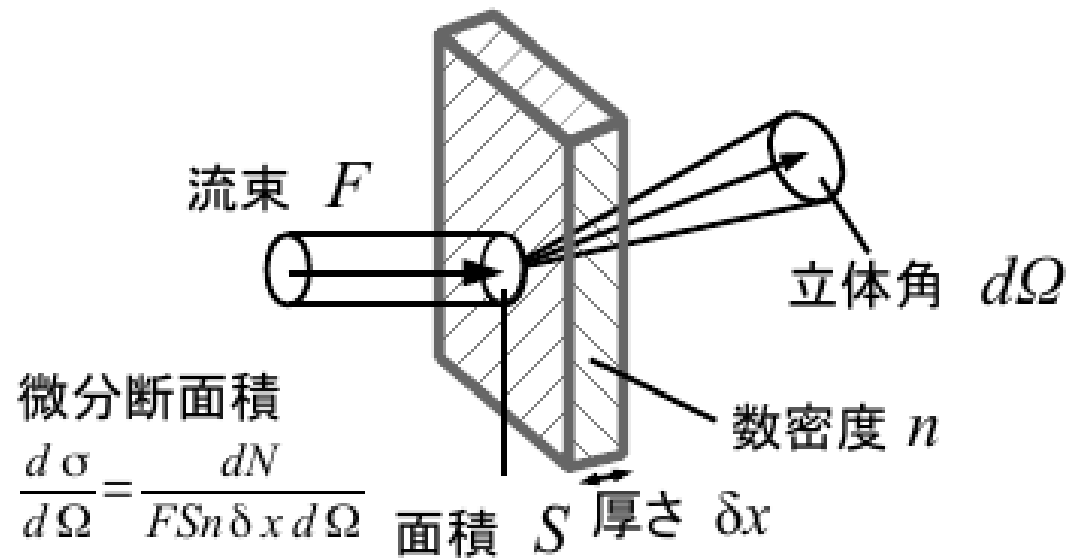
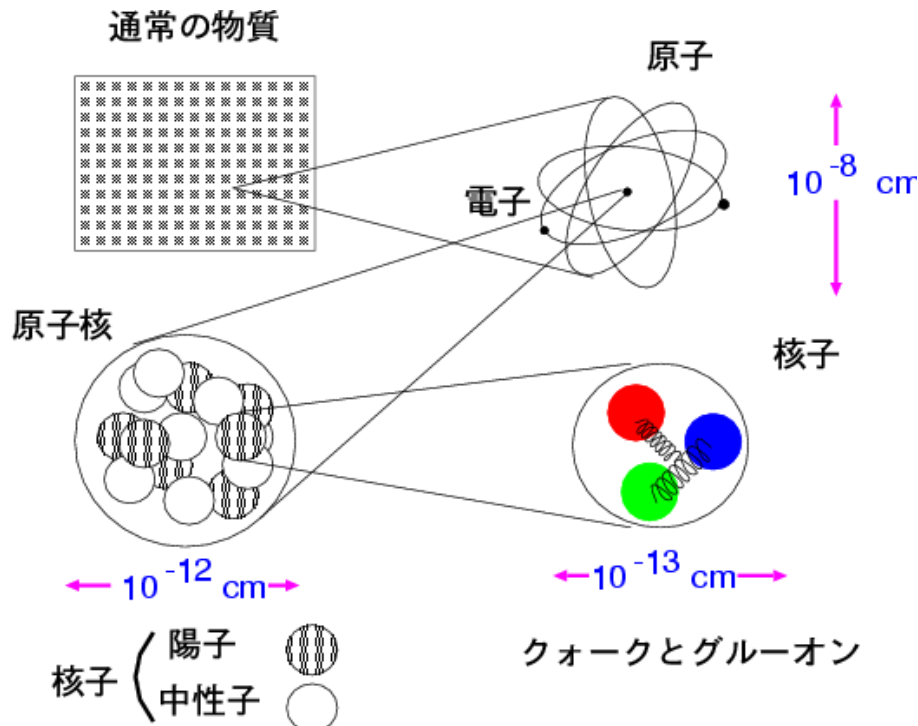
断面積

- 原子核の大きさ: $R \sim 10^{-14}$ m (原子 $\sim 10^{-10}$ m の 1 万分の1)
- 「目で見えない」小さなものをどうやってみるか?
→ 粒子をぶつけて散乱させて測る

■ 散乱断面積

$$\sigma = \frac{N}{FSn\delta x}$$

- 単位入射流束当たり一つの標的で散乱される確率 (面積の次元)



散乱波動関数

■ シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

$$p = -i\hbar \nabla$$

短く書くと

$$(H_0 + V)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad \left(H_0 = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right)$$

- 束縛状態: 遠方で波動関数 ψ がゼロに近づく。
- 散乱状態: 遠方から定常的に流れ込み、
標的で散乱されて流れ出る波動関数

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\begin{aligned} f &= \text{散乱振幅} \\ \mathbf{k} &= \text{入射波束} \\ k &= |\mathbf{k}| \end{aligned}$$

波動関数は規格化されていないが、
流れの密度を用いて (相対的な) 確率解釈が可能。

散乱振幅と微分断面積

■ 流れの密度

$$\mathbf{j} = -i\hbar[\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] / 2m$$

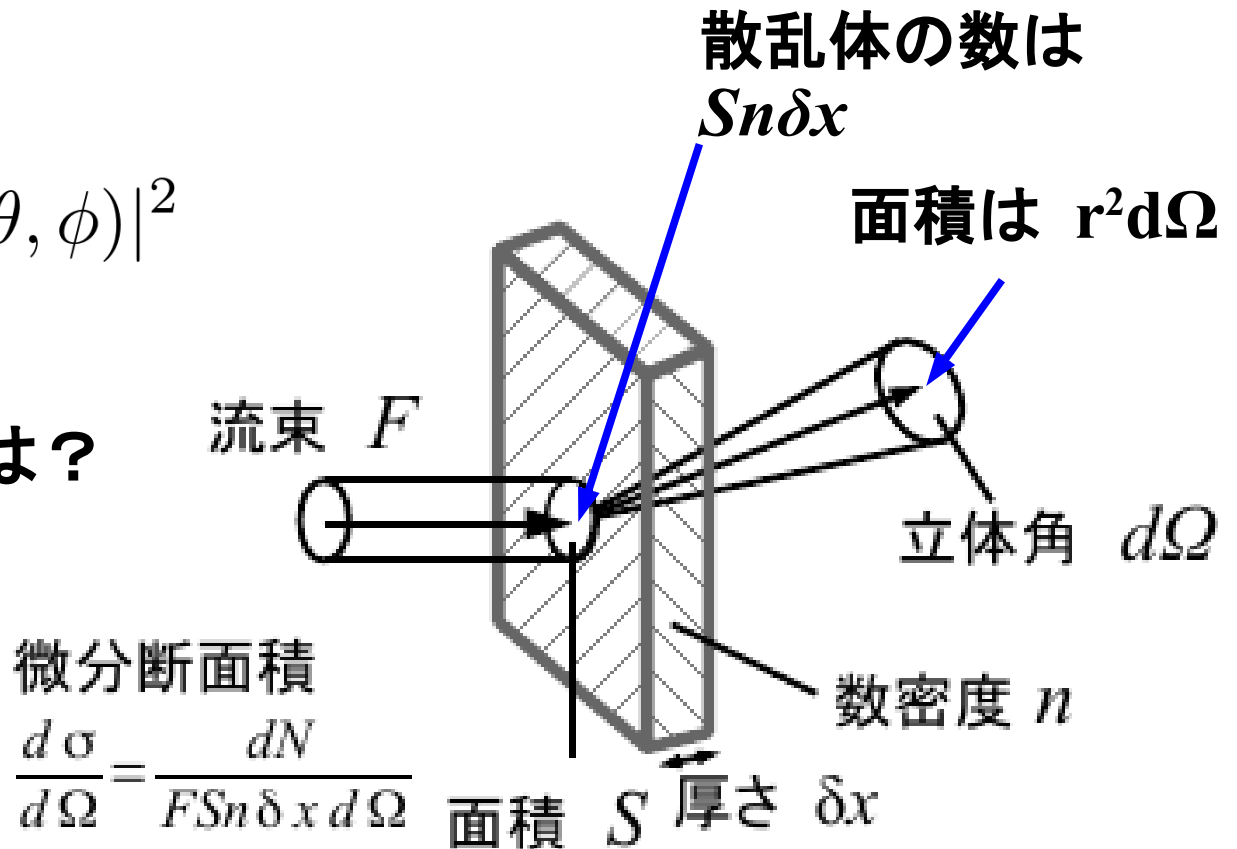
■ 入射流束・外向き球面波の流れの密度

$$F = \hbar k / m, \quad j_r = \hbar k |f(\theta, \phi)|^2 / mr^2$$

■ 微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{F d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

■ 散乱振幅 f と ポテンシャル V の関係は？



散乱波動関数の形式解

■ シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi = \Phi, \quad \Phi \equiv \hat{V}\Psi$$

- Φ が与えられているとすると、一般解は特解 + 斉次方程式の解
斉次項を入射平面波にとると、

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (E - H_0)^{-1}\Phi$$

■ グリーン関数 G を用いてあらわに座標表示

$$(E - H_0)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}')$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \quad f(\theta, \phi)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle \right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

$\mathbf{k}_f = \mathbf{r}$ 方向の
波数ベクトル

■ グリーン関数の導出

● フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - q^2) \tilde{G}(\mathbf{q}) = 1$$

$$\rightarrow \tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k^2 - q^2} = \frac{1}{E - E_q} \quad \left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)$$

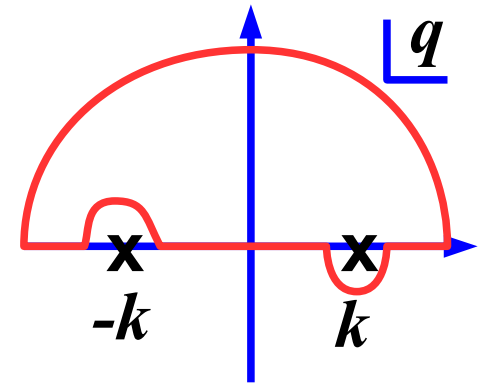
● 逆フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{q^2 dq d(\cos \theta) d\phi}{(2\pi)^3} e^{iqr \cos \theta} \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqr}}{k^2 - q^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} 2\pi i \times k e^{ikr} \times \frac{-1}{2k} = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$



Cauchy の積分定理で
遠方で外向き球面波となるよう
 $q=k$ の pole をとる。(iε 処方)

■ 散乱振幅

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle$$

右辺の ψ を平面波で近似 (ボルン近似)

$$f_{\text{Born}}(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \mathbf{k} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

ボルン近似での散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換に比例

畳み込みポテンシャルと構造因子

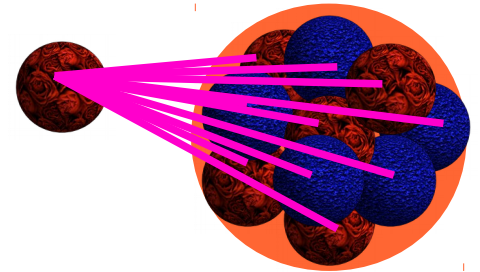
- 畳み込みポテンシャル(原子核と粒子のポテンシャル)

$$V(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad \begin{array}{l} v = \text{入射粒子 - 核子ポテンシャル} \\ \rho = \text{密度} \end{array}$$

フーリエ変換

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \underline{F(\mathbf{q})}$$

構造因子



- 散乱断面積

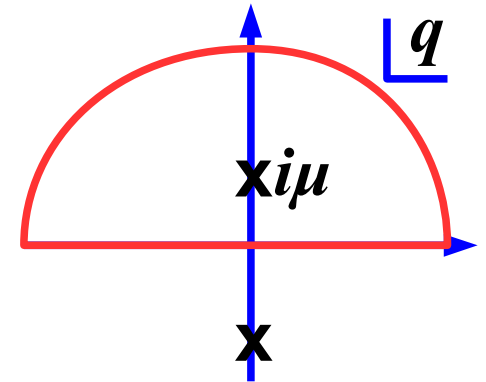
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{v}(\mathbf{q})|^2 |F(\mathbf{q})|^2, \quad F(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

原子核との散乱断面積 = 核子との散乱断面積 × |構造因子|²
(ボルン近似 & 畳み込みの場合)

メモ (2)

- 畳み込みのフーリエ変換 = フーリエ変換の積

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C(\mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k}') \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$



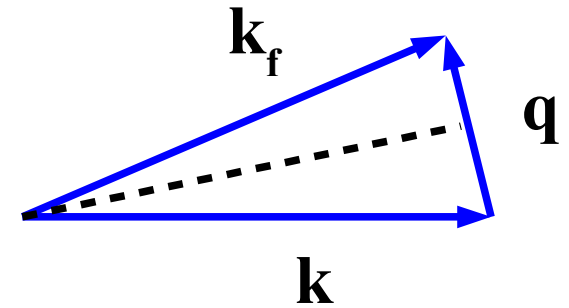
- 湯川関数のフーリエ変換 = Lorentzian

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mu^2 + q^2} = \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqr}}{\mu^2 + q^2} \\ &= \frac{1}{ir} \times 2\pi i \times \frac{i\mu}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\mu r}}{2i\mu} = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \end{aligned}$$

ラザフォード散乱

■ 湯川ポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C \exp(-\mu r)}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{\mu^2 + q^2}$$



■ クーロンポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{q^2}$$

$$q = 2k \sin(\theta/2)$$

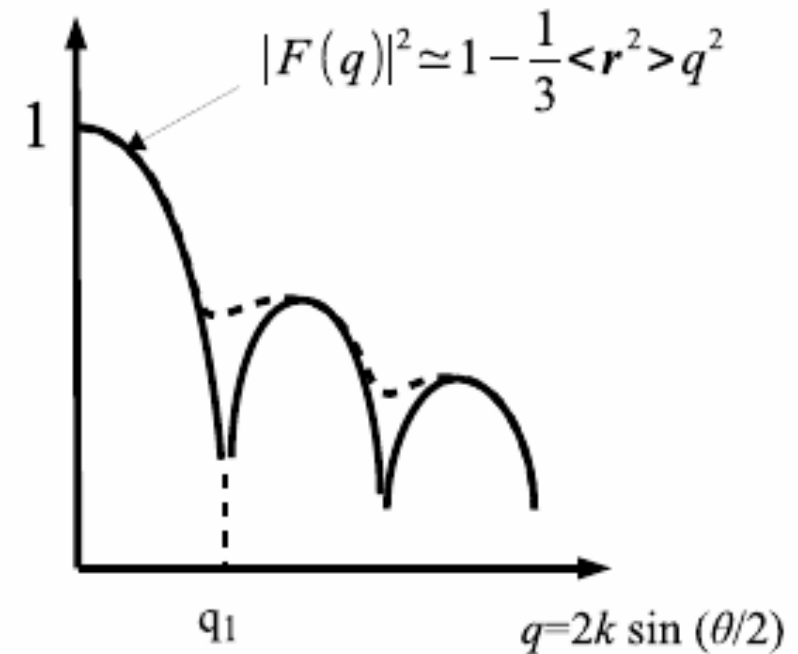
■ ラザフォード散乱 (クーロン散乱)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} |F(\mathbf{q})|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \left(\frac{2m\alpha\hbar c Z_1 Z_2}{\hbar^2 q^2} \right)^2$$

$$= \frac{(\alpha\hbar c Z_1 Z_2)^2}{E^2 (2 \sin(\theta/2))^4}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$



(ρ は規格化されているとする。)

構造因子

- 密度が球対称である場合

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \frac{\sin qr}{qr}$$

$$= \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \left(1 - \frac{1}{6} q^2 r^2 + \mathcal{O}(q^4) \right)$$

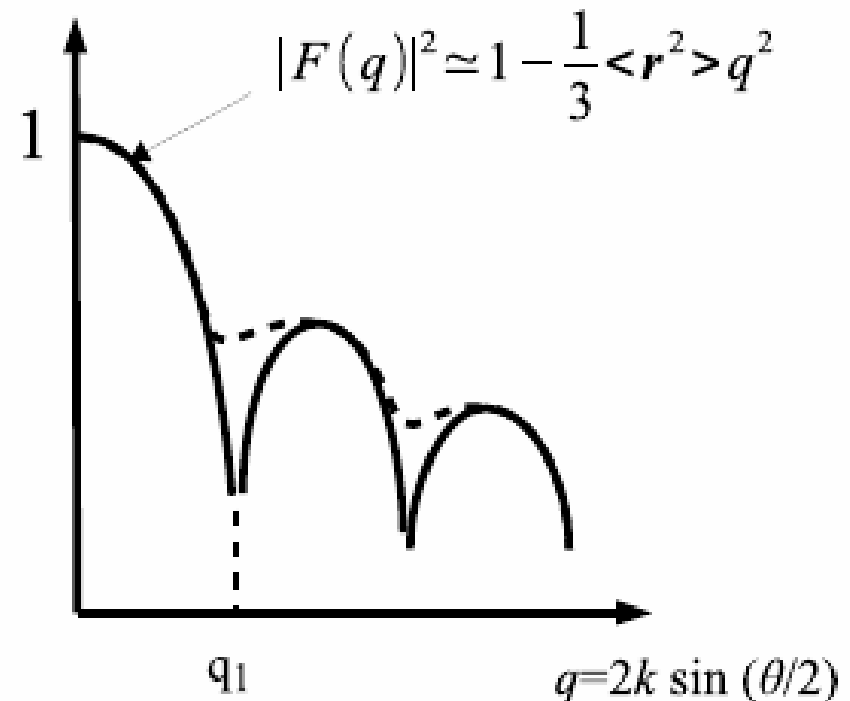
$$= 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$

小さな q での形から
平均自乗半径が分かる

- 半径 R の一様球の場合

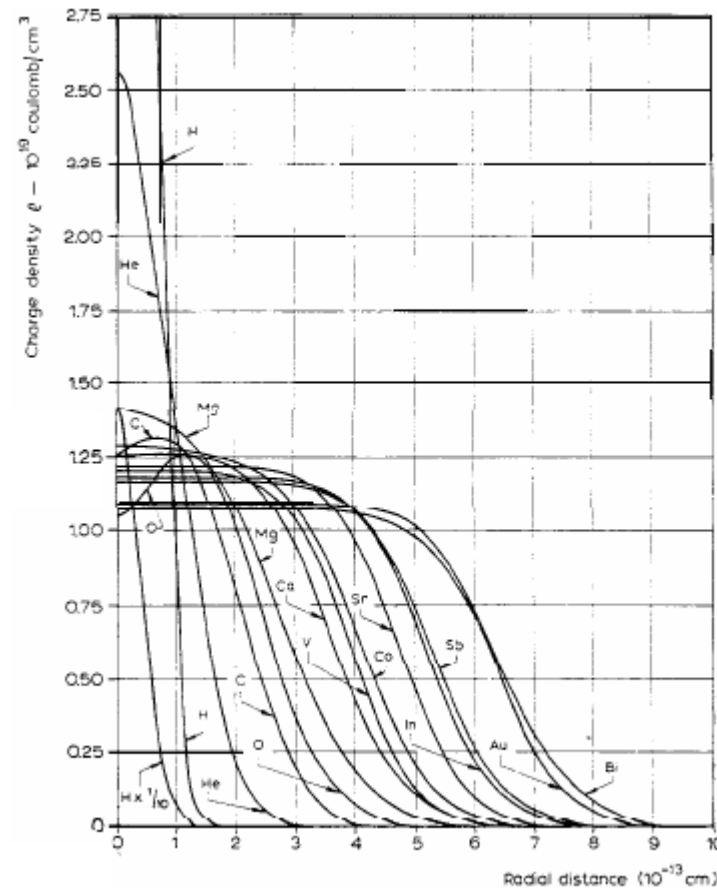
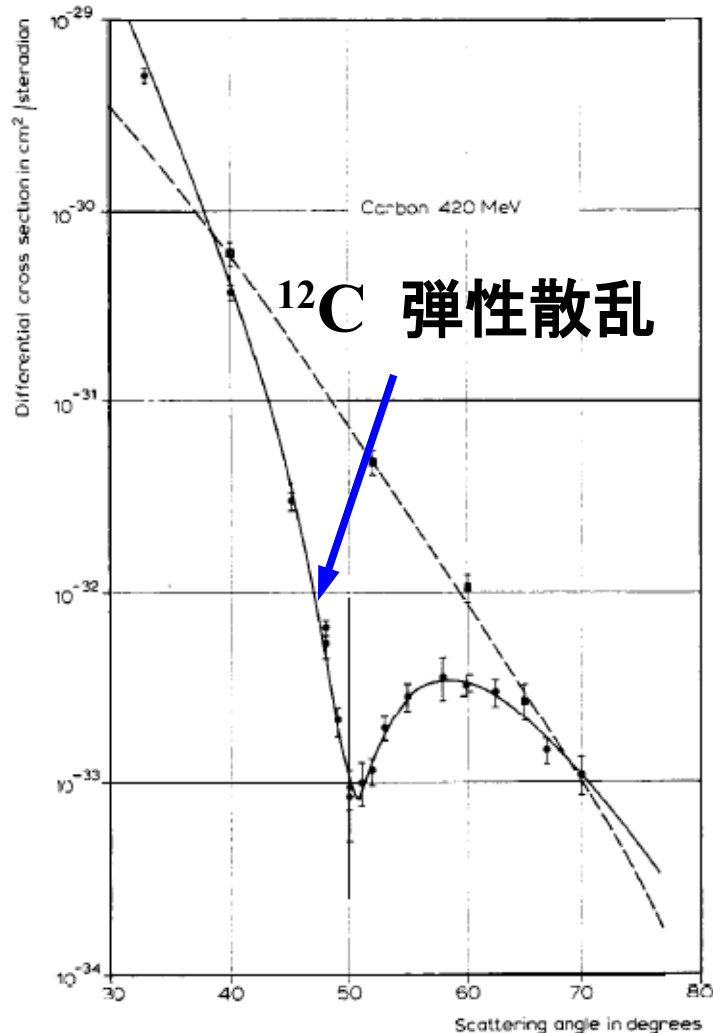
$$F(\mathbf{q}) = \frac{3}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR)$$

F が小さくなる q から半径が
推定できる！



原子核の密度分布

- 電子散乱による原子核の密度分布研究
Robert Hofstadter (Nobel prize in Physics, 1961)



<http://www.nobelprize.org/>

原子核の密度分布

- 原子核における核子の密度: Woods-Saxon (または Fermi) 型

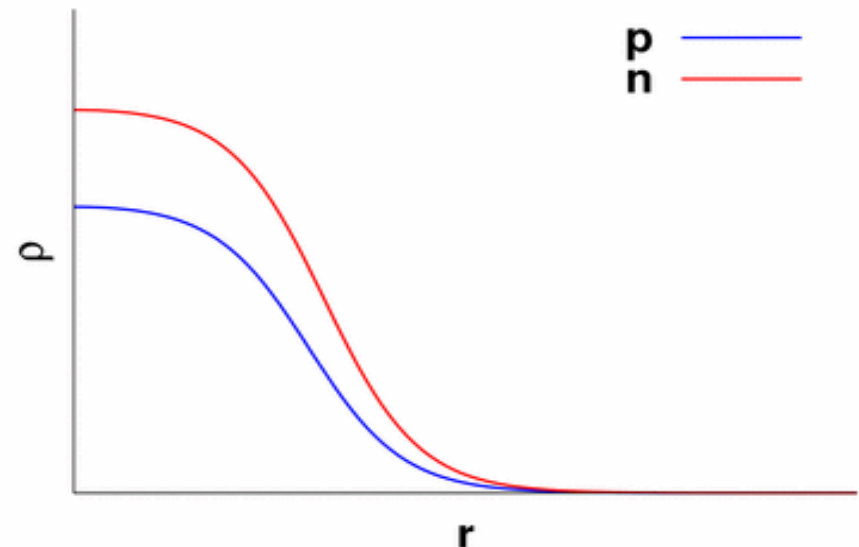
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{r - R_{WS}}{d}\right]}$$

$$R_{WS} \simeq 1.07A^{1/3} \text{ fm}, \quad d \simeq 0.54 \text{ fm}, \quad \rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$$

一様球として平均自乗半径を説明するには

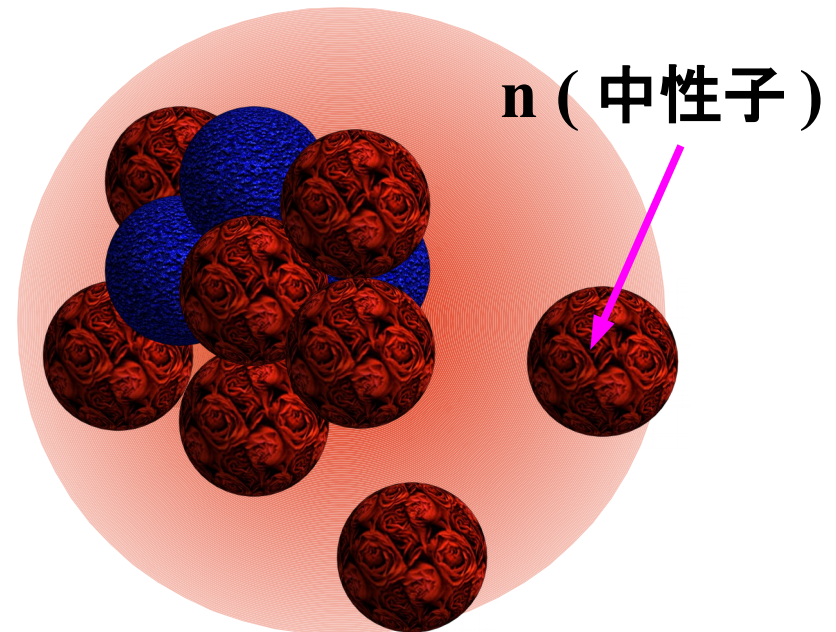
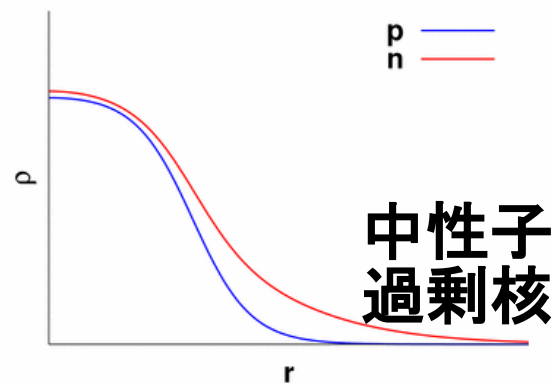
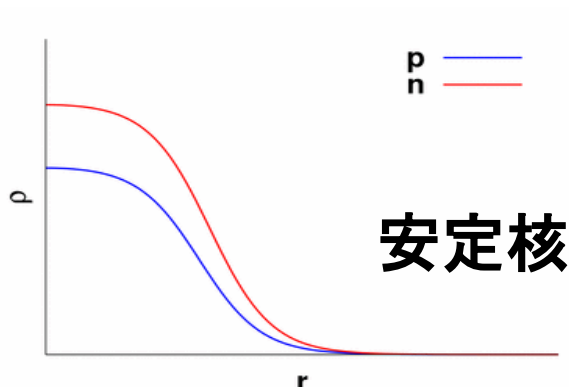
$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.21 \text{ fm}$$

半径 $\propto A^{1/3} \rightarrow$ 体積 $\propto A$
 \rightarrow 大きな原子核の中心部は
密度が原子核によらず
一定の値 ρ_0 をとる
 \rightarrow 「核物質」



不安定原子核

- 安定核の半径 $R \sim 1.1 A^{1/3}$ (fm) \rightarrow 密度は原子核によらず一定
- 中性子過剰核の半径 $R \gg 1.1 A^{1/3}$ (fm) (公式はまだない)
 \rightarrow 外側の中性子が大きく広がっている「ハロー構造」
(ハロー = 太陽の回りに見える暈)



中性子過剰核 $N \gg Z$
例: ^{11}Li ($Z=3, N=8$)

原子核の質量

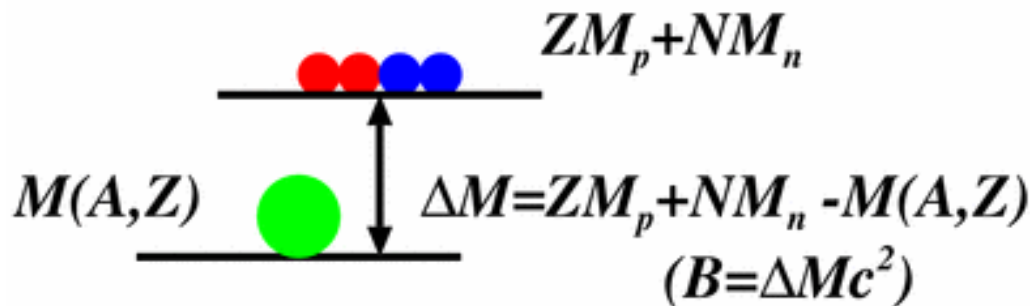
原子核の束縛エネルギー

■ 束縛エネルギー

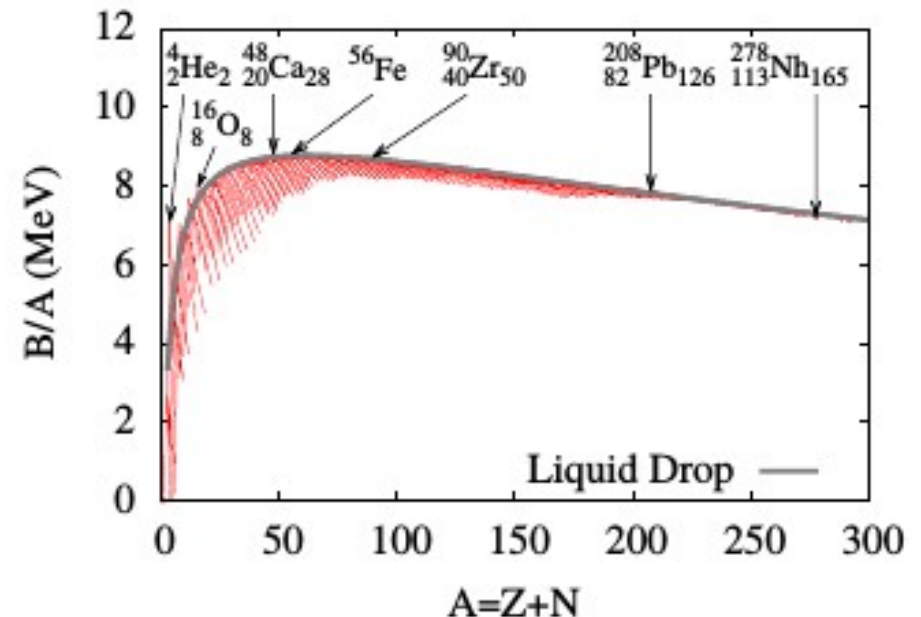
$$B(A, Z) = ZM_p + NM_n - M(A, Z)$$

- 陽子数 Z , 中性子数 N , 陽子質量 M_p , 中性子質量 M_n , 原子核質量 $M(A, Z)$
- 原子核の質量は、核子の質量の和より小さい (質量欠損)

■ 束縛エネルギーの観測値 : $16 \leq A \leq 240$ において、 $B/E \sim 8 \text{ MeV}$



質量欠損 = 核子質量の和 - 原子核の質量
束縛エネルギー = 質量欠損 $\times c^2$



質量公式

■ Weizsäcker の半経験的質量公式

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta_p}{A^\gamma}$$

体積 表面 クーロン 対称エネルギー 対エネルギー

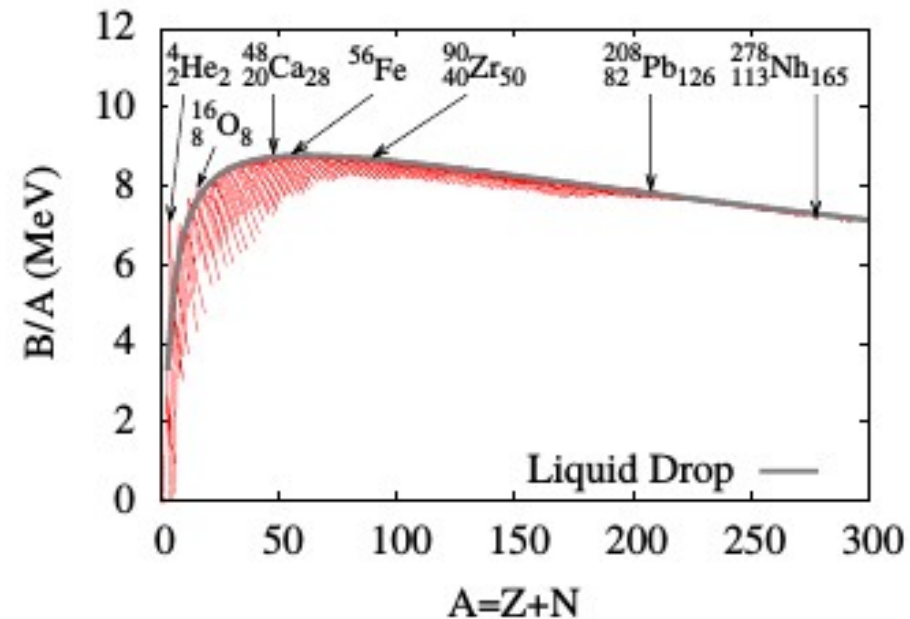
- 体積項、表面項 → 表面張力のある液滴
- 一様帯電球 (半径 $R = r_0 A^{1/3}$, 電荷 $Q = Ze$) のクーロンエネルギー

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

- 対称エネルギー、対エネルギーは液滴描像からは出てこない。

a_v	a_s	a_c	a_a	a_p
15.85	18.34	0.71	23.21	12.0

単位 MeV ($\gamma=1/2$ の場合)



フェルミガス模型 (1)

■ フェルミガス模型

- 核子はフェルミオン → 一つの量子状態に1粒子までしか入れない
- フェルミ分布関数

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp [(E - \mu)/T]} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\mu - E)$$

温度ゼロではエネルギーが化学ポテンシャル μ までの状態にびっしりと粒子が詰まる。

$$A = 2 \times 2 \times \sum_n f(E_n) = 4V \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Theta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{4V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3}$$

- 体積 $V=4\pi r_0^3 A/3$ よりフェルミ波数 k_F 、運動エネルギーが求まる

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \simeq 33 \text{ MeV}, \quad E_K = \frac{1}{A} \frac{4V}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_F} d\mathbf{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} E_F \simeq 20 \text{ MeV}$$

質量公式の体積項の説明には、核子あたり -36 MeV の相互作用エネルギー(引力)が必要!

■ 状態数 = 位相空間

- 1次元の箱 (長さ L , 周期境界条件)

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x}, \quad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

L が十分大きいとき、 $n=Lk/2\pi$

$$\sum_n = \frac{L}{2\pi} \Delta k \sum_{k_n} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$$

- 3次元の箱 (体積 $V=L^3$, 周期境界条件)

$$\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

フェルミガス模型 (2)

- 陽子数と中性子数が異なる場合 → フェルミ波数がずれる

$$k_{Fp} = k_F \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} = k_F (1 - \delta)^{1/3}, \quad k_{Fn} = k_F \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3} = k_F (1 + \delta)^{1/3}$$

非対称度

$$\delta = (N - Z)/A$$

- 核子あたりの運動エネルギー

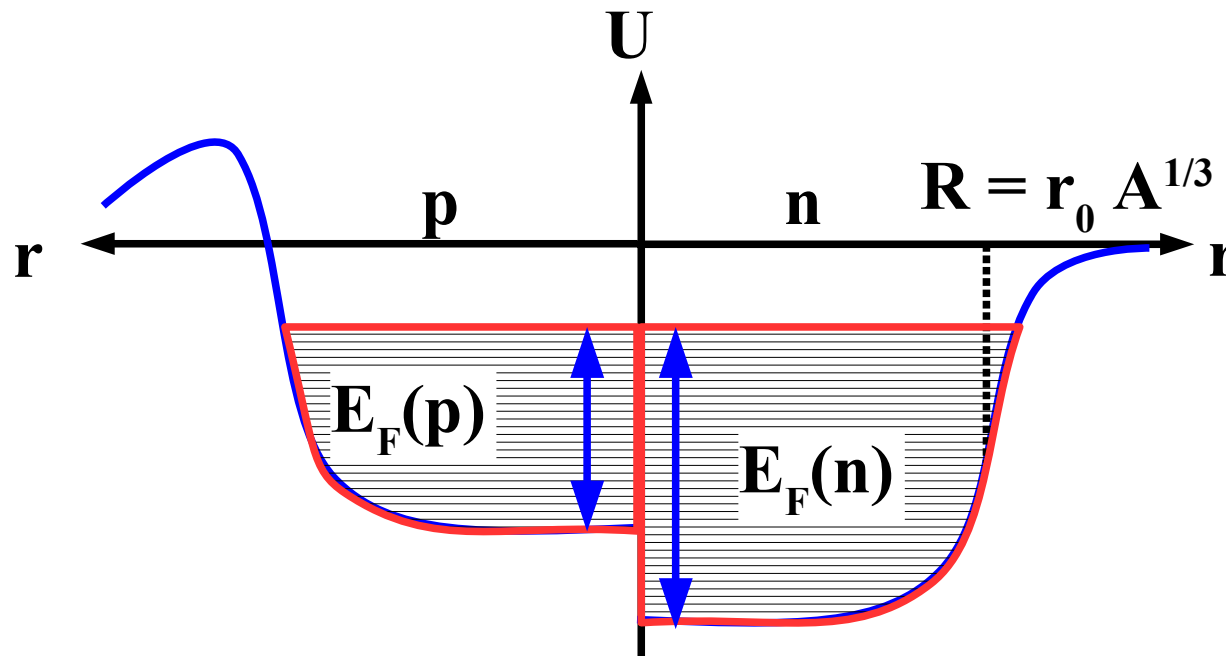
$$E_K = \frac{Z}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fp}^2}{2m} + \frac{N}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fn}^2}{2m} = \frac{3}{5} E_F \times \frac{1}{2} \left[(1 - \delta)^{5/3} + (1 + \delta)^{5/3} \right]$$
$$\simeq \frac{3}{5} E_F + \frac{1}{3} E_F \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$$

フェルミガス模型の運動エネルギーから現れる
対称エネルギーは $E_F/3 \sim 11 \text{ MeV}$

→ 陽子・陽子、中性子・中性子間の引力よりも強い
陽子・中性子間の引力が必要

原子核の描像

- 中心部分はほぼ密度一定の「核物質」
- 核子間に引力が働き、一粒子ポテンシャル中を核子が運動
- 表面では密度・ポテンシャルともに小さくなる
→ 質量公式の表面項



講義の内容

■ 目標

原子核の基本的性質（半径・質量）の理解に基づいて、核物質の状態方程式と中性子星の物理を概観する。

■ イントロダクション

- 原子核物理学の広がり，中性子星の構造と組成

■ 基本部分：ミクロな世界の理解の基礎

- 原子核の大きさ：散乱問題から原子核の半径へ（量子力学）
- 原子核の質量：フェルミガス模型から原子核の質量へ（統計力学）

■ 応用部分：多体問題から中性子星へ

- 核物質の状態方程式
- クォーク物質とハドロン物質
- 中性子星と核物質状態方程式

■ まとめ

核物質の状態方程式

質量公式と状態方程式

- $A \rightarrow \infty$ における核子あたりのエネルギー
(クーロンエネルギーは無視)

$$E = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-B(A, Z)}{A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-a_v + a_s A^{-1/3} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A^2} - a_p \frac{\delta_p}{A^{\gamma-1}} \right]$$

$$= -a_v + a_a \delta^2$$

- 密度と非対称度の関数と考えると、
核子あたりのエネルギーが最小となる密度が実現する

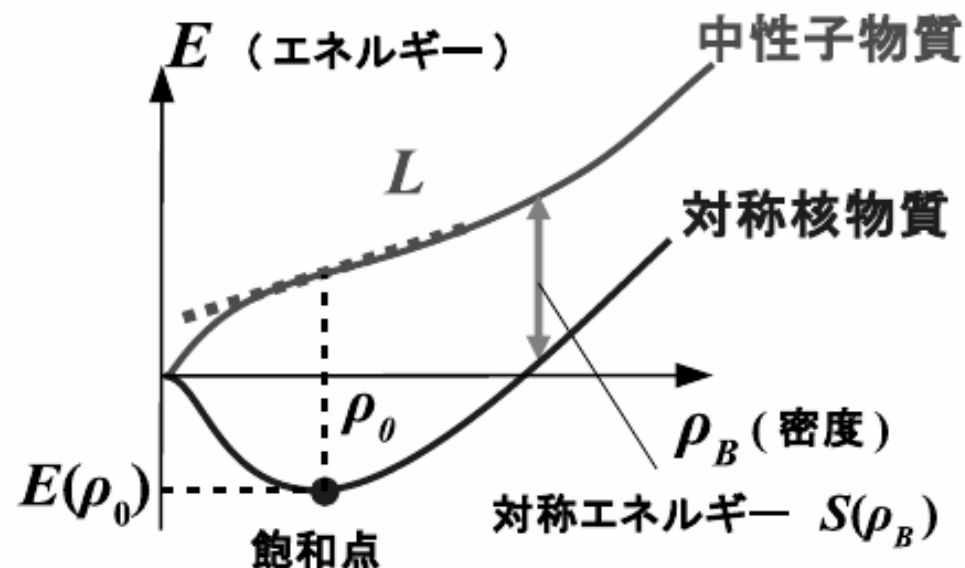
$$E = E(\rho_B, \delta)$$

→ 核物質の飽和性

- 飽和点

$$(\rho_0, E_0) \simeq (0.16 \text{ fm}^{-3}, -16 \text{ MeV})$$

状態方程式 (EOS)



対称エネルギー

■ 非対称核物質 ($N \neq Z$) のエネルギー

$$E(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, \delta = 0) + S(\rho_B)\delta^2 \quad P = \rho^2 \partial E / \partial \rho$$

■ 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = E(\text{中性子物質}) - E(\text{対称核物質})$$

■ 飽和密度でのパラメータ

- 非圧縮率 $K \equiv 9 \rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial \rho_B^2} \right|_{\rho_B = \rho_0}$

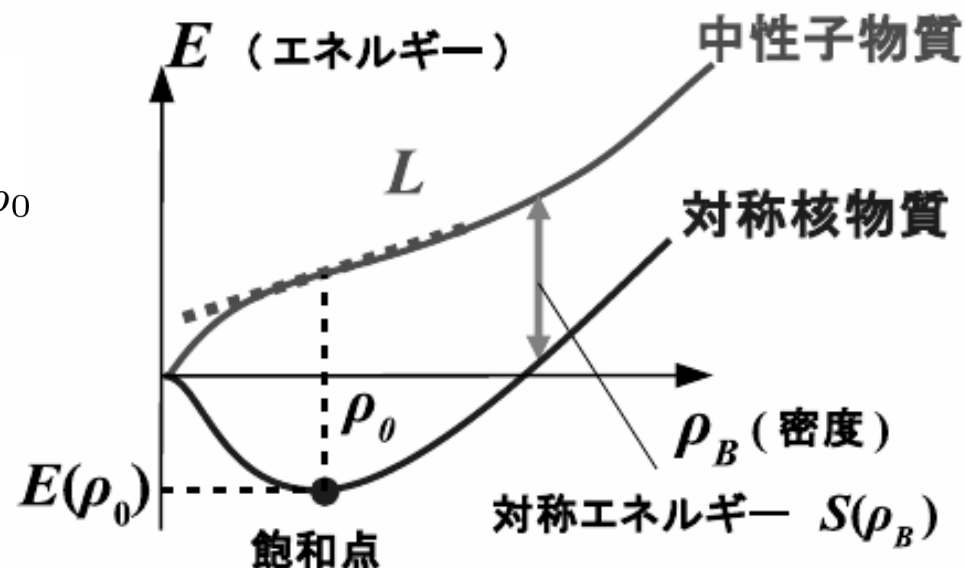
- 対称エネルギーの値と微分

$$S_0 \equiv S(\rho_0), \quad L \equiv 3\rho_0 \left. \frac{dS(\rho_B)}{d\rho_B} \right|_{\rho_B = \rho_0}$$

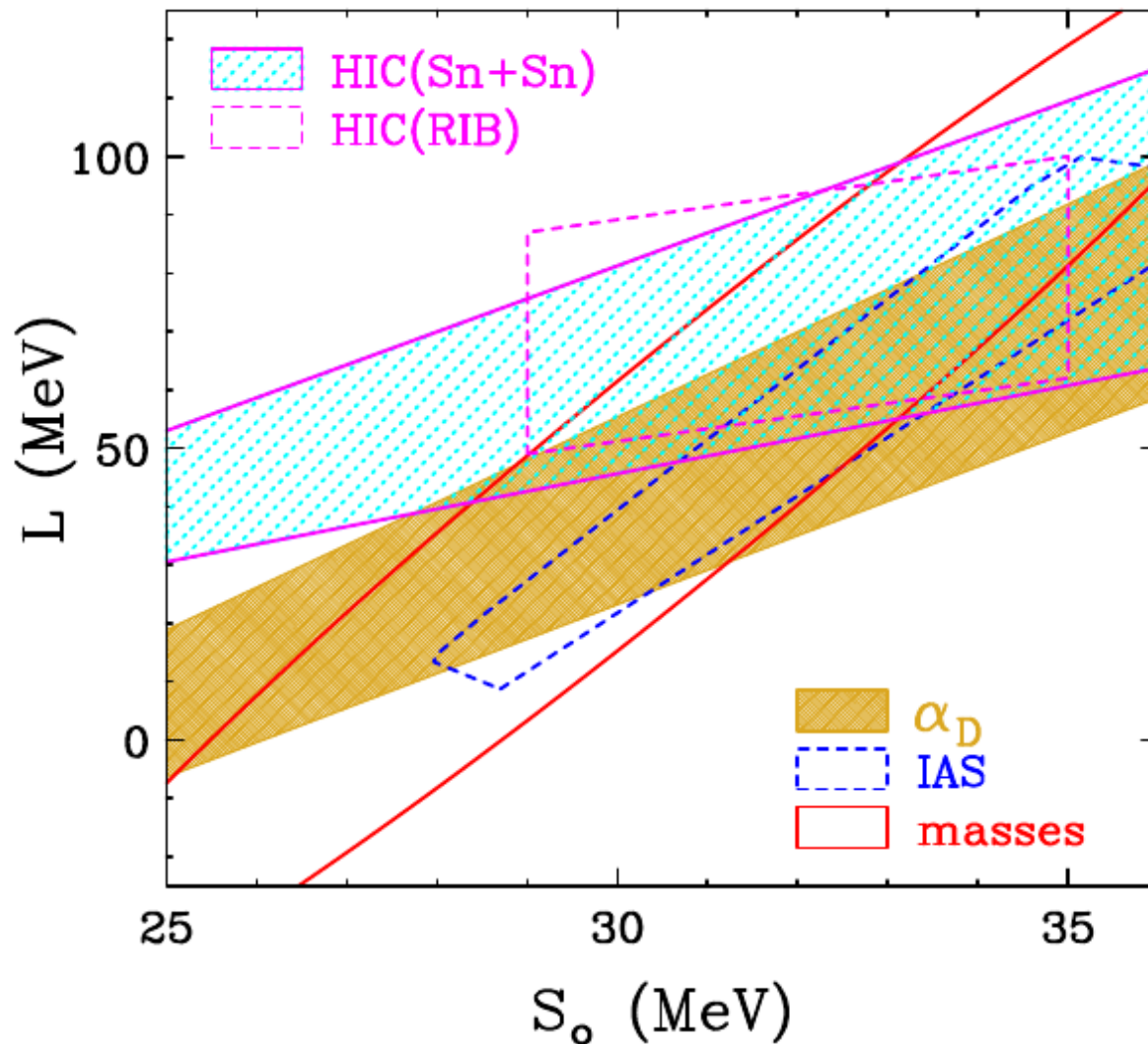
$$E(\rho_B, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{L}{3} x \delta^2 + \frac{K}{18} x^2$$

$$(x = (\rho_B - \rho_0) / \rho_0)$$

状態方程式 (EOS)



対称エネルギーの実験的制限



$S_0 = (30-35)$ MeV
 $L = (50-90)$ MeV

様々な実験により対称エネルギーパラメータを制限！

C.J. Horowitz, E.F. Brown, Y. Kim, W.G. Lynch, R. Michaels, A. Ono, J. Piekarewicz, M.B. Tsang, H.H. Wolter, J. Phys. G 41 (2014) 093001.

現象論的な核物質状態方程式

■ 相互作用エネルギー

$$V_{2B} = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \rho_B(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}') \rightarrow A \times \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)$$

$$V_{3B} = \frac{1}{3} \int d^3r d^3r' d^3r'' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \rho_B(\mathbf{r}) \rho_B(\mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}'') \rightarrow A \times \frac{\beta}{3} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^2$$

(一様密度、ゼロレンジの2体力・3体力)

■ 現象論的な状態方程式

● 対称核物質

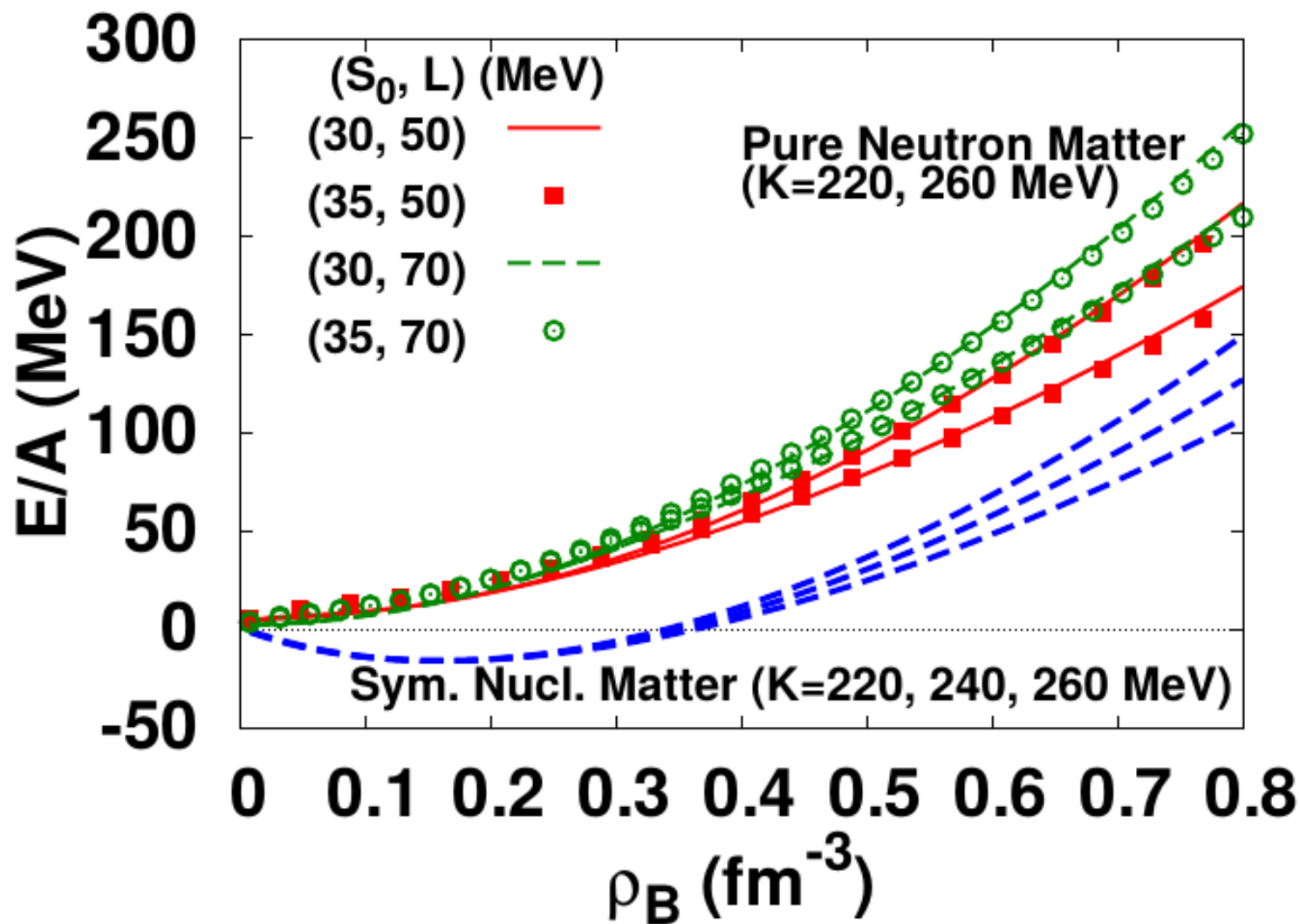
$$E(\rho_B) = \frac{3}{5} E_F(\rho_B) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right) + \frac{\beta}{2 + \gamma} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^{1+\gamma}$$

● 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = \frac{1}{3} E_F(\rho_B) + \alpha_{\text{sym}} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right) + \beta_{\text{sym}} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^{\gamma_{\text{sym}}}$$

■ 密度依存性の起源 = 生の3体力 + Pauli 原理などの多体効果

現象論的な核物質状態方程式



飽和密度近辺での不定性は少ないが、
中性子物質・高密度では大きな不定性

クォーク物質とハドロン物質

クォーク物質

■ 量子色力学 (Quantum Chromodynamics; QCD)

- 強い相互作用の基礎理論
- クォークとグルーオンのダイナミクスを記述する非可換ゲージ理論
- 大きなエネルギースケールでは結合が弱くなる (漸近的自由性)
- 小さなエネルギースケールでは非摂動的
→ カラーの閉じ込め、カイラル対称性の自発的破れ

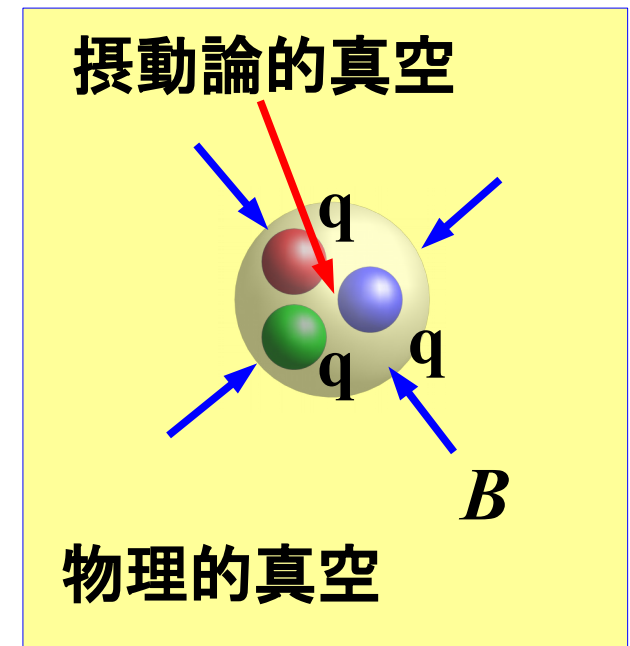
■ 真空の変化

- クォーク・反クォーク対、グルーオン対の凝縮により、エネルギーが下がる
→ 物理的真空
- クォークが動きまわる状態 (摂動論的真空) を作るには、余分なエネルギーが必要。

$$\varepsilon = \varepsilon_{qg} + B, \quad P = P_{qg} - B$$

$$B^{1/4} = 90 \sim 300 \text{ MeV}$$

ε_{qg}, P_{qg} = クォーク、グルーオンが担う
エネルギー密度・圧力



メモ(5) (追加スライド)

■ クォークは色々な「座標」を持っている！

- 時間・空間座標 (\mathbf{x}, t)
- スピン (\uparrow, \downarrow)
- フレーバー $(u, d, s, c, b, t (+ \text{more ?}))$
 - ◆ 強い相互作用ではフレーバー (クォークの種類) は保存
 - ◆ 軽い3つのクォーク (u, d, s) からなる系には近似的な $SU(3)_f$ 対称性がある。 ($N_f=3$)
- カラー (R, G, B)
 - ◆ 厳密な $SU(3)_c$ 対称性 (ゲージ対称性) がある。
(カラー空間で回しても (unitary 変換しても) 同じエネルギー)
 - ◆ 観測される粒子は常にカラー 1 重項
(カラー空間の回転で「回らない」スカラー)
c.f. 単独のクォークはカラー 3 重項 ($N_c=3$)

カラー (R, G, B)

$q_f^a(\mathbf{x}, t)$

フレーバー
 (u, d, s, \dots)

4-spinor
(spin と粒子・反粒子)

ハドロン

■ ハドロン

= クォーク・グルーオンから作られる、強い相互作用をする粒子

● バリオン (3つのクォーク)

Λ (uds), Σ^- (dds), Σ^0 (uds), Σ^+ (uus), Ξ^- (dss), Ξ^0 (uss)

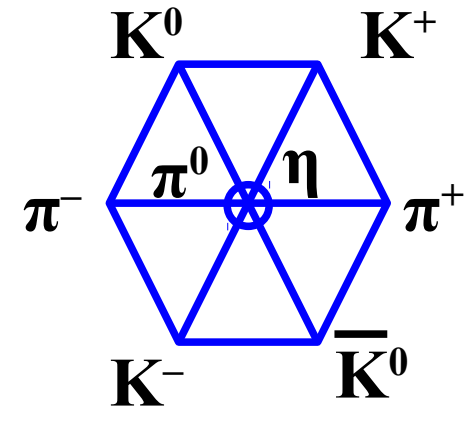
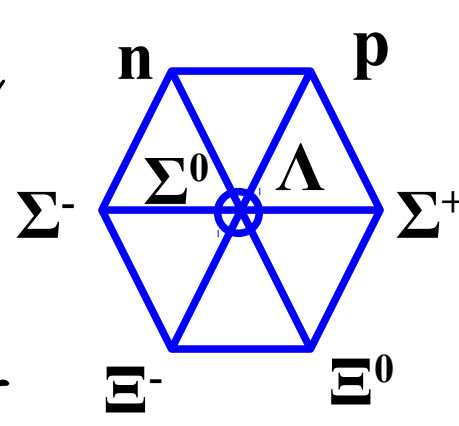
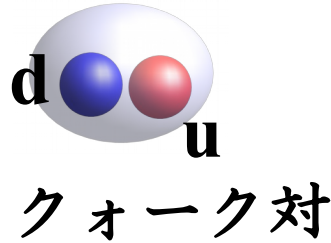
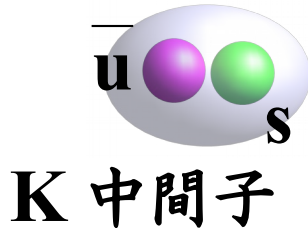
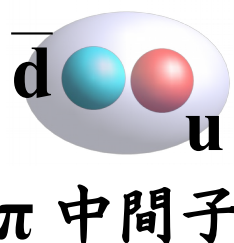
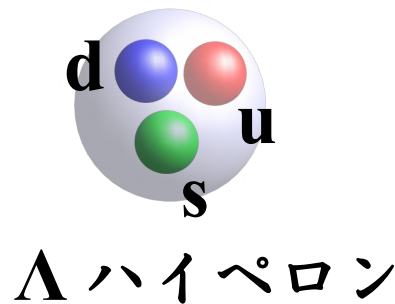
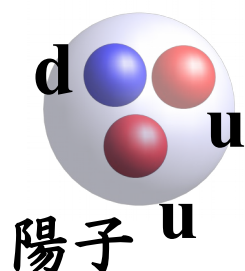
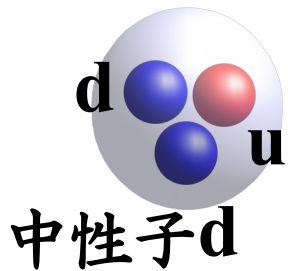
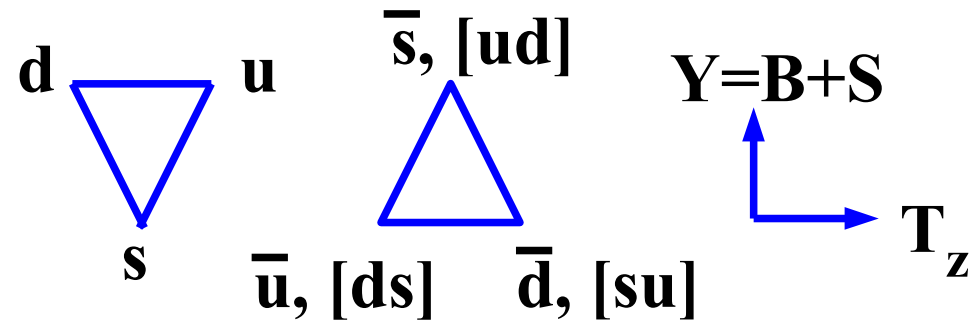
→ s クォークを含むバリオン = ハイペロン

● 中間子 (メソン、クォークと反クォーク)

π^- ($\bar{d}u$), π^0 ($(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$), π^+ ($u\bar{d}$),

K^- ($s\bar{u}$), K^0 ($s\bar{d}$), K^+ ($u\bar{s}$), \bar{K}^0 ($\bar{d}s$),

η ($(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$)



メモ(4)

- クォーク (カラー3重項) からカラー1重項を作るには？
→ RGB 成分をベクトルの成分と考える。

$$\vec{q} = (q_R, q_G, q_B)^T$$

- ベクトルからスカラーを作る方法

- 内積 → 中間子

$$\vec{q}_1^\dagger \cdot \vec{q}_2 = q_1^{a*} q_2^a$$

- スカラー3重積 → バリオン

$$(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2) \cdot \vec{q}_3 = \varepsilon_{abc} q_1^a q_2^b q_3^c$$

- 4つのクォーク、5つのクォーク、... からでもスカラーは作れる。
(Exotic hadrons)

- なぜ3つの種類のクォーク (u,d,s) から8重項が現れる？
→ 9種類の $\bar{q}q$ の組み合わせのうち、
ひとつはフレーバー空間でのスカラー、残りが8重項。

ハドロン物質

- 粒子の発現条件 (温度 $T=0$ の場合)
 - = その粒子が加わることによって、エネルギーが下がるか？
 - = 一粒子エネルギー $<$ 化学ポテンシャル
- フェルミ分布・ボーズ分布

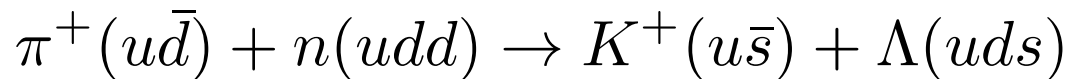
$$f_{F,B}(E) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1}$$

- フェルミオン $\rightarrow \mu > E(p=0) \sim M$ になると $T=0$ で現れる
- ボゾン
 - $\rightarrow \mu = E(p=0) \sim M$ になるとボーズ・アインシュタイン凝縮 ($\mu > M$ では分布関数と粒子数が発散)

ハドロン-原子核ポテンシャルの深さは？

- 原子核中にハドロンを生成
 - 束縛状態あり → 束縛エネルギーからポテンシャルを決定
 - 束縛状態無し → スペクトルの形からポテンシャルを推定
- 様々なハドロンと原子核のポテンシャルが生成反応により調べられてきた。

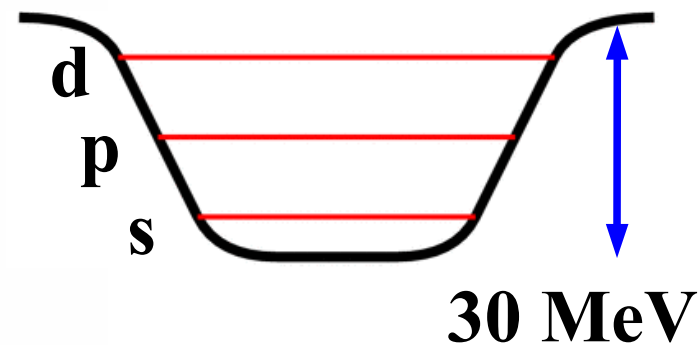
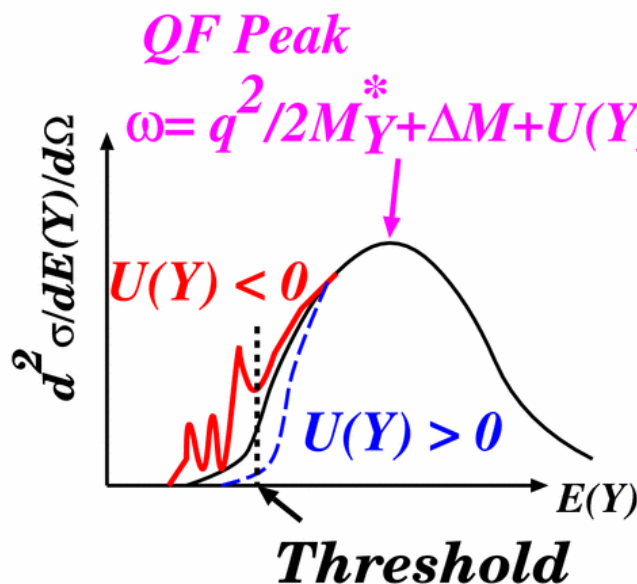
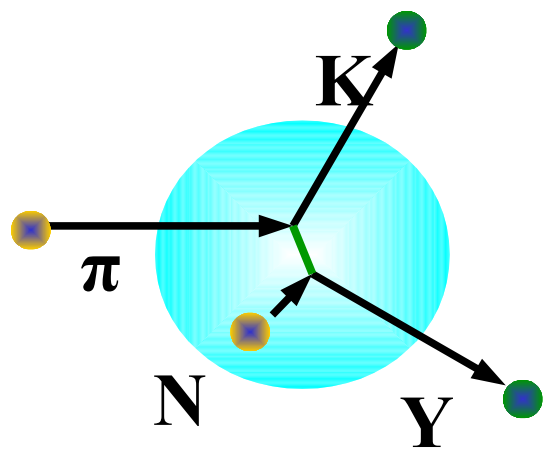
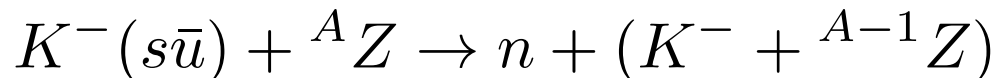
- ハイパー核生成反応



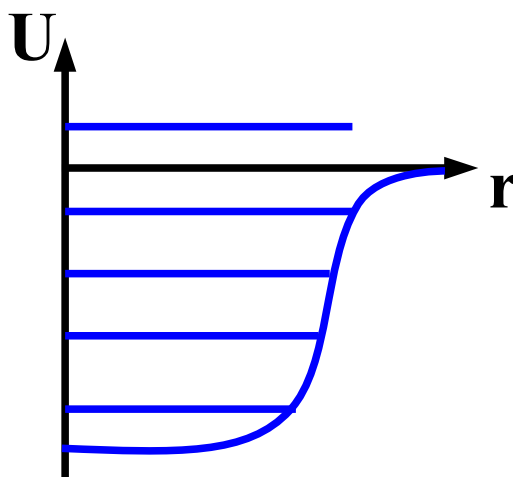
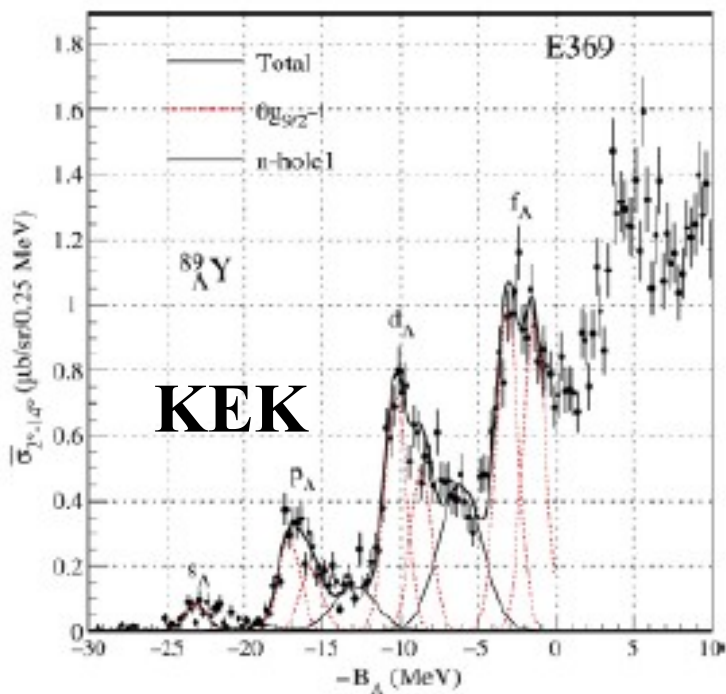
- パイ中間子原子生成反応



- 反K中間子原子核生成反応

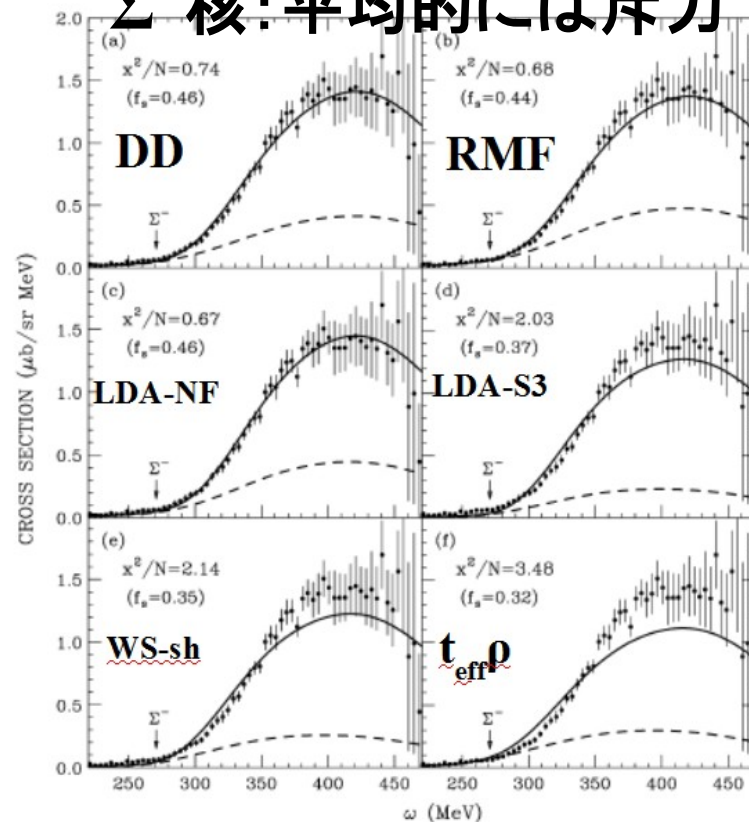


Λ , Σ^- , Ξ^- , K^- 核

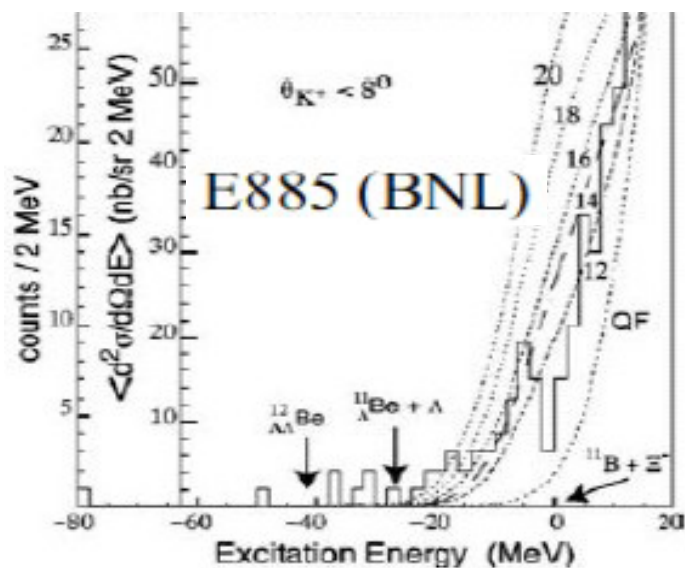


Λ 核: 明白な
一粒子状態を観測

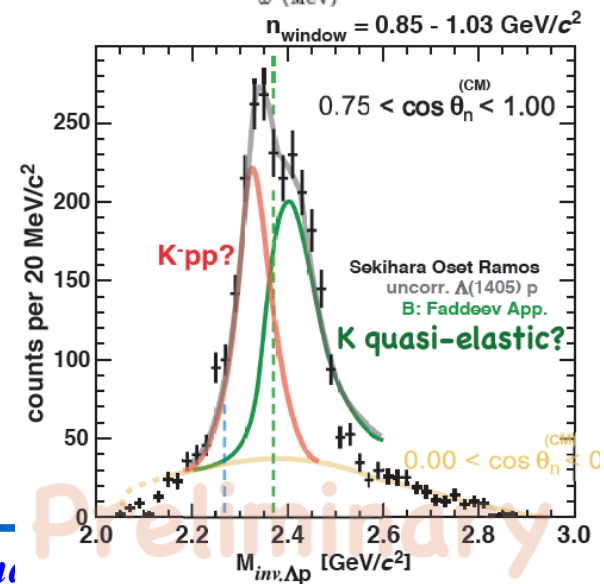
Σ^- 核: 平均的には斥力



Ξ 核: 弱い引力
最近のデータでも
束縛状態の存在を示す



K^- 核は存在しそう。
ただしゆるい束縛
(J-PARC E15
preliminary)



中性子星中のハドロン

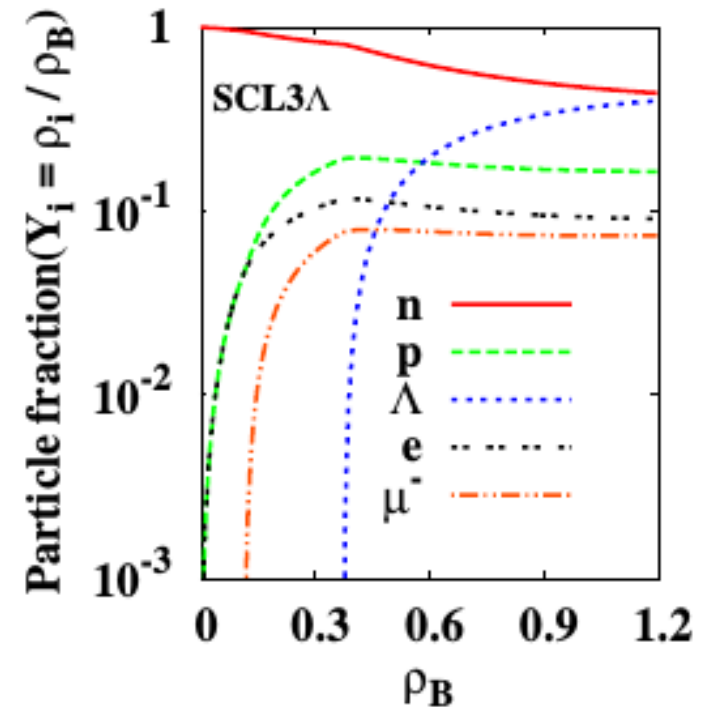
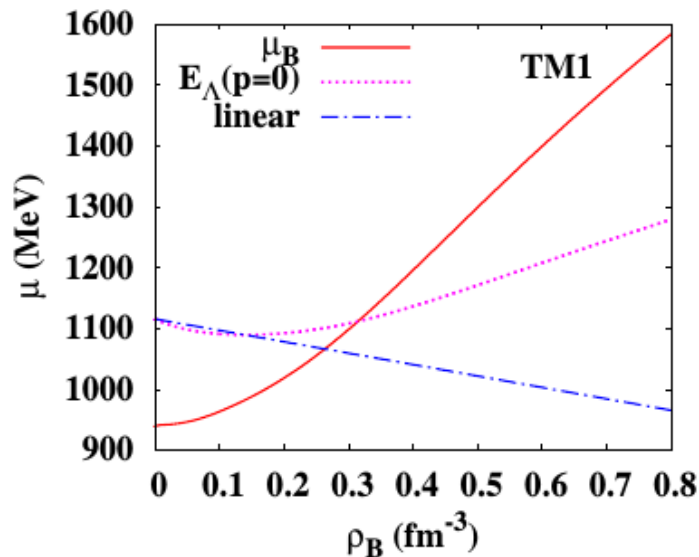
■ 中性子星での化学平衡

- 保存量 = バリオン数と電荷 $\mu_h = B_h \mu_B - Q_h \mu_e$
 $\mu_B > 0, \mu_e > 0$ なので、負電荷をもつバリオンが有利 (Σ^- , Ξ^-)

- 一粒子エネルギー $E_h = \frac{\delta \varepsilon}{\delta \rho_h}$

核子との相互作用が引力の粒子が有利 (Λ , K^- , ~~Σ^-~~)

- ハイパー核データ $U_\Lambda(\rho_0) \sim -30 \text{ MeV}$
 \rightarrow 中性子星で現れることが自然

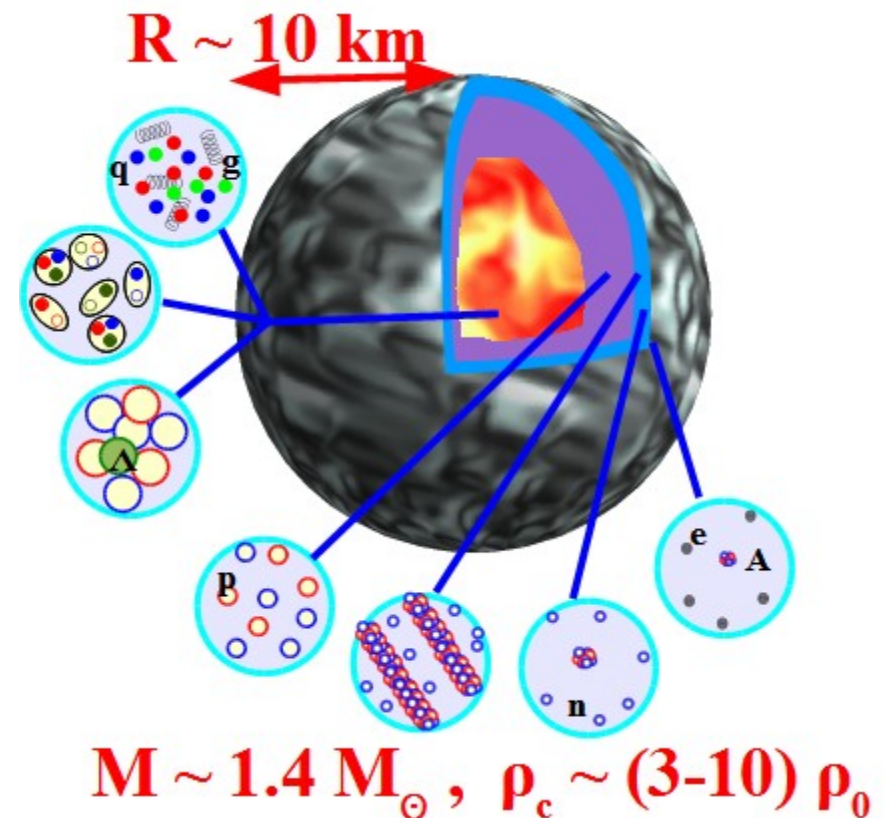


K. Tsubakihara, H. Maekawa, H. Matsumiya, A. Ohnishi, Phys. Rev. C 81 (2010) 065206.

中性子星と核物質状態方程式

中性子星の組成 (1)

- 中性子星って中性子だけからできているんですか？
→ いや、いろいろな粒子が混ざっています。
- 中性子星表面：通常物質 = 鉄などの原子核と電子
- 中性子星の外殻 (クラスト)
 - 電子密度が増えてくると、「電子 + 陽子」よりも中性子の方がエネルギーが低くなる
→ 中性子過剰な原子核と電子
 - さらに密度が上がると、原子核の中で中性子がこぼれだす
→ 原子核と中性子と電子 (neutron drip, $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$)
 - 原子核が一系列に融合した「パスタ」ができるかも。



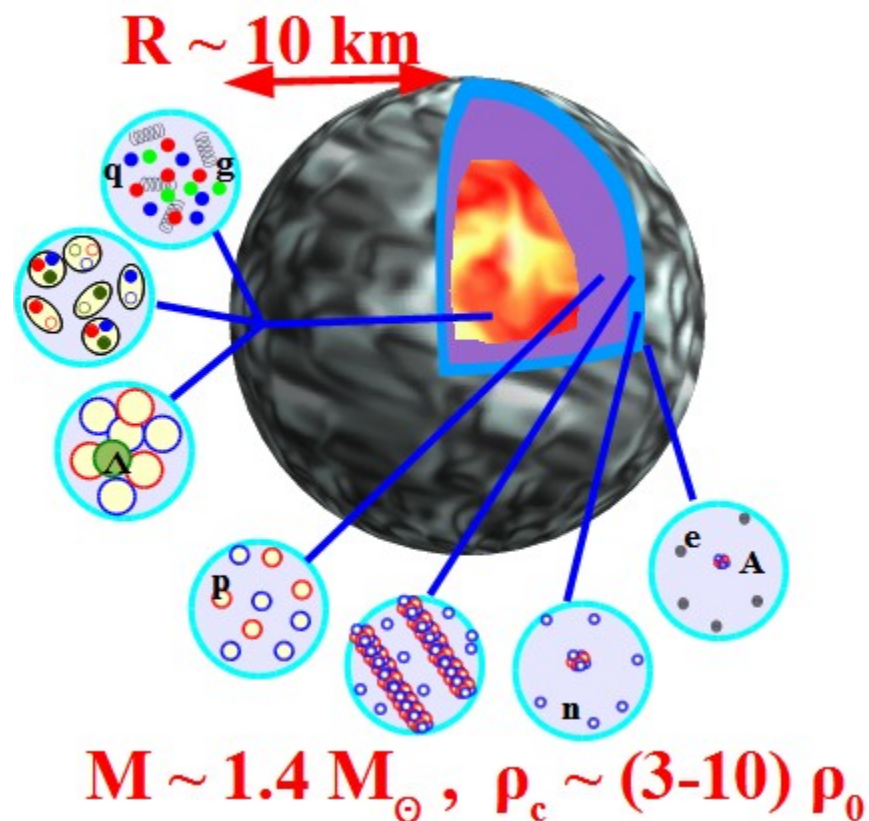
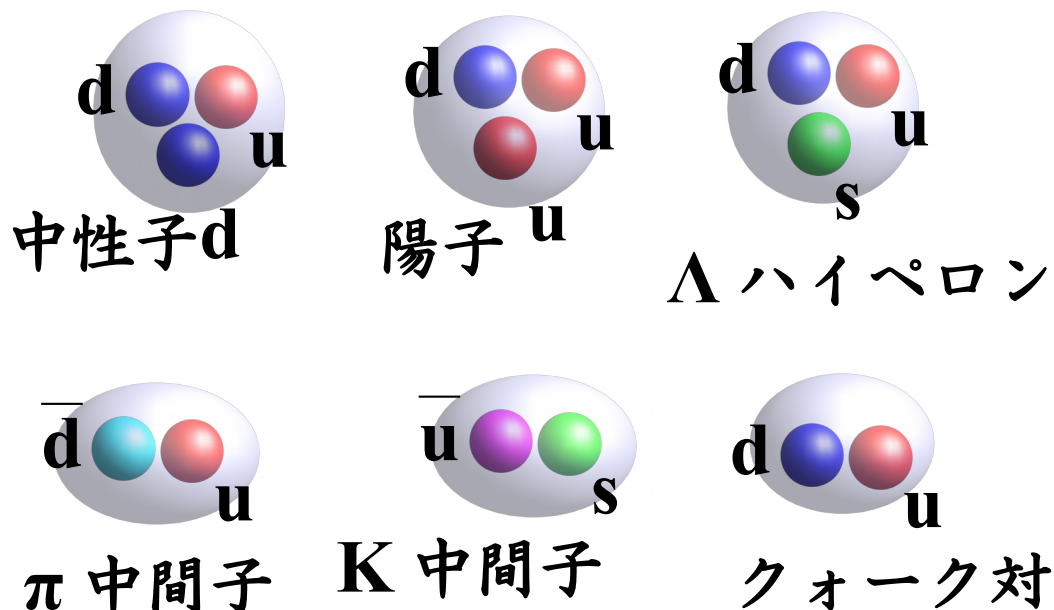
中性子星の組成 (2)

■ 中性子星コア (outer core)

- 原子核密度の 1~2 倍程度：原子核が融けて、一様な物質へ
→ 中性子・陽子・電子 (陽子・電子は中性子の 10% 程度)

■ 中性子星中心部 (inner core)

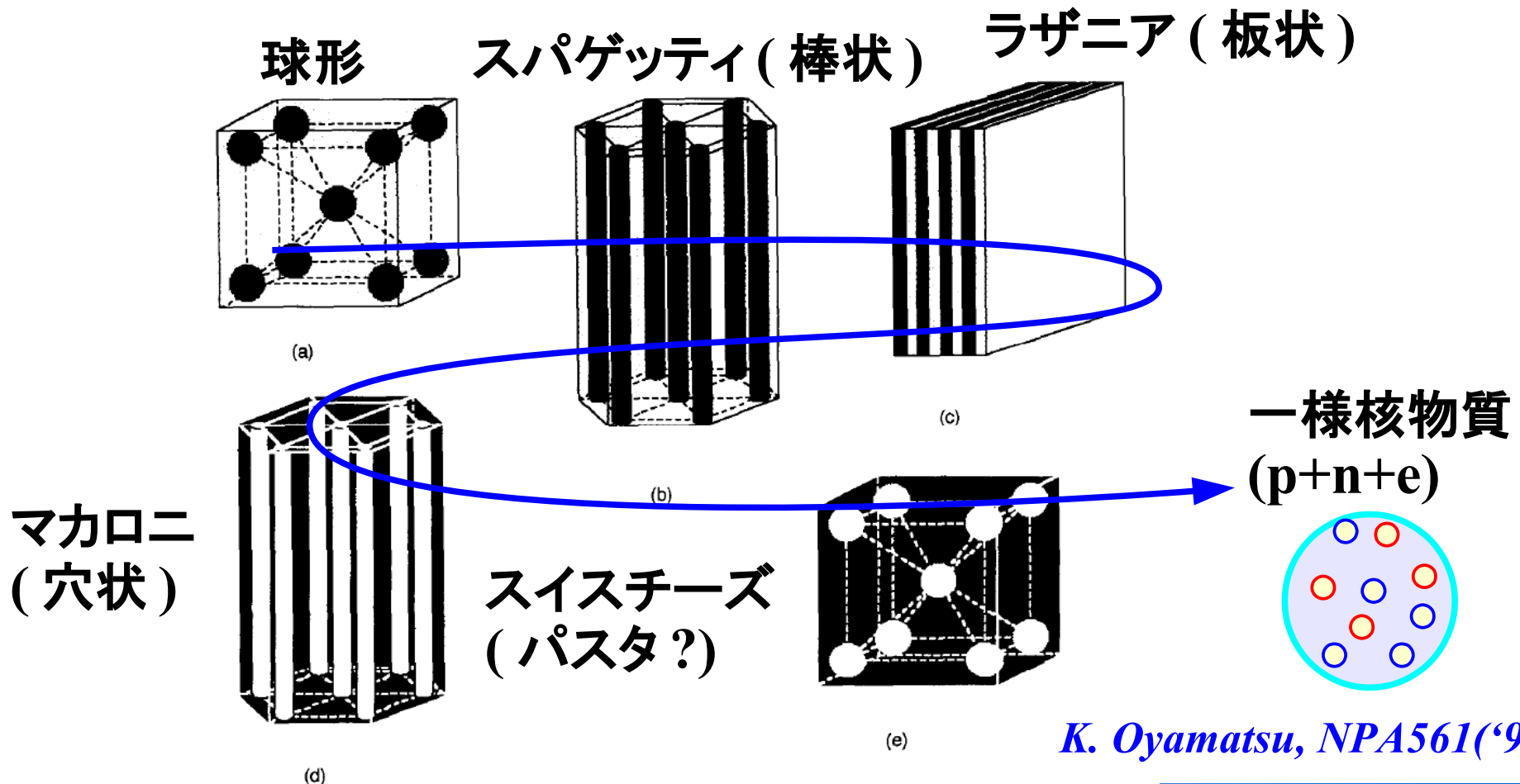
- 原子核密度の 2 倍以上
- 何が現れるかわかっていない



中性子星の組成 (3)

■ パスタ原子核

- 原子核の形はエネルギーを最小化するように決まる。
(主として表面エネルギーとクーロンエネルギー)
- 飽和密度の少し下では球形以外の方がエネルギーを小さくする。



中性子星の構造

- 中性子星の内側は見えないのに、
どうやって組成がわかるのですか？
→ 質量や半径からある程度推測できます。

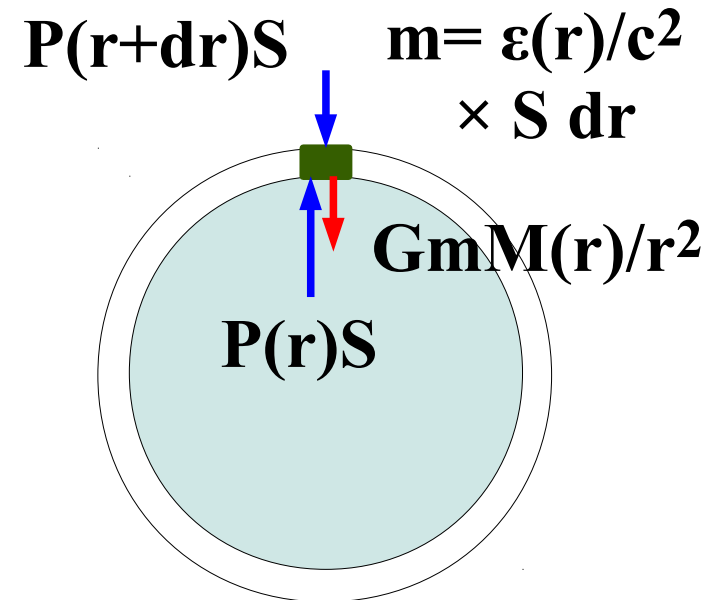
- 静水圧平衡
小さな箱を考えて、
外の圧力 + 重力 = 内の圧力

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M \epsilon / c^2}{r^2}$$

- Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式
(一般相対論補正を含む静水圧平衡)

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\epsilon / c^2 + P / c^2)(M + 4\pi r^3 P / c^2)}{r^2 (1 - 2GM / rc^2)}$$

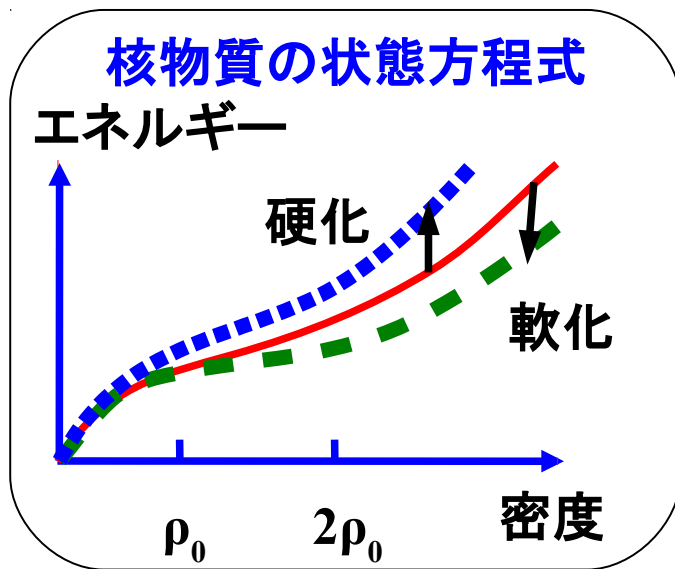
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon / c^2, \quad P = P(\epsilon) \quad (\text{EOS})$$



$M(r)$: r までの質量
 $\epsilon(r)$: エネルギー密度
 $P(r)$: 圧力

状態方程式とMR(質量-半径)曲線

- 状態方程式が与えられると質量と半径の関係 (MR 曲線) が一意的に求まる。
→ 中性子星の MR 曲線は相互作用モデルを判別する

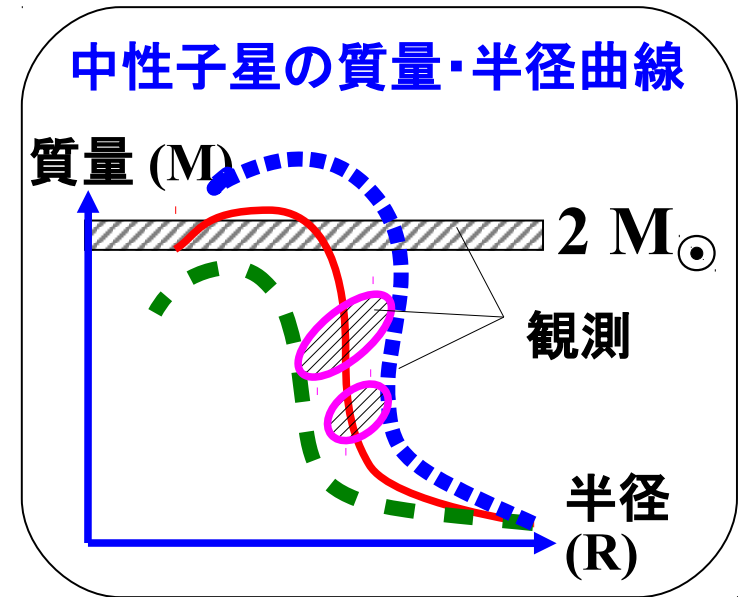


予言

TOV 方程式

$$\frac{dP}{dr} \simeq - \frac{GM \varepsilon / c^2}{r^2}$$

検証



中性子星物質の状態方程式

- TOV 方程式を解くには状態方程式 (*) が必要
(* 圧力とエネルギー密度の関係式)

- 参考：理想気体の状態方程式： $PV=Nk_B T \rightarrow P = \rho k_B T$
(圧力、体積、粒子数、ボルツマン定数 (=R/N_A)、温度、 $\rho=N/V$ ：数密度)

- 中性子星物質の圧力
= 核子などの縮退圧 + 相互作用からの圧力 + 電子の縮退圧

$$E_{\text{NSM}}(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, 0) + S(\rho_B)\delta^2 + \frac{1}{2}(M_n - M_p)\delta + E_e(\rho_B, \delta)$$

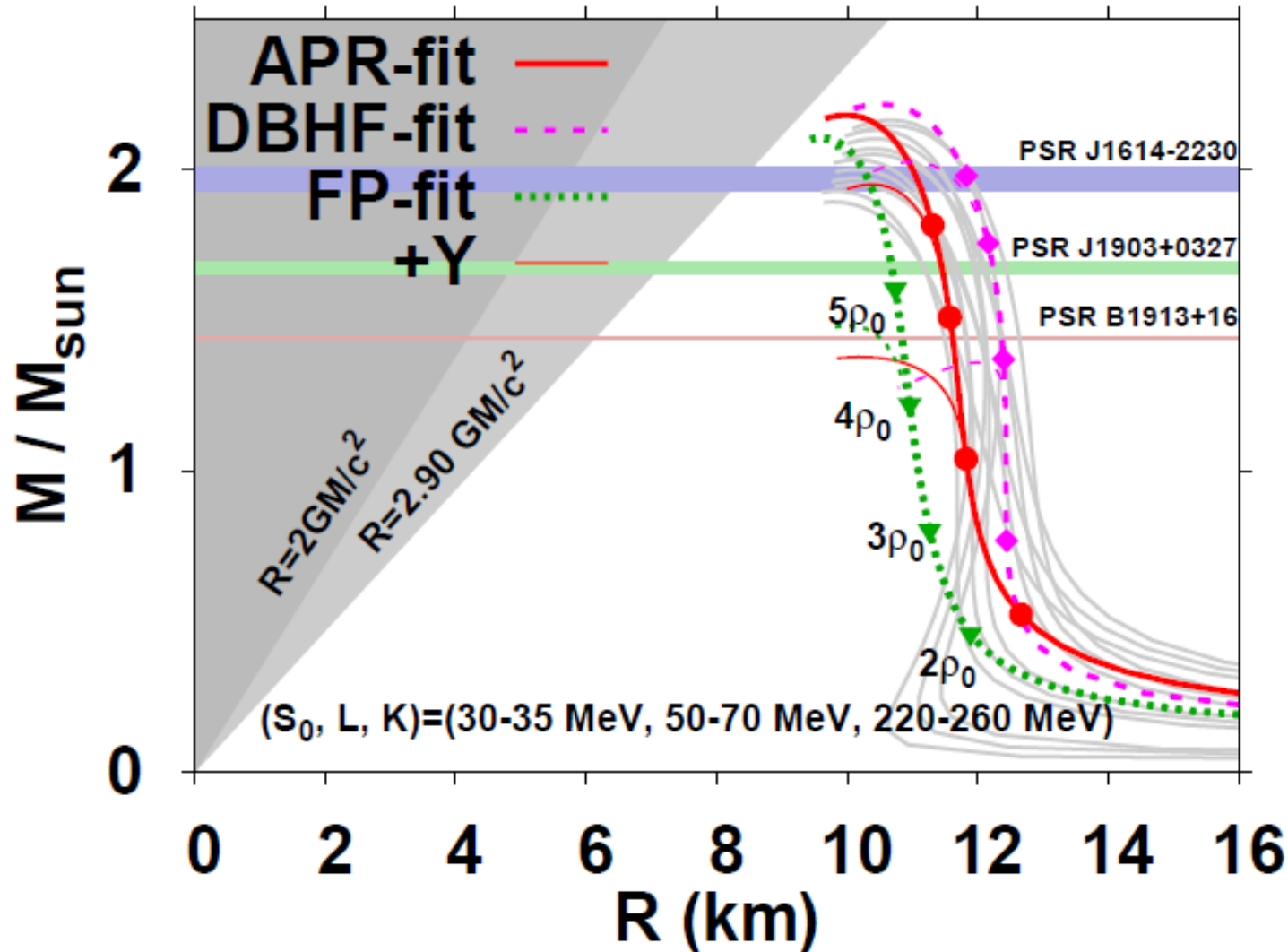
$$P = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$$

- エネルギーを最小にする非対称度 δ が実現する
- 高密度での相互作用は大きな不定性

現象論的状態方程式からのMR曲線

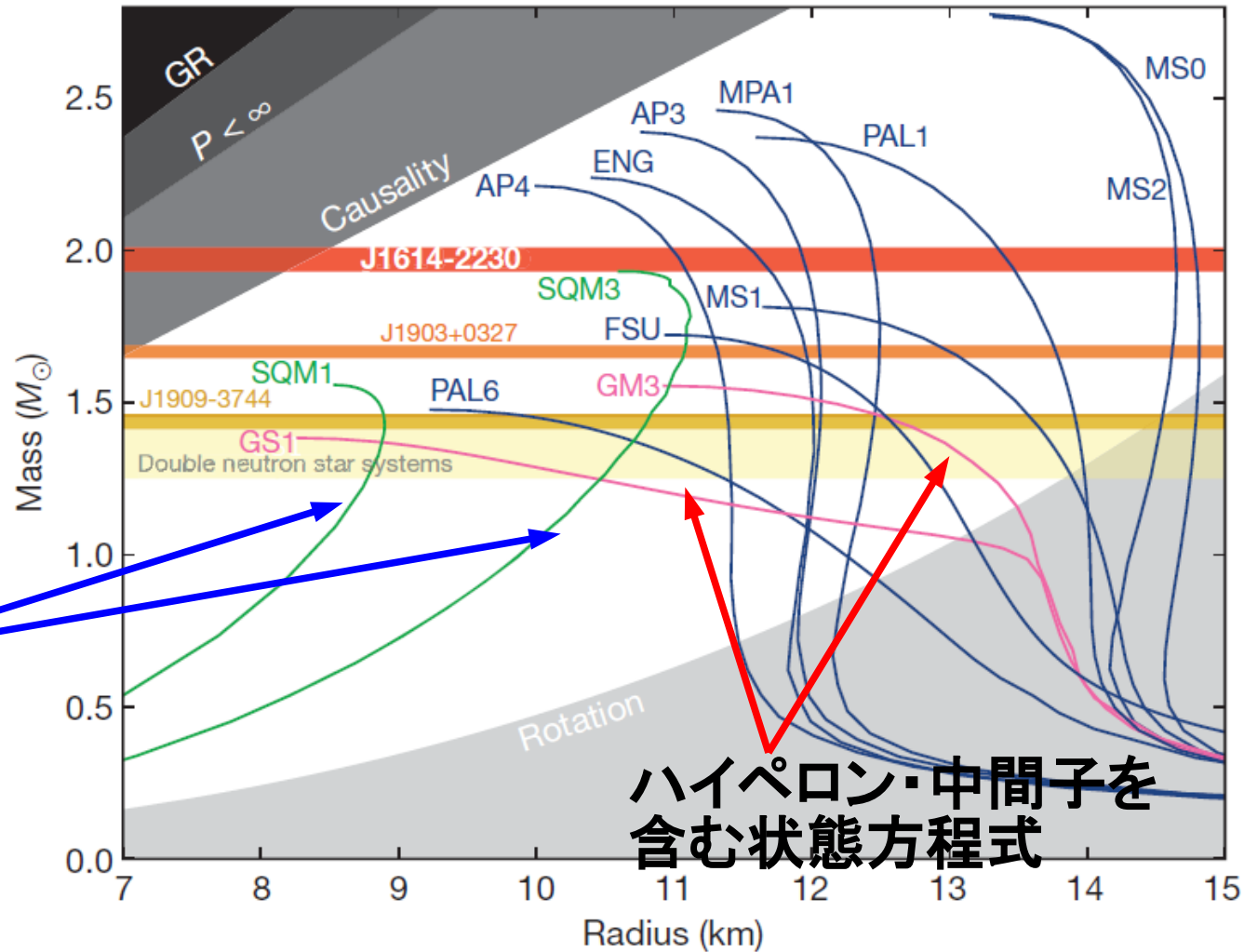
■ 現象論的状態方程式から推測されるMR曲線(灰色)

- 半径 $R=(11-13)$ km ($M=1.4 M_{\odot}$)、最大質量 $M_{\max}=(1.9-2.2) M_{\odot}$
(核子のみの場合)



重い中性子星とハイペロン・パズル

- 2010年の大ニュース：重い中性子星の発見
→ 核子以外のハドロンを含む状態方程式を棄却(?)



クォーク物質
状態方程式

ハイペロン・中間子を含む
状態方程式

Demorest et al. ('10)

重い中性子星とハイペロン・パズル

■ 重い ($\sim 2 M_{\odot}$) 中性子星パズル

- 核子以外のハドロンを考慮すると重い中性子星が支えられない！
- しかし実験データに基づく標準的な理論モデルでは、ハイペロンは現れる。

■ 高密度での斥力の起源は？

● 3体斥力の導入

*Nishizaki, Takatsuka, Yamamoto ('02), Tsubakihara, Harada, Ohnishi ('14)
Yamamoto, Furumoto, Yasutake, Rijken ('14),*

● 対称エネルギーを示す高次項の導入

Bednarek, Haensel et al. ('11)

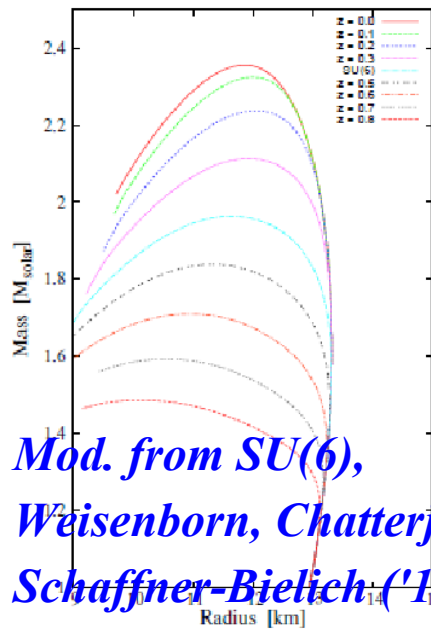
● Vector 結合に SU(6) の破れを導入

Weisenborn, Chatterjee, Schaffner-Bielich ('11)

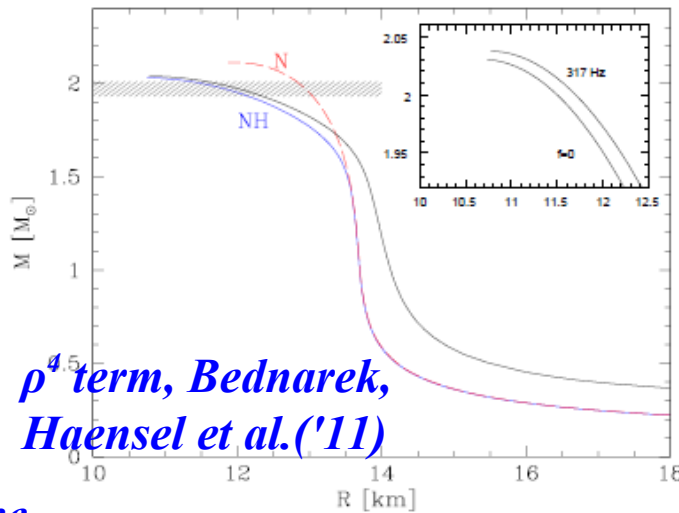
● クォーク物質への相転移

Masuda, Hatsuda, Takatsuka ('13)

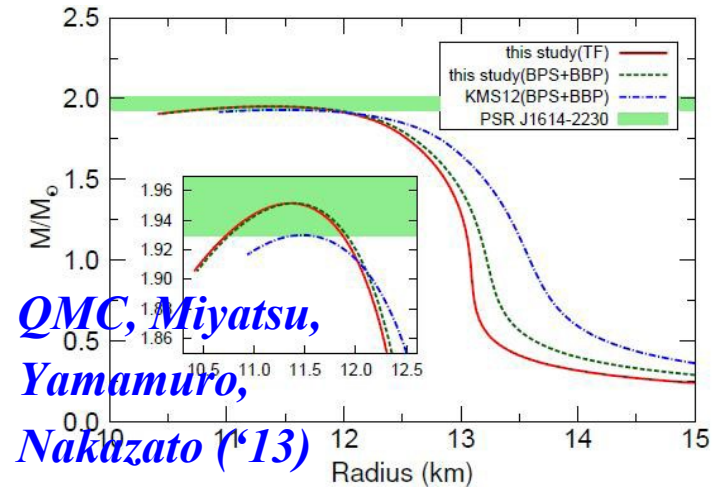
Massive Neutron Stars with Hyperons



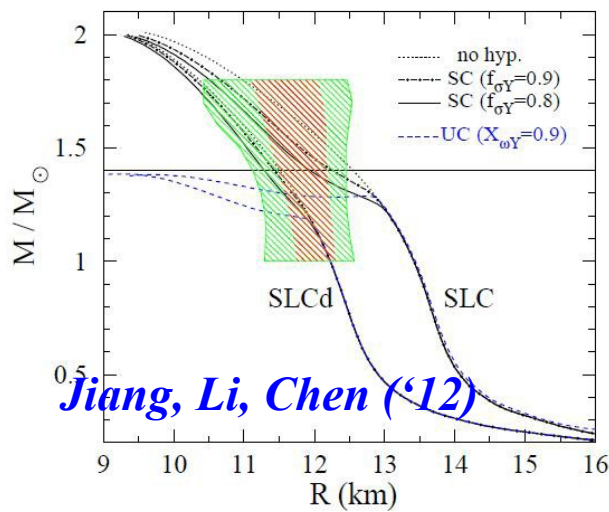
Mod. from SU(6),
Weisenborn, Chatterjee,
Schaffner-Bielich ('11)



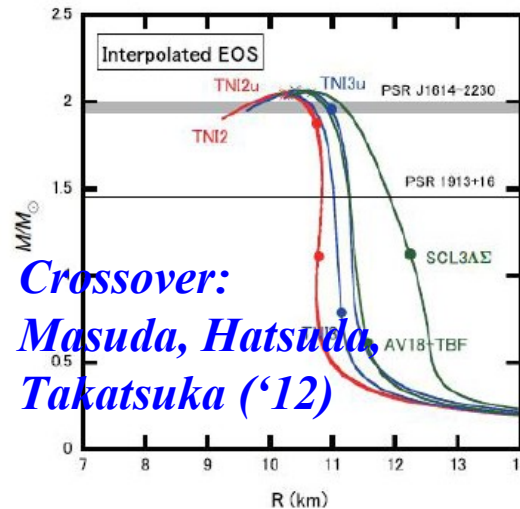
ρ^4 term, Bednarek,
Haensel et al. ('11)



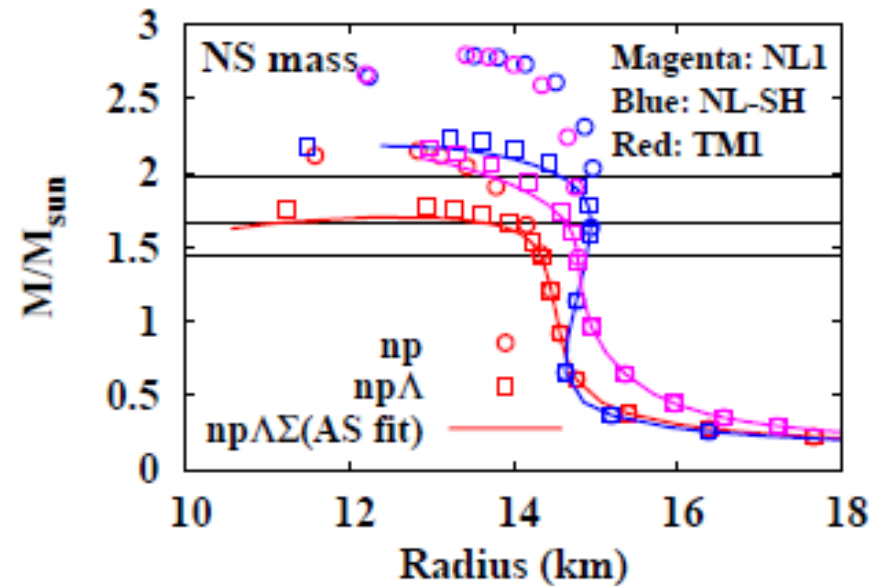
QMC, Miyatsu,
Yamamuro,
Nakazato ('13)



Jiang, Li, Chen ('12)



Crossover:
Masuda, Hatsuda,
Takatsuka ('12)

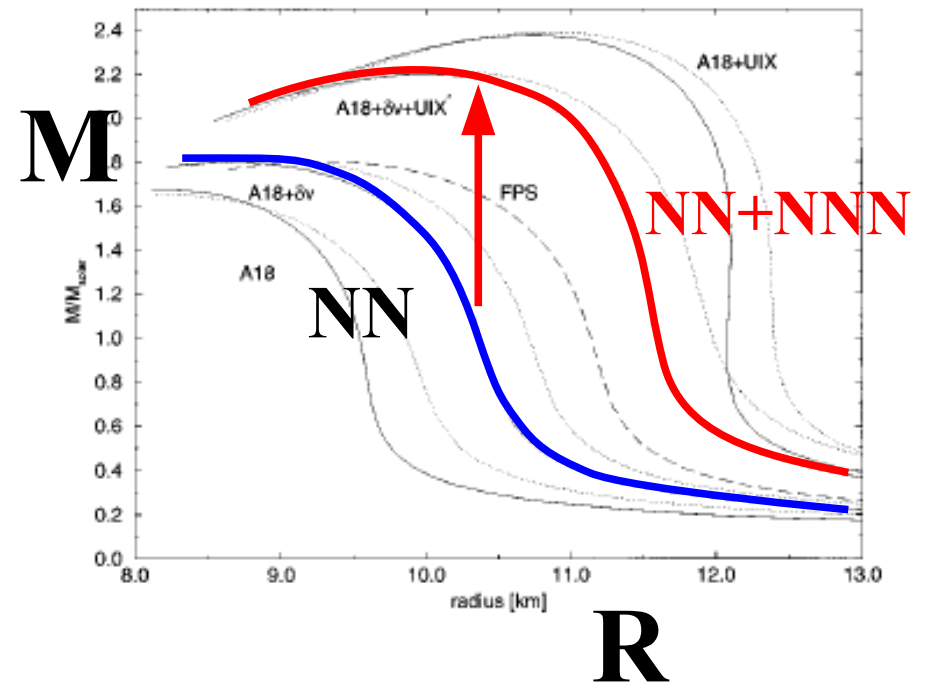
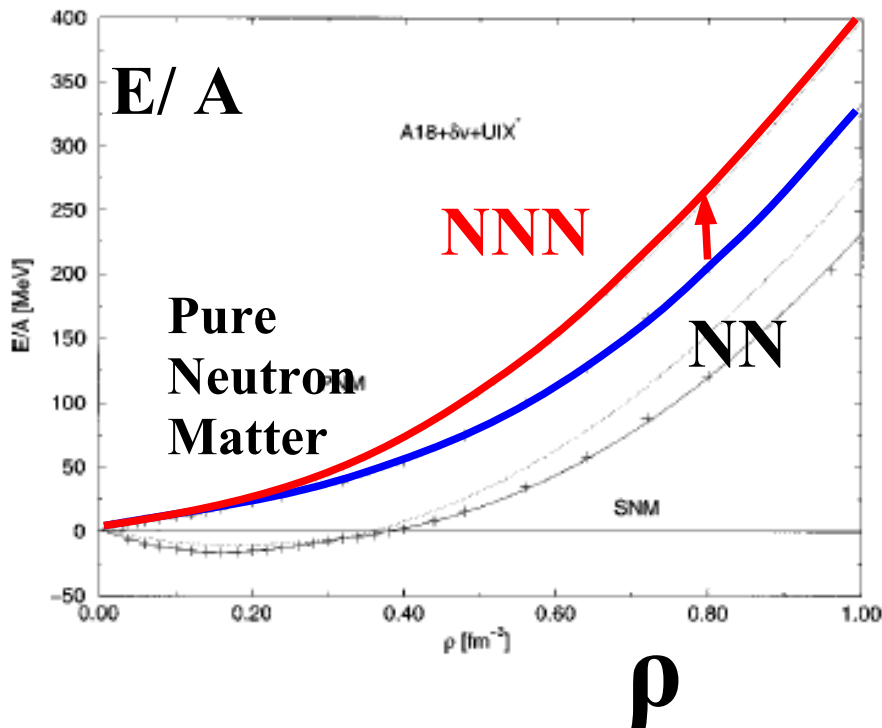


Tsubakihara, Harada, AO, arXiv:1402.0979

第一原理計算からの示唆

- 第一原理計算 (核力から出発した近似のない計算)
 - 2核子間の核力だけでは原子核は支えられない
 - 3核子間にまたがる力が必要

パズルを解くにはハイペロンを含む3体力を考えることが必要

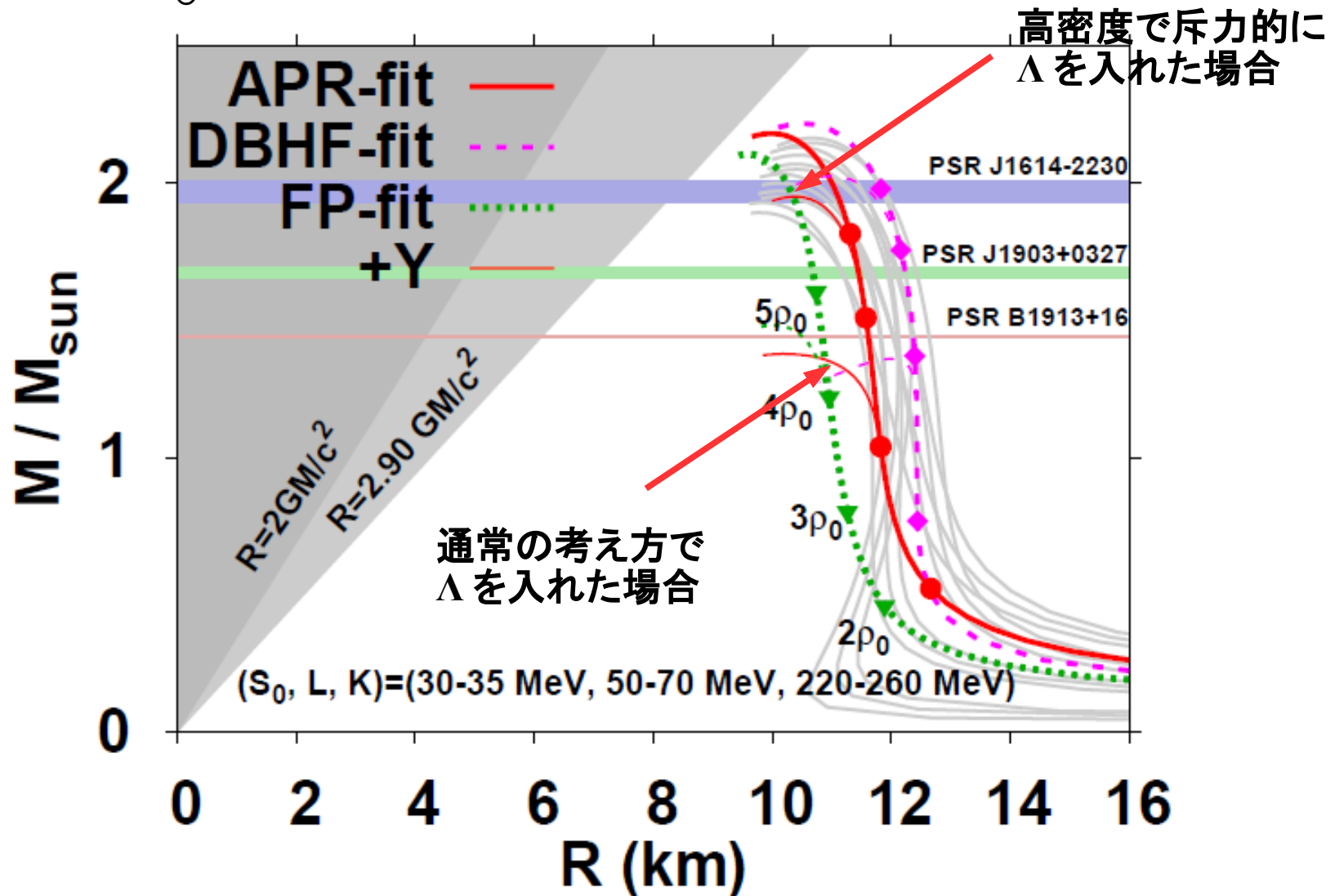


Akmal, Pandharipande, Ravenhall ('98)

第一原理計算+ハイペロン

■ 第一原理計算+現象論的ハイペロンポテンシャル

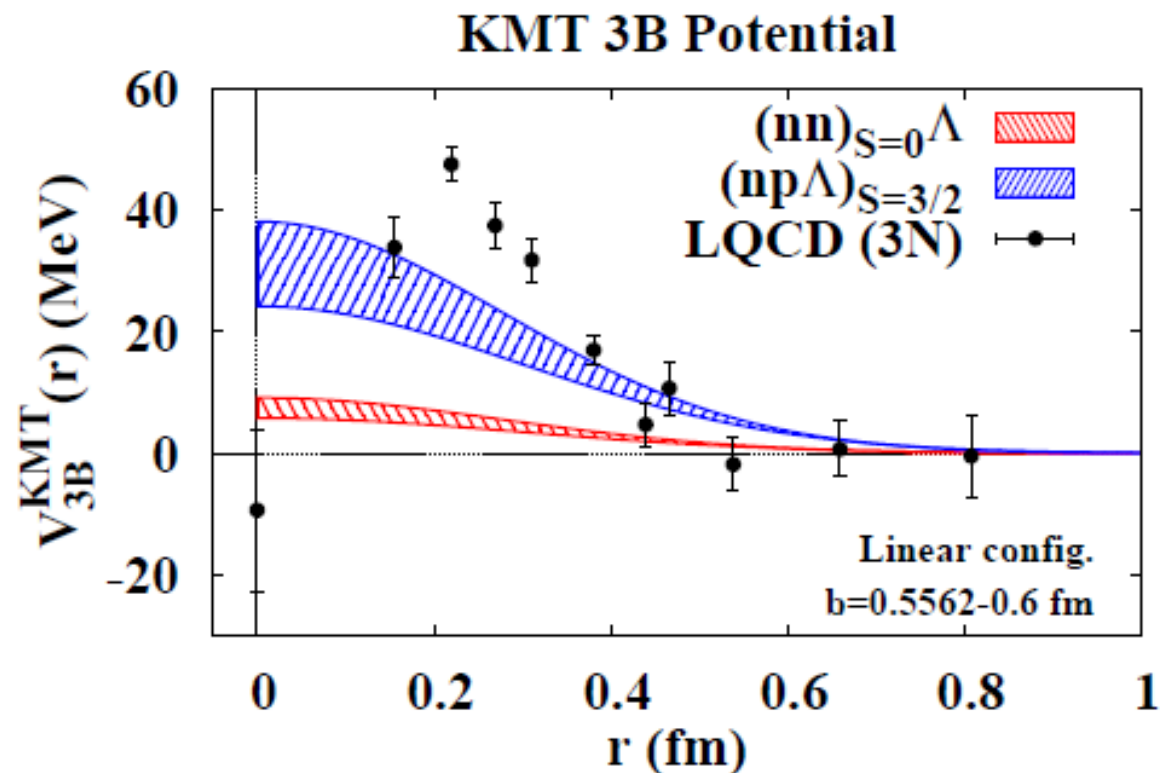
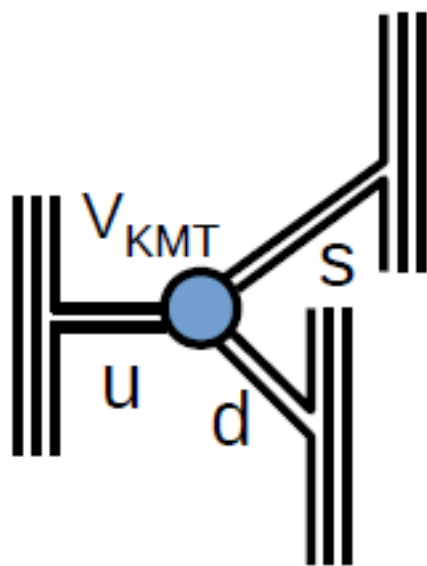
- 高密度でより斥力的となるハイペロンポテンシャルを導入すると、 $M=2.0 M_{\odot}$ の中性子星を支えることは可能。



3クォークカから3バリオンカへ

- ハイペロンを含む3体力(3バリオンカ)をクォークの動力学から理解できるか?
- 最近の進展: 3クォーク間の行列式型相互作用(小林-益川-'t Hooft (KMT) 相互作用)からハイペロンを含む3バリオン斥力が現れる

Ohnishi, Kashiwa, Morita, PTEP2017('17), 073D04.



中性子星物理の今後

■ 低密度領域における状態方程式

- 冷却原子による中性子星物質の「量子シミュレーション」が進行中！対相互作用の役割大
- 不安定核ビームを用いた対称エネルギー研究が進行中。
 ρ_0 以上での対称エネルギーも重イオン衝突を使って求まる？

■ 高密度領域における状態方程式

- ストレンジネスを含む原子核 (Λ 、 Ξ 、 $\Lambda\Lambda$ 、 K^- 、...) の研究が J-PARC を中心に進行中。実験データに基づくハドロン物質状態方程式の研究が (Λ 核以外でも) 進みそう。
- 高密度でクォーク物質への相転移はあるのか？
有限密度 QCD 相転移は難しいが大きな課題。

■ 天体物理学

- 中性子星の振動や磁場の役割の研究が進行中。
- 中性子星合体からの重力波観測ができれば、質量・半径が同時に・正確に決まる。

まとめ

- 原子核物理学の研究対象が大きく広がっている。
不安定核、超重核、ハイパー核、高温・高密度物質、...
- 原子核の半径・質量から核物質の概念が見出され、その状態方程式は重イオン衝突やコンパクト天体現象を理解する基礎となっている。
- 中性子星は表面から中心部にかけて様々な密度の物質が現れる。
質量・半径(MR)曲線は状態方程式と1対1対応し、近年発見された重い中性子星はハイペロン・パズルを投げかけている。
- 大学の学部で学ぶ物理の科目(力学・電磁気学・熱統計力学・量子力学・物理数学)は最先端の研究を進める上での基礎となる。しっかり勉強してほしい。
- 同時に新しい進展について話をきく「耳学問」も大切である。本当に面白いことを嗅ぎだす能力を磨いてください。
(サマーチャレンジに来ている学生にはいわずもがな?)