

微分方程式のもう一つの見方

数野一平
北海道大学

November 16, 2001

1 微分方程式のもう一つの見方

次のような形をもつ変数分離型の微分方程式を別の見方で理解しましょう。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

変数分離型の微分方程式は、 (x, y) のある関数 F の全微分が 0 と表すこともできます。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightarrow \frac{dy}{g(y)} - f(x)dx = 0 \rightarrow dF = 0$$

ここで、関数 $F(x, y)$ は

$$F(x, y) = \int^y \frac{dy'}{g(y')} - \int^x f(x')dx'$$

です。よって、微分方程式の解は関数 F が一定の軌跡とみなせるのです。

1.1 具体的な例

さて、例として次の微分方程式を解いてみましょう。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

この微分方程式を変形すると、関数 $F(x, y) = \log y - \frac{1}{2} \log x$ の全微分が 0、別の表現では解は $F = \text{一定}$ の等高線となります。

下のグラフでは、この等高線を描いています。様々な等高線は「初期条件」(例えば $x = 1$ の時の y の値) の違いに対応します。例えば $x = 1$ で $y = 1$ なら $y = \sqrt{x}$ ですね。

