# 微分方程式の解き方

数野一平
北海道大学

November 2, 2001

## 1　変数分離型

次のような形をもつ微分方程式を解いてみよう。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

この微分方程式の特徴は、右辺が $x$ の関数と $y$ の関数の積で表されていることであり、「変数分離型」と呼ばれます。

　変数分離型の微分方程式は、左辺と右辺に $y$ と $x$ の関数を「分離」することによって解くことが出来ます。

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

これではまだ分離されているように見えませんが、左辺は $x$ で積分すると $y$ の積分に置き直せることがわかりますね。

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx \to \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

この両辺の不定積分が実行でき、かつこれを $y$ について解くことができれば、微分方程式が解けたことになります。

### 1.1　具体的な例

さて、例として次の微分方程式を解いてみましょう。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

説明にある通り、変数分離を行います。

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x} \to \log|y| = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

ここで $C$ は不定積分に伴う積分定数です。これを $y$ について解くと、解が得られます。

$$y = \pm \exp C\sqrt{x} = A\sqrt{x}$$

$\pm \exp C$ を改めて $A$ とおき直しています。

微分方程式の解に現われる積分定数は、通常、初期条件によって決まります。例えば $y(1) = 1$ の場合には、両辺に $x = 1, y = 1$ を代入して $A = 1$ と決まります。

下の図に、この微分方程式の解のグラフを示します。点が数値的に解いた答え、実線が $y = \sqrt{x}$ です。