

1 重力振り子

1.1 近似的な解き方

長さ ℓ の質量が無視できるたるまない糸の先につけた質量 m の質点の運動を考えます。垂線からの振り子の角度を x (rad.) とすると、運動方程式は

$$m\ell \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin x \quad (1)$$

となります。小さい角度の振動を考えると、 $x \ll 1$ としてよいので、 $\sin x$ の近似式

$$\sin x \simeq x$$

を使うと運動方程式は次のように簡単になります。

$$m\ell \frac{d^2 x}{dt^2} = -mgx \quad (2)$$

そうするとこれはバネ定数が mg/ℓ のバネ振り子と同じ運動方程式になりますね。よって、次のように解くことが出来ます。

$$x = A \cos(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{g/\ell}$$

すなわち、糸の長さが等しければ最初の角度によらず同じ周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ の振動運動をするのです。

1.2 定性的な理解

上のことは歴史的にも重要な「発見」でしたが、振幅が大きくなったときにはどの程度ずれるのでしょうか？ この問題を考えるため、初期条件が $t = 0$ において $x = x_0 (> 0)$, $v = dx/dt = 0$ である場合を考えましょう。

周期は $1/v$ の一周積分で評価出来ます。

$$T(x_0) = \oint \frac{dx}{v} = \oint dx \frac{dt}{dx} = \oint dt$$

速度 v (の大きさ) はエネルギーと位置が与えられれば決まりますが、今は初期条件で $v = 0$ としてあるので、 $E = U(x_0)$ から

$$|v(x)| = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos x - \cos x_0)}$$

となります。周期を求めるには対称性から $x > 0, v > 0$ の領域を考えれば十分です。

$$T(x_0) = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{|v(x)|} = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}} \quad (3)$$

この表式から周期が近似値 T_0 よりも長くなることが定性的に分かります。関数

$$D(x) = 2(\cos x - \cos x_0) - (x_0^2 - x^2)$$

を考えると端点で $D(x_0) = 0$ 、微分が負 ($D'(x) = -2\sin x + 2x > 0 (x > 0)$) ですから、 $0 < x < x_0$ の領域で関数 $D(x)$ が負であることが分かります。つまり

$$2(\cos x - \cos x_0) \geq x_0^2 - x^2$$

です。これより式 (3) の被積分関数の分母は近似的な評価に比べて小さくなり、積分値は (= 周期) は大きくなるのです。

1.3 周期変化の数値積分を用いた評価

この積分を求めるのは難しいので数値的に求めた結果を示しましょう。ただし、被積分関数が $x = x_0$ で発散しているので高い精度で数値的に求めるには工夫が必要です。今は近似的な評価との差を問題にしているので、周期をもとめる場合にも差の関数を積分することによって精度が高い数値積分を行うことが出来ます。

$$T(x_0) = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{x_0} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \right] + T_0 \quad (4)$$

積分の第2項は近似的な評価ででてくる周期です。これは T_0 であることが分かっているので、差の部分のみ数値的に評価してやろう、というわけです。

$f(x)$ の積分を数値的に評価して、求めた周期を下図に示します。周期の表式 (3) を直接中点公式で積分したものが緑線で、差の数値積分に T_0 を加える表式 (4) を中点公式で積分した結果が赤線です。大きくなるはずの周期が単純な積分では (小さな x_0 の領域で) 小さくなっていること、これが差の数値積分ではとりのぞかれていることが分かります。一方、最初の角度が 90° 程度 ($x_0 = \pi/2 = 1.57\dots$) でも 2 割程度のずれですから、それほど大きくはないといえますね。

