

核多体系物理学

- 授業の概要・目的：核子・ハドロン・クォークからなる多体系の性質を状態方程式、および核反応論の観点から議論する。核物質の状態方程式を記述するために必要となる核多体理論(平均場理論、G-matrix、熱場の理論、強結合格子 QCD)、ハイパー核生成反応や重イオン反応を理解する上で必要とされる原子核核反応理論(直接反応、輸送模型等)、等の理論の枠組について解説すると共に、これらについての最近の研究成果についても紹介する。
- 授業計画と内容
核子・ハドロン・クォーク物質の相互作用と状態方程式について以下の内容で講義する。
 1. 状態方程式を記述する理論模型
 - (a) 核物質の状態方程式と QCD 相図研究の概観
 - (b) 場の理論からのアプローチ(南部-ヨナラシニヨ模型、強結合格子 QCD)
 - (c) 相対論的平均場理論
 2. 輸送理論
 - (a) 時間依存平均場理論、半古典輸送模型とボルツマン方程式、流体模型、
 - (b) 古典ヤンミルズ場のダイナミクス
 - (c) 高エネルギー重イオン衝突の概観と輸送理論の適用例。
 3. 直接反応理論
 - (a) 核子-核子散乱、核力と位相差、有効相互作用(G-matrix)
 - (b) ハドロン-核反応(光学模型、インパルス近似、グリーン関数法)、ハイパー核・中間子核生成反応の概観と直接反応理論の適用例
 - (c) 高エネルギー核反応(グラウバー模型、ハドロン共鳴)
- 成績評価の方法・基準：履修状況及びレポートにより総合評価する。

参考書 *Quark Gluon Plasma, K.Yagi, T.Hatsuda, Y.Miake (CAMBRIDGE).*
格子上の場の理論、青木慎也(シュプリンガー・ジャパン)

■ 講義 Sec. 1(b)

- 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

- カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

- 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

- 強結合格子 QCD

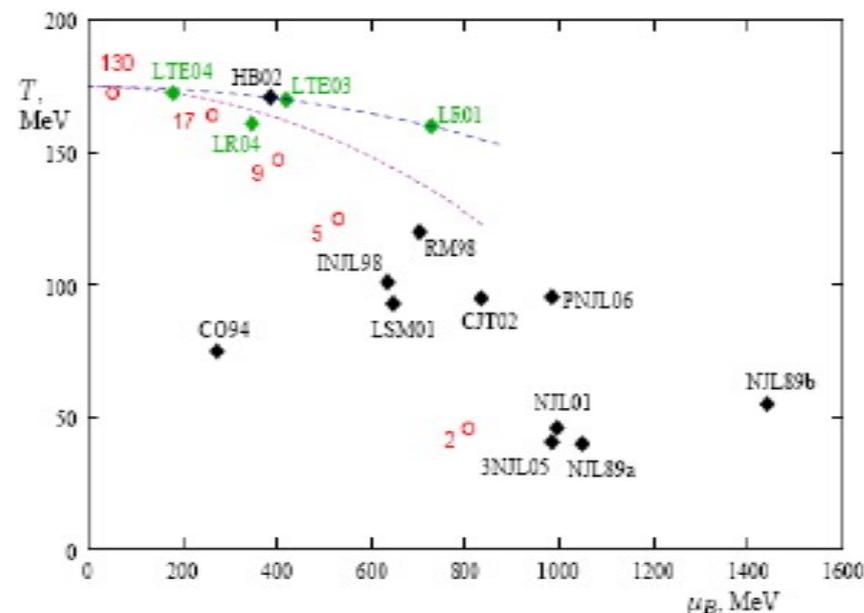
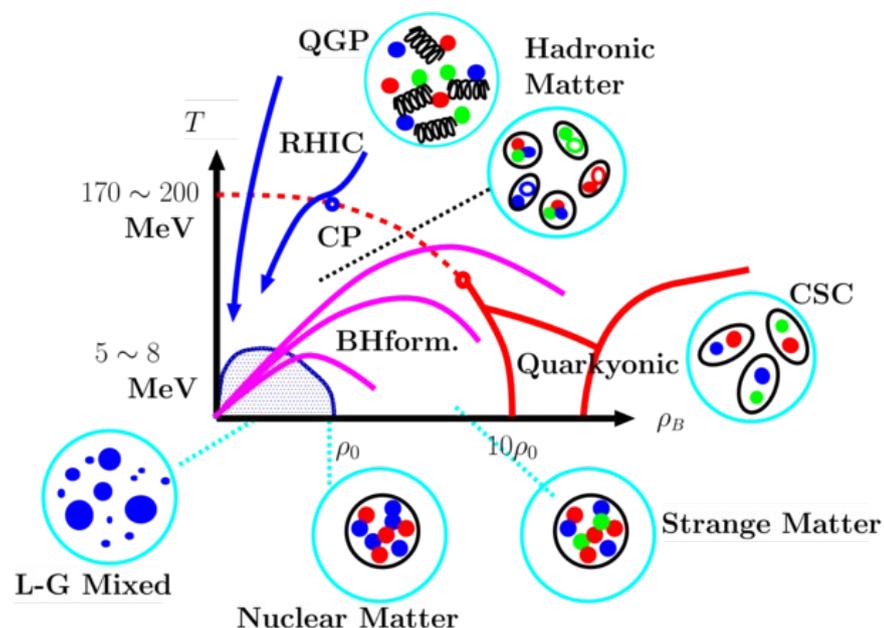
- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

- 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

QCD Phase diagram

- Phase transition at high T
 - Lattice MC & RHIC
- High μ transition has rich physics
 - Various phases, CEP, Astrophysical applications, ...
 - Models & Approximations are necessary !
 - ◆ Lattice MC works only for small μ (Tayler, AC, DOS, Canonical, ...) or in the Strong Coupling Limit(SCL) (MDP) *Karsch, Mutter ('89), de Forcrand, Fromm ('09)*
 - ◆ Eff. Models: NJL, PNJL, PLSM,
 - ◆ Approximations: Large N_c , **Strong Coupling**, ...



Field Theory at Finite T

経路積分

■ 量子力学での経路積分 (Path integral)

- 時刻 t_i で位置 q_i にいた粒子が時刻 t_f で位置 q_f に到着する振幅

$$S_{fi} = \langle q_f, t_f | \exp[-i \hat{H}(t_f - t_i)] | q_i, t_i \rangle = \int Dq \exp(iS[q])$$

$$S[q] = \int_{q(t_i)=q_i, q(t_f)=q_f} dt L(q, \dot{q})$$

経路 $q(t)$ についての和 \rightarrow 経路積分

- 特徴

- ◆ 演算子の代わりに通常の数 (c-数) で表せる。
- ◆ 作用 S の構成時に正準交換関係を用いることにより「量子論」の性質を取り込む。

■ 場の理論 = 各点での場の振幅 $\varphi(x,t)$ を座標とする量子力学

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | \exp[-i \hat{H}(t_f - t_i)] | \Psi_i \rangle = \int D\phi \exp(iS[\phi])$$

$$S[\phi] = \int_{\Psi(t_i)=\Psi_i, \Psi(t_f)=\Psi_f} d^4x L(\phi, \partial_\mu \phi)$$

■ 分配関数

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \exp(-E_n/T) = \sum_n \langle n | \exp[-\hat{H}/T] | n \rangle \\ &= \sum_n \langle n | \exp[-i\hat{H}(t_f - t_i)] | n \rangle_{t_f - t_i = -i/T} = \int D\phi \exp(-S_E[\phi]) \end{aligned}$$

$$S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau d^3x L_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi) \Big|_{\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)}$$

$$L_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi) = -L(\phi, \partial_i \phi, i\partial_t \phi)$$

$$t = -i\tau, \quad \partial_\tau = -i\partial_t, \quad \beta = 1/T$$

$$iS = i \int_0^{-i\beta} dt \int d^3x L = \int_0^\beta d\tau d^3x L = - \int_0^\beta d\tau d^3x L_E$$

- 統計力学の分配関数は虚時間発展の振幅の和である。
- 全ての状態について和をとるので、 $\tau=0, \beta$ で周期境界条件をつけて任意の $\phi(x, t)$ について足し合わせる。

Example: Scalar Field

■ Lagrangian density

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi)$$

Euler-Lagrange equation (principle of least action)

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{Klein-Gordon eq.})$$

■ Euclidean Lagrangian

● Euclid 化のルール $t = -i\tau, x_4 = \tau, g_{\mu\nu} = (1, 1, 1, 1), L_E = -L$

$$L_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + U(\phi)$$

→ 相互作用がない場合に実際に経路積分してみましょう。

Partition Func. of Free Scalar Field

■ 自由スカラー場の分配関数

- 有限のサイズの箱 (体積 V) の中で自由スカラー場 ($U=0$) を考える

- フーリエ変換

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n, \mathbf{k}} \exp(-i \omega_n \tau + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{k})$$

Periodic boundary condition $\omega_n = 2\pi n T$, $k_i = 2\pi n_i / L$

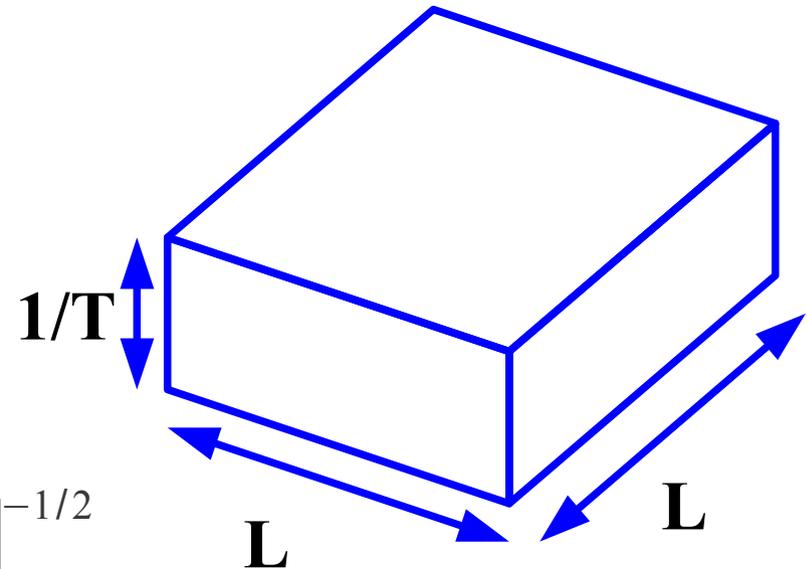
Euclidean action
$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \phi_n^2(\mathbf{k})$$

- フーリエ変換はユニタリー変換だから、積分の測度は変わらない。(高々定数倍)

$$D\phi = N \prod_{n, \mathbf{k}} d\phi_n(\mathbf{k})$$

- ガウス積分 \rightarrow 分配関数

$$Z = \int D\phi e^{-S_E} = N \prod_{n, \mathbf{k}} \sqrt{2\pi} [\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2]^{-1/2}$$



Partition Func. of Free Scalar Field (cont.)

■ 自由エネルギー

$$\begin{aligned}\Omega &= -T \log Z = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[T \sum_n \log(\omega_n^2 + \underbrace{\mathbf{k}^2 + m^2}_{E_k^2}) \right] + \text{const.} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} I(E_k, T) + \text{const.}\end{aligned}$$

■ 松原和 (Matsubara Frequency summation)

$$\sum_n \frac{1}{a^2 + \bar{n}^2} = \frac{\pi}{2a} \times \begin{cases} \coth(\pi a/2) & (\bar{n} = 2n) \\ \tanh(\pi a/2) & (\bar{n} = 2n + 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial I(E_k, T)}{\partial E_k} = \sum_n \frac{2E_k}{\omega_n^2 + E_k^2} = \dots = \frac{1 + \exp(-E_k/T)}{1 - \exp(-E_k/T)}$$

$$I(E_k, T) = E_k + 2T \log(1 - \exp(-E_k/T)) + \text{const.}$$

Partition Func. of Free Scalar Field (cont.)

■ 自由エネルギー (グランド・ポテンシャル)

$$\Omega = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right\} + \text{const.}$$
$$= V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right]$$

ゼロ点エネルギー ($\hbar\omega/2$)

熱的励起

ゼロ点エネルギー部分を無視して部分積分すると、通常の圧力を得る。

$$P = -\Omega/V = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{3} \frac{e^{-E_{\mathbf{k}}/T}}{1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}} \quad \left(\mathbf{v} = \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right)$$

場の理論 \rightarrow *Euclid* 化 + *Imag. Time* \rightarrow 統計力学

Appendix: Matsubara Frequency Summation

Contour integral technique

$$S = T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T)$$

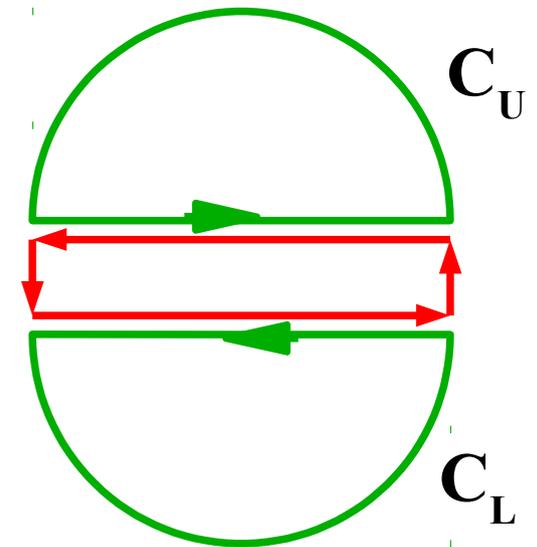
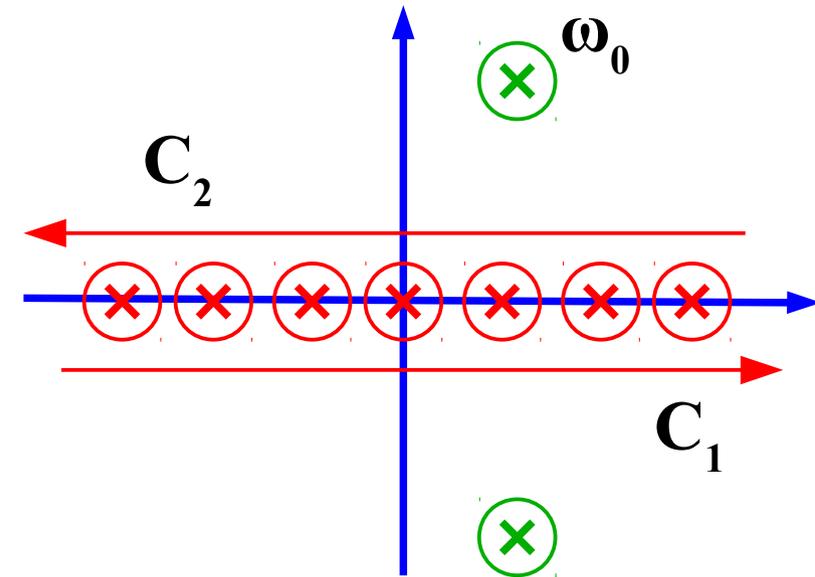
$$= \pm \int_{C_1+C_2} \frac{dz}{2\pi} \frac{g(z)}{e^{i\beta z} \mp 1} = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1}$$

(g : meromorphic (有理型),
no pole on real axis,
decreases faster than $1/\omega$ at $\omega \rightarrow \infty$)

- Applicable to more general cases !
- Anti-periodic condition \rightarrow Fermi-Dirac dist.

- Example: $g(\omega) = 1/(\omega^2 + E^2)$
 $\rightarrow \omega_0 = \pm iE, \text{Res } g = \pm 1/2iE$

$$S = \frac{1}{2E} \frac{e^{\beta E} \pm 1}{e^{\beta E} \mp 1}$$



$$C_1 + C_2 + C_U + C_L = 0$$

■ 量子力学・場の理論

- 経路積分によって通常の数 (c-数) による記述が可能。
- ただし、全ての経路の足し合わせが必要。

■ 統計力学・分配関数

- 虚時間による定式化により、分配関数が経路積分で表現できる。
- ユークリッド化することにより、時間と空間を同様に扱える。
ただし、(虚)時間 $\tau (=it)$ の範囲には制限がつく。 ($0 \leq \tau \leq \beta$)
- 分配関数はすべての状態での期待値の和
→ $\tau=0, \beta$ で周期境界条件 → 松原振動数 $\omega_n = 2\pi n T$
(フェルミオンの場合には反周期境界条件、 $\omega_n = 2\pi (n + 1/2) T$)

■ 自由スカラー場の分配関数

- 松原振動数についての和 → ゼロ点のエネルギー + 熱的部分

■ 勉強すべきこと

- グリーン関数、摂動論、Hard Thermal Loop、Debye 遮蔽、...

■ 講義 Sec. 1(b)

● 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

● カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

● 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

● 強結合格子 QCD

- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

● 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

Chiral Transition and NJL model

Quantum Chromodynamics (QCD)

■ QCD Lagrangian

notation: Yagi, Hatsuda, Miake

$$L = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - m) q - \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g A_\mu \quad (\text{Covariant derivative})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu] = \frac{-i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (\text{Field strength})$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad (t^a = \text{SU}(3) \text{ generator}, [t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

■ Gauge transformation

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad g A_\mu(x) \rightarrow V(x) (g A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^\dagger(x)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x) F_{\mu\nu} V^\dagger(x), \quad D_\mu(x) \rightarrow V(x) D_\mu(x) V^\dagger(x)$$

Chiral Symmetry

■ Chiral transformation

= indep. rotation of left- and right-handed quarks

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \rightarrow q'_L = V_L q_L, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \rightarrow q'_R = V_R q_R$$

$${}^t q = (u, d, s, \dots), \quad V_{L,R} \in \text{SU}(N_f)$$

axial-vector transformation

$$q \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\lambda^j \theta^j \gamma_5\right)q = V_A q$$

- **QCD Lagrangian is invariant under chiral transformation when quarks are massless.**

$$L_q = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q$$

$$\rightarrow q^+ V_A^+ \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu - m) V_A q = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - V_A m V_A)q$$

$$\delta L_q \simeq \frac{1}{2}\bar{q}i\gamma_5\{\lambda^j \theta^j, m\}q \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow 0)$$

Chiral Symmetry (cont.)

■ Chiral transformation of hadrons ($SU(2)_f$)

$$S = \bar{q} q \text{ (Scalar)}, \quad P^a = \bar{q} i \gamma_5 \tau^a q \text{ (Pseudo scalar)}$$

$$\delta q = -\frac{i}{2} \theta^j \lambda^j \gamma_5 q, \quad \delta \bar{q} = -\frac{i}{2} \bar{q} \theta^j \lambda^j \gamma_5 \text{ (infinitesimal transf.)}$$

$$S \rightarrow S' = S - \theta^a P^a, \quad P^a \rightarrow P'^a = P^a + \theta^a S$$

→ Scalar and Pseudo scalar mixes under chiral transf.

- P^a の θ^a 方向の成分を P 、 θ^a ベクトルの大きさを θ とすると、chiral transf. は (S, P) 空間での回転

$$\begin{pmatrix} S' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} \rightarrow S^2 + P^2 = \text{const. (chiral circle)}$$

- 「演算子」～「粒子」と考えると、 $\sigma (J^\pi=0^+)$ と $\pi (J^\pi=0^-)$ の質量は縮退するはずだが、軽いスカラー中間子は存在しない。
→ 対称性の自発的破れ

■ Chiral symmetric Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \right) - U(\sigma, \boldsymbol{\pi})$$

$$U(\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 - f^2)^2$$

- Invariant under chiral transf.

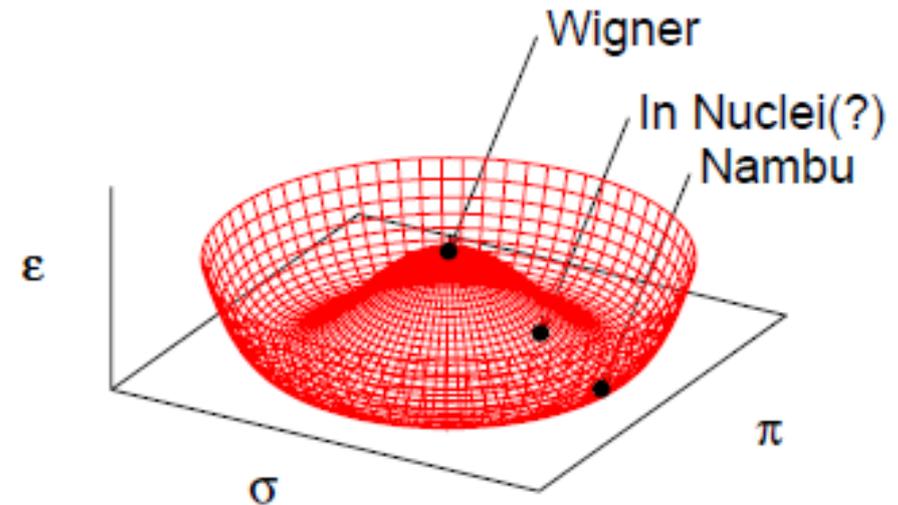
$$\delta \sigma = -\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad \delta \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\sigma}$$

- σ and π masses

$$f^2 < 0 \rightarrow m_\sigma^2 = m_\pi^2 = -\lambda f^2$$

$$f^2 > 0 \rightarrow \langle \sigma \rangle = f$$

$$U(\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \times 0 \times \boldsymbol{\pi}^2 + O((\varphi, \boldsymbol{\pi})^4) \quad (\varphi = \sigma - f)$$



→ When a member condensates, their masses split, and massless modes appear !

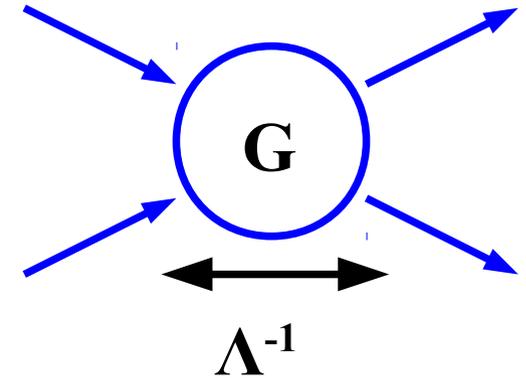
Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model

■ NJL Lagrangian

$$L = \bar{q} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \frac{G^2}{2 \Lambda^2} [(\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \tau q)^2]$$

QCD において quark の高運動量成分、
gluon を積分

→ QCD の対称性を保った
quark の有効理論
($m=0$ で chiral sym. をもつ)



$$S = \bar{q} q, P = \bar{q} i \gamma_5 \tau q$$

→ $S^2 + P^2 = \text{invariant under chiral transf.}$

■ Euclidean

$$(x_\mu)_E = (\tau = it, \mathbf{x}), (\gamma_\mu)_E = (\gamma_4 = i \gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$L_E = \bar{q} (-i \gamma_\mu \partial_\mu + m) q - \frac{G^2}{2 \Lambda^2} [(\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \tau q)^2]$$

Nambu, Jona-Lasinio ('61), Hatsuda, Kunihiro ('94)

NJL model: Partition Function

■ Partition Function

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{NJL}} &= \int Dq D\bar{q} \exp\left[-\int d^4x L_{\text{NJL}}\right] \\
 &= \int Dq D\bar{q} D\Sigma \exp\left[-\int d^4x \left\{ \underbrace{\bar{q}(-i\gamma\partial + m + \overbrace{G\Sigma}^M)}_D q + \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \right\}\right] \\
 &= \int D\Sigma \exp\left[-S_{\text{eff}}(\sigma, \boldsymbol{\pi}; T)\right]
 \end{aligned}$$

$G = G_0 - G_0 \Sigma G$

■ Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$-\frac{G^2}{2\Lambda^2} \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2 \right] \rightarrow \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + G \bar{q} \underbrace{(\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})}_\Sigma q$$

■ Effective Action

$$S_{\text{eff}}(\Sigma; T) = -\log \det D + \int d^4x \frac{\Lambda^2}{2} [\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)]$$

経路積分において、フェルミオンは反可換な Grassmann 数

Appendix: Bosonization & Grassman Integral

■ Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$\exp\left[\frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2}\right] = \int d\sigma \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{2}\left(\sigma - \frac{GS}{\Lambda^2}\right)^2 + \frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2}\right]$$

$$\exp\left[\frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2}\right] = \int d\pi^a \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{2}\left(\pi^a - \frac{GP^a}{\Lambda^2}\right)^2 + \frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2}\right]$$

■ Grassman number

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. constant} = 0 \quad , \quad \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. constant} \equiv 1$$

$$\begin{aligned} \int d\chi d\bar{\chi} \exp[\bar{\chi} A \chi] &= \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!} (\bar{\chi} A \chi)^N = \dots = \det A \\ &= \exp[-(-\log \det A)] \end{aligned}$$

Bi-linear Fermion action leads to $-\log(\det A)$ effective action

Fermion Determinant with Mean Field Approximation

- Fermion determinant をいかに計算するか？
→ 平均場近似 + Fourier 変換により、解析的な計算が可能

Mean field approx. $\Sigma(x) = \sigma = \text{const.}$

Fourier transf. $q(x) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n, \mathbf{k}} \exp(-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) q_n(\mathbf{k})$

Fermion matrix は対角的となる。

$$D = -i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - i\gamma_4 \partial_\tau + M = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - \gamma_4 \omega + M = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - i\gamma_0 \omega + M$$

$$= \begin{pmatrix} -i\omega + M & \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & i\omega + M \end{pmatrix}$$

$$\det D = \prod_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2} \quad (d_f = 4 N_c N_f = \text{Fermion d.o.f.})$$

$$\rightarrow F_{\text{eff}} = \Omega/V = -\frac{T}{V} \log Z = -\frac{T}{V} \sum_{n, \mathbf{k}} \log (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2} + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2$$

Effective potential of NJL model

■ 松原振動和 → 有効ポテンシャル

$$F_{\text{eff}} = \Omega / V = -d_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + T \log(1 + e^{-E_k/T}) \right] + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2$$

ゼロ点エネルギー + クォークの熱励起部分 + 補助場

■ 真空 (T=0, $\mu=0$) での有効ポテンシャル (chiral limit, m=0)

$$F_{\text{eff}} = -\frac{d_f}{2} \int^{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 = \Lambda^4 \left[-\frac{d_f}{2} I(x) + \frac{x^2}{2G^2} \right] \quad (x = M/\Lambda)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Lambda^4 I(M/\Lambda)}$

$$\frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} = -\frac{d_f}{16\pi^2} + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \right] + O(x^4 \log x) \quad (G_c^2 = 8\pi^2/d_f)$$

$G > G_c$ のとき、2次の係数が負 → カイラル対称性の自発的破れ

$$I(x) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\sqrt{1+x^2}(2+x^2) - x^4 \log \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right] \simeq \frac{1}{8\pi^2} \left[1+x^2 + \frac{1}{8}x^4 \left(1+4 \log \frac{x}{2} \right) + O(x^6) \right]$$

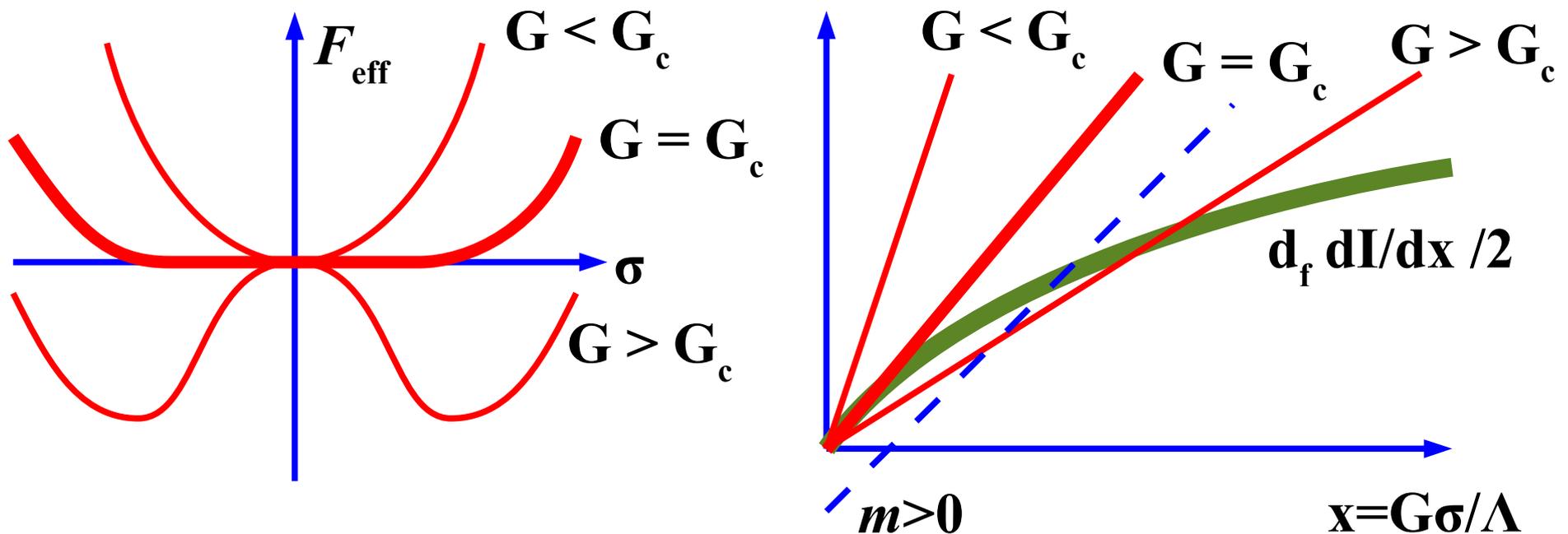
Spontaneous breaking of chiral symmetry

- F_{eff} が最小になる σ が実現される (Gap equation)

$$\frac{1}{\Lambda^4} \frac{\partial F_{\text{eff}}}{\partial x} = -\frac{d_f}{2} \frac{dI(x)}{dx} + \frac{x}{G^2} = 0$$

$G > G_c$ のとき有限の $\sigma (\sim q^{\text{bar}} q)$ の解がエネルギー最小状態を与える

quark 間の引力が十分に強ければ、 $\sigma (\sim q^{\text{bar}} q)$ が凝縮し、構成子クォークの質量を生み出す。(Nambu, Jona-Lasinio ('61))



Chiral Transition at Finite T

Effective potential at finite T in NJL

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} &= -\frac{d_f}{2} I(x) - \frac{d_f}{\Lambda^4} P(M; T) + \frac{x^2}{2G^2} \\ &= -\frac{d_f}{16\pi^2} - \frac{d_f \pi^2}{90} \frac{7}{8} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^4 + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^2\right) \right] + O(x^4 \log x) \end{aligned}$$

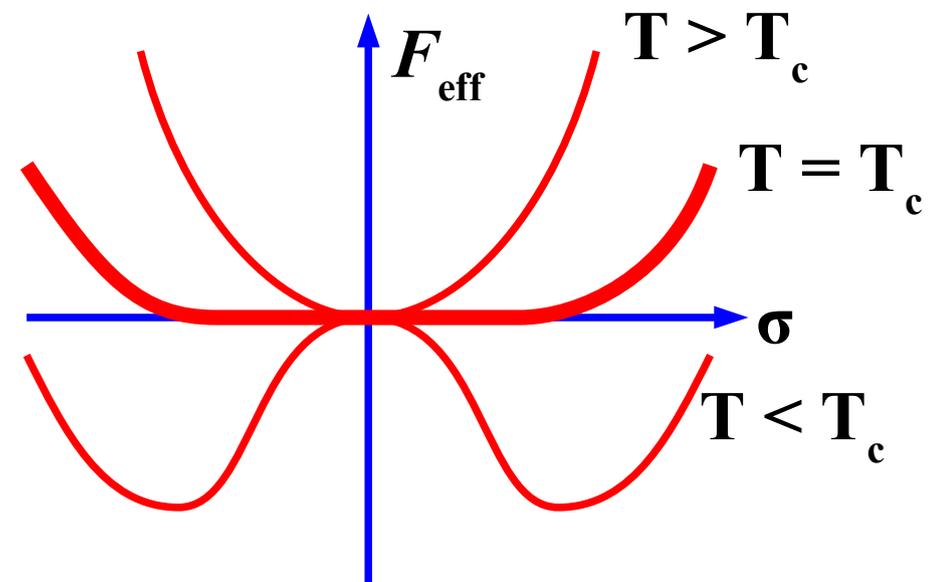
Stefan-Boltzmann

$$P(M; T) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{3E} \frac{1}{\exp(E/T) + 1}$$

→ $T < 3^{1/2} \Lambda/\pi$ の範囲で、
カイラル相転移が起こるはず

有限温度での
カイラル相転移を示唆

圧力への質量補正



カイラル相転移とNJL 模型 *Short Summary*

■ カイラル対称性

- クォーク質量が小さいときに QCD がもつ対称性
- 自発的なカイラル対称性の破れがハドロン質量を生み出す。

■ 南部 - ヨナラシニヨ模型 (NJL)

- クォーク・反クォークの引力が強い場合には、クォーク・反クォーク対 ($q^{\text{bar}}q$) が真空中で凝縮(カイラル凝縮)して、構成子クォークの質量を生み出す。
- 有限温度ではクォークの熱励起効果により凝縮が弱められ、ある温度で凝縮が消える(カイラル対称性の回復)。

■ 技術的な部分

- 経路積分において Fermion は反可換な Grassman 数で表す。
(Fermion determinant, 反周期境界条件)
- クォーク間の相互作用のボソン化による取扱い
(Hubbard-Stratonovich transf.)

- 有限密度の場合に、分配関数はどう変わるか？
- Example: Relativistic Mean Field (RMF)

$$L = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma) \psi + L_{\text{meson}}(\Phi) \quad (\Phi = \sigma, \omega, \rho)$$

$$\Sigma = g_\sigma \sigma + \gamma^0 (g_\omega \omega^0 + g_\rho \rho^0 \tau)$$

- Euclid 化 + 化学ポテンシャルの導入

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} D\Phi \exp \left[- \int d^4x (L - \mu \psi^\dagger \psi) \right]$$

$$= \int D\psi D\bar{\psi} D\Phi \exp \left[- \int d^4x \{ \bar{\psi} D\psi + L_{\text{meson}}(\Phi) \} \right]$$

$$= \int D\Phi \exp \left[- S_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu) \right]$$

$$D = -i \gamma \partial - \mu \gamma^0 + M + \Sigma$$

- 有効作用

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(F)} + S_{\text{meson}} = - \sum_{n, k} \log \det D_{n, k} + \int d^4x L_{\text{meson}}$$

Appendix: Finite μ (cont.)

- 一様な場を仮定 \rightarrow Fourier 変換により D をブロック対角化

$$D_{n,k} = \gamma^0 (-i\omega_n - (\mu - V^0)) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M + g_\sigma \sigma$$

$$\rightarrow \det D = \left[(\omega_n + i\mu^*)^2 + E^{*2} \right]^2$$

$$\mu^* = \mu - g_\omega \omega^0 - g_\rho \rho^0 \tau, \quad E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}, \quad M^* = M + g_\sigma \sigma$$

- 松原振動数和を実行

$$F_{\text{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{E^*}_{\text{ゼロ点}} + \underbrace{T \log \left(1 + e^{-(E^* - \mu^*)/T} \right)}_{\text{粒子 (核子)}} + \underbrace{T \log \left(1 + e^{-(E^* + \mu^*)/T} \right)}_{\text{反粒子 (反核子)}} \right]$$

- 温度 0 の場合

$$F_{\text{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2} \int^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* + d_N \int^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* - \mu^* \rho_B \quad (d_N = d_f/2)$$

ゼロ点エネルギーは核子のループから現れる
 \rightarrow 通常 RMF では無視

■ 講義 Sec. 1(b)

● 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

● カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

● 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

● 強結合格子 QCD

- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

● 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

Introduction to Lattice Field Theory

格子上の場の理論

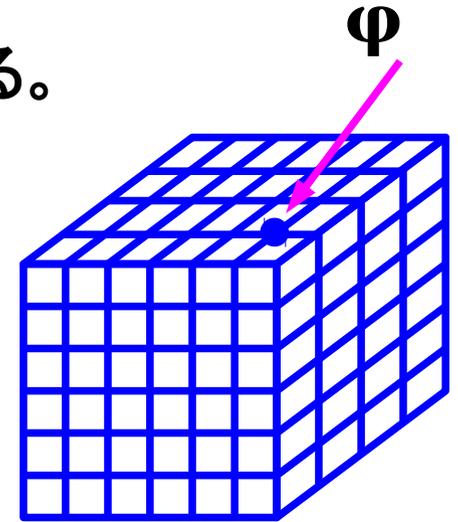
■ 場の理論 = 無限自由度

- 解析的・厳密にとくことは一般には困難 → 数値的に解く
- 求めたいものは非常に複雑な積分
→ 「区分求積」= 有限の格子上で解き、連続極限をとる。

■ スカラー場

- 連続理論 (Euclidean) の作用 (ϕ^4 理論)

$$S_{\text{cont}} = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]$$



- 格子上の作用

- ◆ 連続極限で S_{cont} に一致
- ◆ S_{cont} とできるだけ同じ対称性を持つ

$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n, \mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

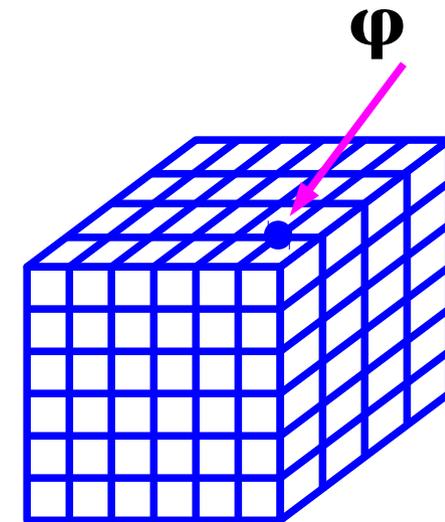
格子場の理論 (cont.)

■ 格子場の作用：スカラー場理論

$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n, \mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} \\ + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

$n = (n_x, n_y, n_z)$: spacetime point on the lattice

$\hat{\mu}$: unit vector in the positive μ direction.



● $a \rightarrow 0$ の極限で、連続理論の作用と一致

$$S_{\text{lat}} \rightarrow a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2} \phi(n) \sum_{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\mu}^2} + \frac{m^2}{2} \phi(n)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(n)^4 \right] + O(a^6) \\ = \int d^4 x \left[-\frac{1}{2} \phi(x) \partial^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right]$$

● $\phi \rightarrow -\phi$ 等の対称性を保つ。

Gauge field

■ Gauge action (Euclidean)

$$S_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu],$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad ([t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \operatorname{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

(経路積分では変数が c 数なので、 $gA \rightarrow A$ とスケール)

■ Gauge transformation

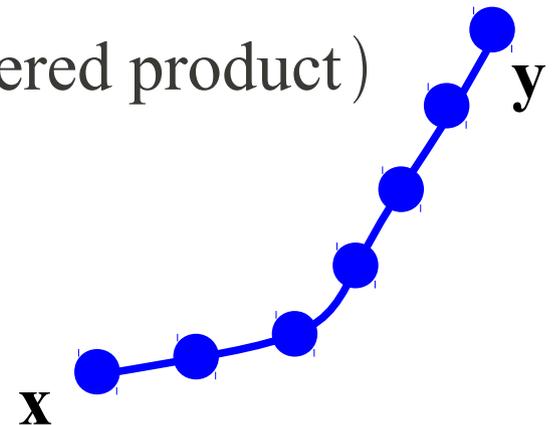
$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i\partial_\mu)V^+(x), \quad F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x)F_{\mu\nu}V^+(x)$$

■ ゲージ不変性をもつ格子上的作用をどのように作るか？ → リンク変数

$$U(x, y) \equiv P \exp \left[i \int_x^y dz_\mu A_\mu(z) \right] \quad (P: \text{path ordered product})$$

リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受ける

$$U(x, y) \rightarrow U'(x, y) = V(x)U(x, y)V^+(y)$$



Appendix: Gauge transformation of U

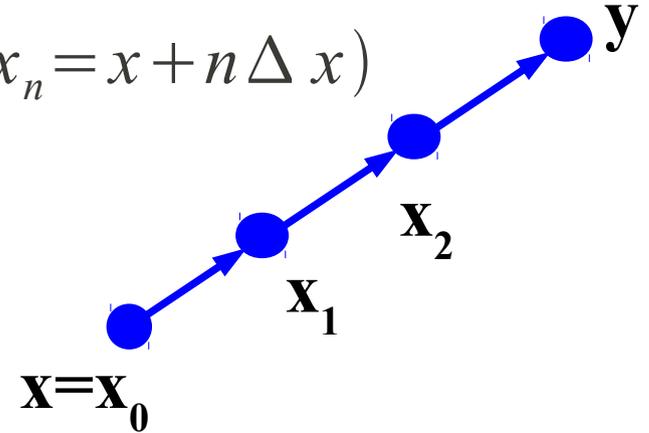
■ Proof of $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow V(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \mathbf{y})V^+(\mathbf{y})$

$$U(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] \quad (x_n = x + n \Delta x)$$

(multiply $(1+i A \Delta x)$ to the right !)

By using the gauge transformation of A ,

$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^+(x)$$



and the unitarity of V , $V(\mathbf{x}) V^+(\mathbf{x})=1$, we get

$$\begin{aligned} & 1 + i A'_\mu(x_n) \Delta x_\mu \\ &= 1 + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^+(x_n) \Delta x_\mu + V(x_n) \partial_\mu V^+(x_n) \Delta x_\mu \\ &= V(x_n) V^+(x_{n+1}) + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^+(x_{n+1}) \Delta x_\mu + O((\Delta x)^2) \\ &= V(x_n) [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] V^+(x_{n+1}) + O((\Delta x)^2) \\ &\rightarrow U'(x, y) = V(x) U(x, y) V^+(y) \end{aligned}$$

Gauge action

■ リンク変数

$$U_{n,\mu} \equiv U(n, n + \hat{\mu}) = \exp[ia A_{\mu}(n)] \in \text{SU}(N)$$

- リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受けるので、「閉じた経路」にそって積をとると、その trace はゲージ不変。

$$\prod_{n \in C} U \rightarrow V(n) \left(\prod_{n \in C} U \right) V^+(n)$$

■ Plaquette

Lattice 上で最も小さな loop は 単位正方形

$$n \rightarrow n + \hat{\mu} \rightarrow n + \hat{\mu} + \hat{\nu} \rightarrow n$$

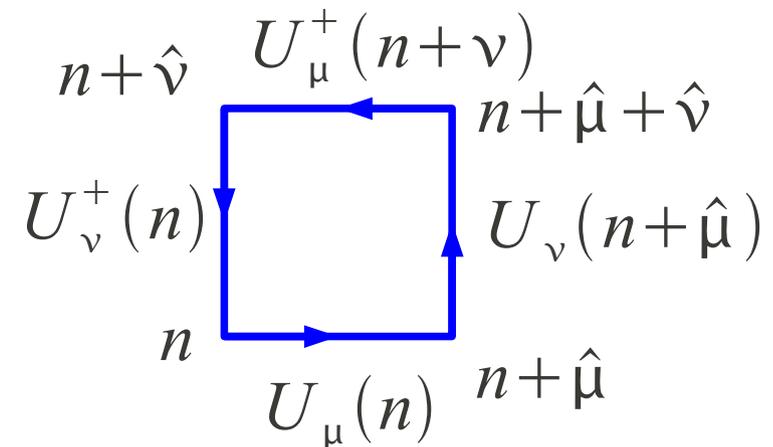
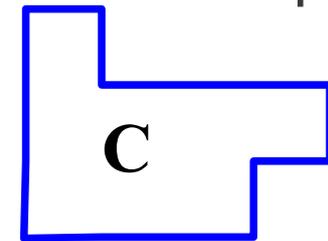
$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\nu,\mu}^+ U_{n,\nu}^+$$

■ Gauge action (plaquette action)

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right] \quad (\beta_g = 2 N_c / g^2)$$

$$U_{n,\mu} = U(n, n + \hat{\mu})$$

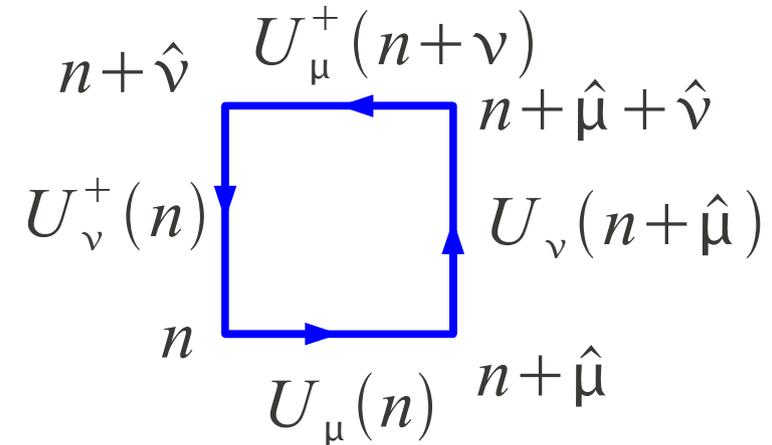

$$U_{n,\mu}^+ = U(n + \hat{\mu}, n)$$

Appendix: Plaquette and continuum action

■ ゲージ場の格子作用

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right]$$



● U(1) (電磁場) の場合：周積分 = rotation の面積分 $\rightarrow \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}$

● 非可換ゲージ場の場合：Hausdorff 公式の利用 $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

$$\text{tr } U_{\mu\nu}(x) = \text{tr } e^{ia\{A_\mu(x) + A_\nu(x+\hat{\mu}) + ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}} \times e^{-ia\{A_\mu(x+\hat{\nu}) + A_\nu(x) - ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}}$$

$$= \text{tr } e^{ia[(A_\nu(x+\hat{\mu}) - A_\nu(x)) - (A_\mu(x+\hat{\nu}) - A_\mu(x)) + ia[A_\mu, A_\nu] + O(a^3)]}$$

$$= \text{tr} \left[\underbrace{1 + ia^2 F_{\mu\nu} + a^4 X_4 - a^4 F_{\mu\nu}^2 / 2}_{0} + O(a^6) \right]$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G = \sum_{n, \mu \neq \nu} \beta_g \text{tr} \left[1 - \frac{a^4}{2} F_{\mu\nu}^2 \right]$$

S. Aoki, Text

■ ゲージ場の経路積分

$$Z_G = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp(-S_G) = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp[\beta_g \sum_{P \in \text{plaq.}} \text{tr}(U_P + U_P^+)]$$

- dU は群上の不変測度 (Haar measure)
→ ゲージ変換

$$U_{n, \mu} \rightarrow V(n) U_{n, \mu} V^+(n + \hat{\mu})$$

に対して不変な積分の測度が必要

■ リンク積分 SU(N)

- ゲージ不変性のみで、リンク変数の多項式の積分はほぼ決まる。

$$\int dU 1 = 1 \quad (\text{normalization}), \quad \int dU U_{ab} = 0$$

$$\int dU U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$$

$$\int dU U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

Proof of the one-link integral formulae

■ $\int dU U_{ab} = 0$

- LHS = R_{ab} とおく。両辺に左から SU(N) 行列 V をかけると

$$\text{LHS} = \int dU (VU)_{ab} = \int d(VU) (VU)_{ab} = R_{ab}, \quad \text{RHS} = (VR)_{ab}$$

V は任意の SU(N) の元だから、 $R_{ab} = 0$

■ $\int dU U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$

- LHS = T_{bi}^{aj} とおく。U, U^+ が LU, U^+L^+ と変換するよう L, L^+ をかける。

$$\text{LHS} = \int dU (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = \int d(LU) (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = T_{bi}^{aj}$$

$$\text{RHS} = L_{ac} T_{bi}^{ck} L_{kj}^+ \rightarrow LT_{bi} = T_{bi}L \rightarrow T_{bi}^{aj} = S_{bi} \delta^{aj}$$

任意の SU(N) の元と交換するので上添字について T は単位行列。
同様に右変換して S も単位行列に比例。

$a=j$ において和をとると、比例係数が $1/N$ と分かる。

Proof of the one-link integral formulae

$$\int dU U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

- 左辺を T_{ijk}^{abc} とおく。U を左変換。

$$T_{ijk}^{abc} = L_{ad} L_{be} L_{cf} T_{ijk}^{def}$$

任意の L に対して不変な 3 階のテンソルは完全反対称テンソルのみ。
右変換も同様。

$$T_{ijk}^{abc} = c \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk}$$

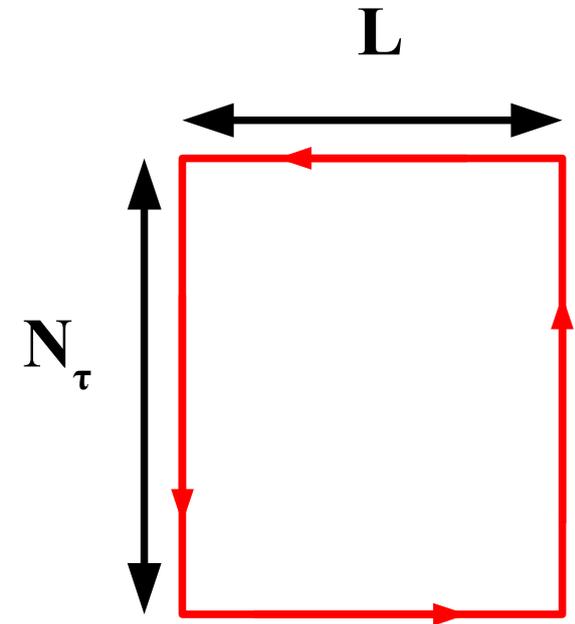
- 両辺に abc をかけて和をとり、 $\det U=1$ を使うと $c=1/N!$

Wilson Loop

- One link integral formulae の応用として、強結合領域での Wilson loop の期待値を求めてみます。
- Wilson loop

$$W(C=L \times N_\tau) = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

- 空間方向 L 、時間方向 N_τ のループにそって、リンク変数を掛け合わせたもの。
- 意味づけ
ある時刻に両端が重いクォークからなり、 L だけ伸びたストリングを作る。
虚時間 N_τ の後に同じ位置で観測する確率。



$$\langle O_L(N_\tau) O_L^+(0) \rangle \propto \exp(-V(L) N_\tau) \quad (\text{for large } N_\tau)$$

$V(L)$ = Interquark potential

Wilson loop (cont.)

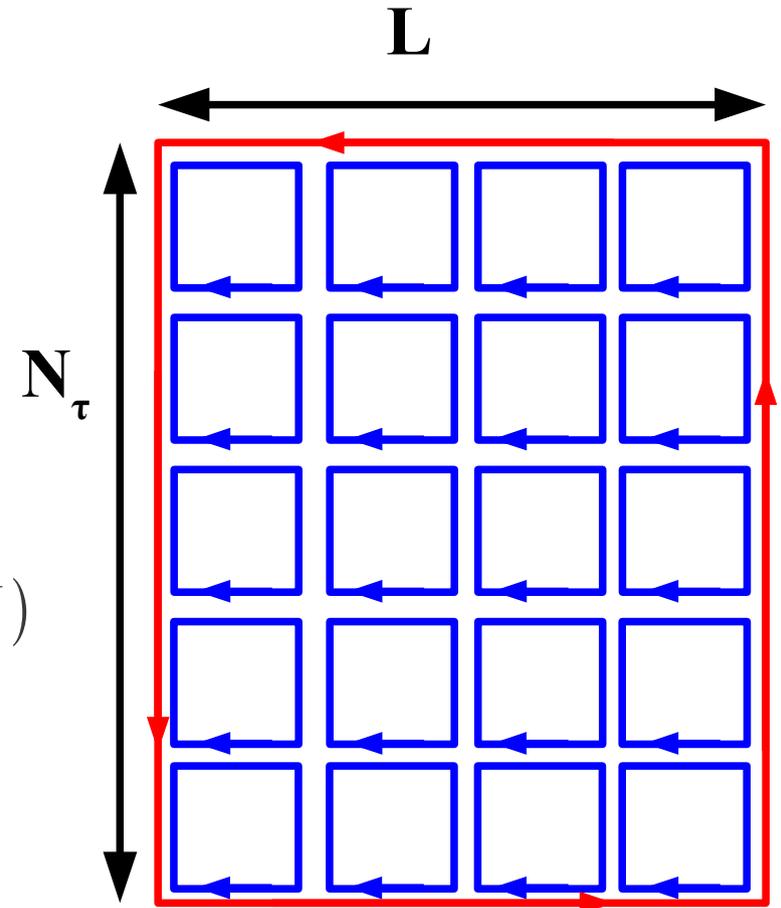
■ 強結合極限での評価

$$\langle W(C=L \times N_\tau) \rangle = \int DU W(C) \exp \left[\frac{1}{g^2} \sum_P \text{tr}(U_P + U_P^+) \right]$$

- リンク変数が残っていると積分して0。
→ Wilson loop に含まれるすべてのリンクを plaquette からのリンクと組み合わせて消す必要がある。
- 結合が強いとき、できるだけ少ない数の plaq. で消すには、Wilson loop を平面的に plaq. で埋めればよい。

$$\langle W(C) \rangle = N \left(\frac{1}{g^2 N} \right)^{LN_\tau} \rightarrow V(L) = L \log(g^2 N)$$

強結合極限では面積則
→ クォークの閉じ込め



K.G. Wilson, PRD10('74),2445

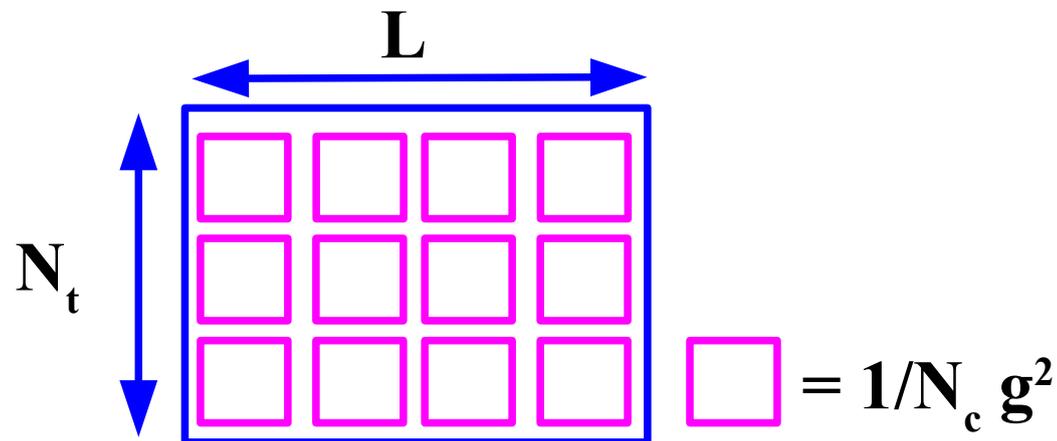
Strong Coupling Lattice QCD: Pure Gauge

■ Quarks are confined in Strong Coupling QCD

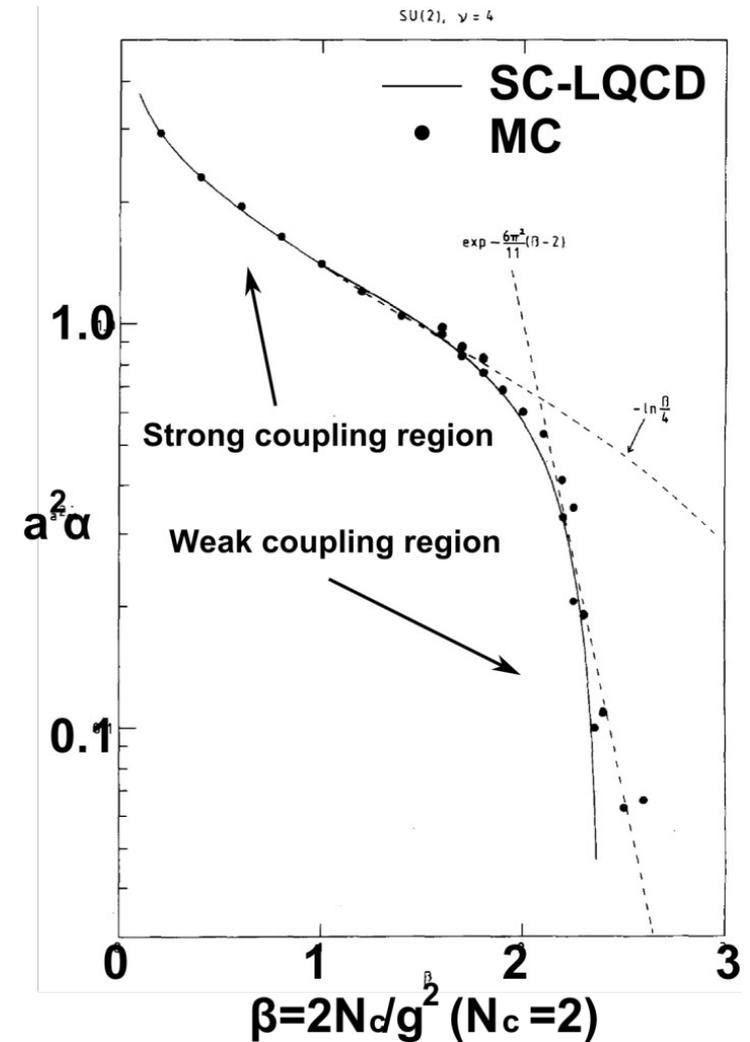
- Strong Coupling Limit (SCL)
 - Fill Wilson Loop with Min. # of Plaquettes
 - Area Law (Wilson, 1974)

$$S_{\text{LQCD}} = -\frac{1}{g^2} \sum_{\square} \text{tr} [U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}]$$

- Smooth Transition from SCL to pQCD in MC (Creutz, 1980; Munster 1980)



K. G. Wilson, PRD10(1974),2445
M. Creutz, PRD21(1980), 2308.
G. Munster, (1980, 1981)



Munster, '80

Fermions on the Lattice

■ Fermion action (Euclidean)

$$S_{q, \text{cont}} = \int d^4 x \bar{q} (-i \gamma_\mu D_\mu + m) q, \quad D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu$$

■ 格子上の action → Link 変数の利用

$$S_{F, \text{lat}} = a^4 \sum_x \left[\sum_\mu \frac{\left(\bar{q}(x) \Gamma_\mu U_{x, \mu} q(x + \hat{\mu}) - \bar{q}(x + \hat{\mu}) \Gamma_\mu U_{x, \mu}^+ q(x) \right)}{2a} + m \bar{q}(x) q(x) \right]$$

● q, U の変換性からゲージ不変

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad U_{x, \mu} \rightarrow V(x) U_{x, \mu} V^+(x + \hat{\mu})$$

● 連続極限で $S_{q, \text{cont}} \hat{=}$

$$U = 1 + i A_\mu a, \quad S_{F, \text{lat}} \rightarrow a^4 \sum_x \bar{q}(x) \left[\Gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i A_\mu \right) + m \right] q(x)$$

$$\Gamma_\mu = -i \gamma_\mu$$

これ以降、 Γ を γ , $x_4 \rightarrow x_0$ とします。

Fermions on the Lattice (cont.)

- 一見よさそうだが、問題点が ... → ダブラー
自由場の場合、Fermion の hopping matrix を Fourier 変換すると

$$D = i \Gamma_{\mu} \frac{\sin(p_{\mu} a)}{a} \quad (p_{\mu} = 2\pi n_{\mu} / La, n_{\mu} = 0, 1, \dots, L-1)$$

(3+1) 次元格子上で、D は 16 回 0 となる。($p_{\mu} = 0, \pi/a$)
→ 低エネルギーで現れる Fermion の種類が 16 倍増える。

- Nielsen-Ninomiya の定理

「適当な仮定 (平行移動不変性、カイラル対称性、局所性、エルミート性、双線形性) を満たす格子 Fermion にはダブラーが存在する」

- 解決方法

- Wilson Fermion : $a \rightarrow 0$ でダブラーが無限に重くなるように 2 階微分に対応する項を加える。(カイラル対称性がない)
- Domain wall Fermion, Overlap Fermion, ...
- Staggered (Kogut-Susskind) Fermion

Staggered Fermion

- Staggered Fermion : Spinor 構造・ γ 行列を数因子 η で表せる。

$$\chi = \gamma_3^{x_3} \gamma_2^{x_2} \gamma_1^{x_1} \gamma_0^{x_0} q$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x + \hat{\mu}) &= \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \gamma_2^{x_2} \gamma_1^{x_1} \gamma_0^{x_0} \gamma_\mu \gamma_0^{x_0} \cdots \gamma_\mu^{x_\mu+1} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x + \hat{\mu}) \\ &= \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \cdots \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \gamma_\mu^{2x_\mu+2} \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x + \hat{\mu}) = \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \chi(x + \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1}}$$

- Lattice action with staggered Fermion

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x + \hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x + \hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

Fermion の 4 成分が全て等価。1 成分のみを考えてよい。

→ 16 個のダブラーが、(Dirac Fermion で) 4 つのダブラーとなる。

- カイラル変換 : χ, χ^{bar} について同じ、隣り合った χ で逆の位相

$$\chi_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \chi_x, \quad \bar{\chi}_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \bar{\chi}_x, \quad \varepsilon(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

→ 厳密なカイラル対称性をもつ

Lattice QCD with staggered Fermion

■ Lattice QCD action with (unrooted) staggered Fermion

$$S_{LQCD} = S_F + S_G$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

$$S_G = -\frac{1}{g^2} \sum_{\text{plaq.}} \text{tr} \left[U_P + U_P^+ \right]$$

- Spinor 構造が simple(無い) → 解析的・数値的な計算が簡単
- $m=0$ (chiral limit) で厳密な chiral 対称性をもつ
→ カイラル相転移の議論が可能
- 連続領域 ($g \rightarrow 0, a \rightarrow 0$) では $N_f=4$ だが、有限の a ではフレーバー対称性は破れている。
- Chiral anomaly ($U(1)_A$) については controversial

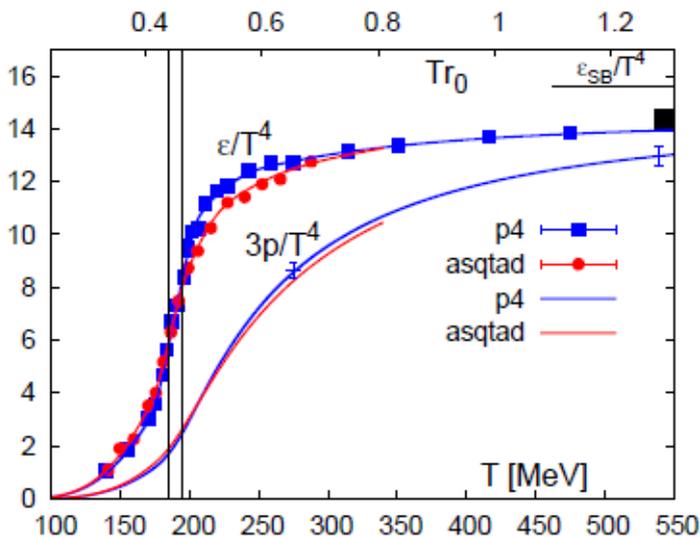
Monte-Carlo simulation in Lattice QCD

■ 分配関数 (or 生成汎関数)

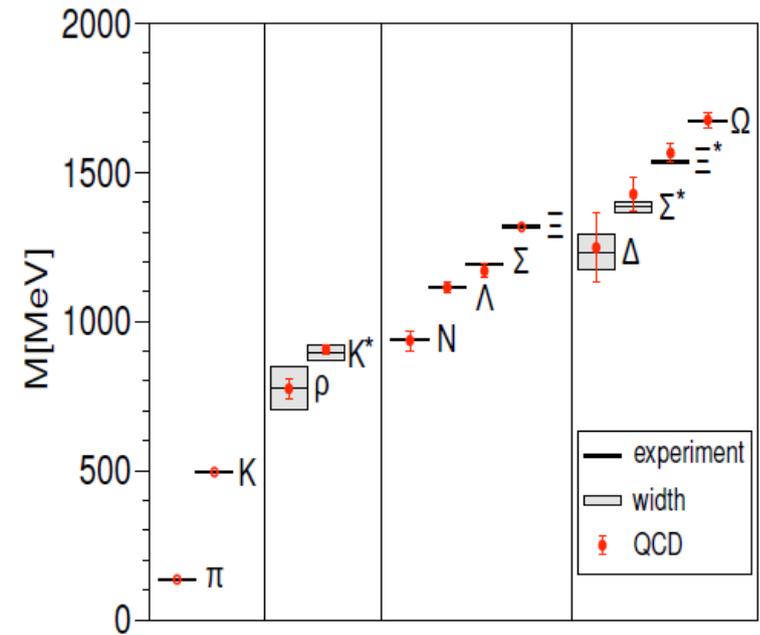
$$S = S_G(U) + \bar{q} D q, \quad Z[J] = \int DU \det D(U) \exp[-S_G(U) + J \hat{O}]$$

$$\rightarrow \langle O \rangle = \frac{\int DU \det D(U) O(U) \exp[-S_G(U)]}{\int DU \det D(U) \exp[-S_G(U)]} = \frac{\delta Z[J]}{\delta J}$$

- Monte-Carlo 法では、通常先に Fermion determinant を評価し、リンク変数の配位を MC 法で求める。クォークを含む演算子の場合には、propagator をあらわに評価。



Hot QCD (2009)



BMW collaboration, Science 322(2008)1224

■ 格子 QCD

- リンク変数の導入により、完全なゲージ対称性を保持。
- グルーオン作用 : Plaquette (プラケット) 作用 (or its improved ver.)
→ 連続極限 ($a \rightarrow 0$) で連続理論のゲージ作用
- クォーク作用 : リンク変数を用いてゲージ対称性を保てる。

■ Monte-Carlo simulation

- 非摂動的 QCD を厳密に解く第一原理計算。
- 大きな成功 : クォークの閉じ込め、ハドロン質量、QCD 相転移 ($\mu=0$)
- カイラル対称性には多少の問題あり
 - ◆ Staggered fermion: Fast, but ugly ($N_f=4 \rightarrow$ quarter root, anomaly, ...)
 - ◆ Wilson fermion: Explicit chiral symmetry breaking at finite a .
 - ◆ DW/Overlap fermion: large numerical cost.

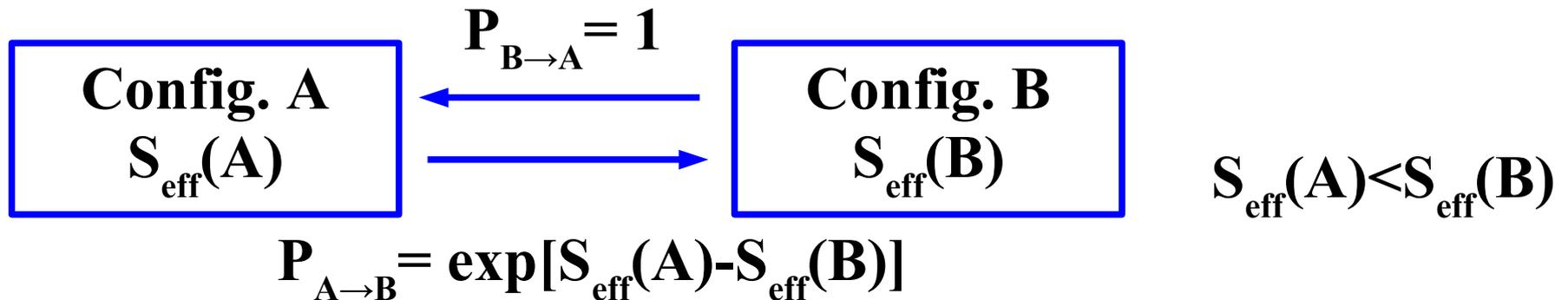
■ 有限密度での格子 QCD MC simulation は残された大きな問題。

- 「大学院生や postdoc に与えてはいけないテーマ」(青木さん)

Monte-Carlo Integral: Importance Sampling

■ Metropolis sampling

= One of the typical (popular) method of importance sampling



● Trial prob.: $P_{A \rightarrow B}^{\text{try}} = P_{B \rightarrow A}^{\text{try}}$ (detailed balance)

● Pickup prob.: According to S_{eff} .

● In equilibrium, $P(A) P_{A \rightarrow B} = P(B) P_{B \rightarrow A} \rightarrow P(A) \propto \exp[-S_{\text{eff}}(A)]$

■ 講義 Sec. 1(b)

● 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

● カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

● 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

● 強結合格子 QCD

- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

● 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

Strong Coupling Lattice QCD

Lattice QCD (1)

QCD Lagrangian

$$L = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m_0) \Psi - \frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

$\psi =$ Quark, $F =$ Gluon tensor, $m_0 =$ (small) quark mass

Lattice Action

$$S_{\text{QCD}} = S_G + S_F + m_0 \bar{\chi} \chi$$

$$S_G = -\frac{1}{g^2} \sum_{P=(x, \mu > \nu)} \text{Tr} [U_P(x) + U_P^+(x)]$$

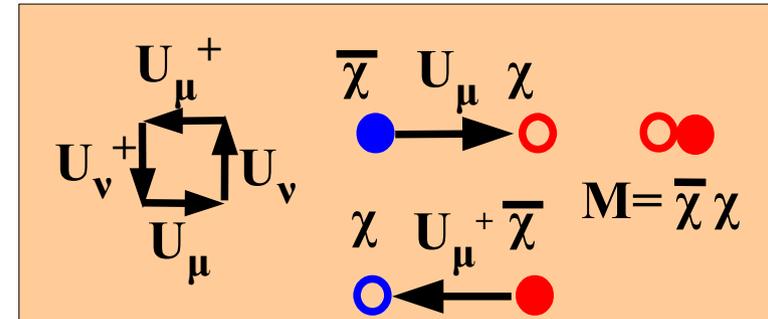
$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \left[\eta_\mu(x) \bar{\chi}_x U_j(x) \chi_{x+\hat{j}} - \eta_\mu^{-1}(x) \bar{\chi}_{x+\hat{j}} U_j^+(x) \chi_x \right]$$

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + \dots + x_{\mu-1}} \quad (\mu > 0), \quad \exp(\mu) \quad (\mu = 0)$$

$\chi =$ staggered fermion (quark)

$U =$ link variable $\in \text{SU}(N_c)$ (gluon),

$\mu =$ quark chemical potential



Lattice QCD (2)

■ Full QCD MC Simulation

→ Monte-Carlo Integral of Det (Fermion Matrix) over links (U)

● Big Task !

Matrix Size= 4 (spinor) x (Color) x (Space-Time Points)

Eigen Values are widely distributed

● Complex Weight with finite μ

$$\int d\bar{\chi} d\chi dU \exp(-S_G + \bar{\chi} A \chi) = \int dU \left| A \right| \begin{array}{c} \updownarrow \\ 4 N_c N_\tau N_s^3 \end{array}$$

■ Quenched QCD

● Assuming Det = 1 ~ Ignoring Fermion Loops

● Works very well for hadron masses

■ *Strong Coupling Lattice QCD (g >> 1)*

● *Pure gluonic action becomes perturbative*

→ Approximate but Analytic evaluation of Fermion Det.

Strong Coupling Expansion

■ 強結合展開 $=1/g^2$ での展開 = プラケット数での展開

- 作用の中で、プラケットに $1/g^2$ の因子がつく。
→ 強結合領域 ($g \gg 1$) では gluon の hopping が抑えられる。
- 強結合展開の手順
 - ◆ 展開の次数を与える、
 - ◆ プラケットの(つながった)配位を与える、
 - ◆ クォーク作用を展開し、リンク積分後に残るプラケットとクォーク・ホップ ($\chi^{\text{bar}} U \chi$) の組み合わせを与える、
 - ◆ リンク積分を実行
 - クォークの有効作用(ゼロ温度の取扱い)空間リンクの積分を実行
 - クォークと時間リンクの有効作用(有限温度の取扱い)
 - ◆ 必要に応じてクォーク間相互作用項をボソン化し、Fermion 行列式を計算、
 - ◆ 時間リンク積分を実行(有限温度の取扱い)、
 - ◆ 導入した補助場について平衡条件を解く。

Strong Coupling Limit

■ 強結合極限 ($g \rightarrow \infty$)

- プラケット項が 0 → **それぞれのリンクを独立に積分可能**

$$Z_{x,\mu} \equiv \int DU_{x,\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\eta_\mu \bar{\chi}_x U_\mu \chi_{x+\hat{\mu}} - \eta_\mu^{-1} \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_\mu^+ \chi_x] \right\}$$

$$= \int DU [1 - \frac{1}{4} (\bar{\chi}_x U_\mu \chi_{x+\hat{\mu}}) (\bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_\mu^+ \chi_x) - \frac{\eta_\mu^3}{48} (\bar{\chi}_x U_\mu \chi_{x+\hat{\mu}})^3 + \dots]$$

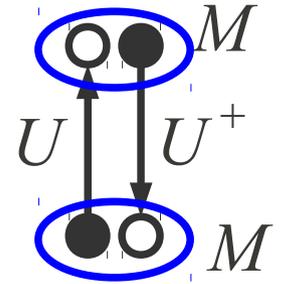
- 4 クォーク項 → 2 体力、6 クォーク項 → 3 体力
→ クォーク数の少ない項を選ぶ (1/d 展開)

$$= [1 - \frac{1}{4 N_c} (\bar{\chi}_x^a \chi_{x+\hat{\mu}}^b) (\bar{\chi}_{x+\hat{\mu}}^b \chi_x^a) + \dots]$$

$$= [1 + \frac{1}{4 N_c} M_x M_{x+\hat{\mu}} + \dots] \quad (M_x = \bar{\chi}_x \chi_x)$$

$$\simeq \exp \left[\frac{1}{4 N_c} M_x M_{x+\hat{\mu}} + \dots \right]$$

→ リンク積分によりハドロンの有効作用へ



$$\frac{1}{2} \eta_{x,\mu} \bar{\chi}_x U_{x,\mu} \chi_{x+\hat{\mu}}$$

$$-\frac{1}{2} \eta_{x,\mu}^{-1} \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_{x,\mu}^+ \chi_x$$

$$m \bar{\chi} \chi$$

Strong Coupling Limit (cont.)

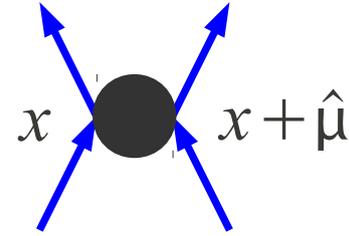
■ 分配関数

$$Z_{\text{SCL}} = \int D\chi D\bar{\chi} \exp(-S_{\text{eff}})$$

$$S_{\text{eff}} = m \sum_x M_x - \frac{1}{4N_c} \sum_{x, \mu} M_x M_{x+\hat{\mu}} = -\frac{1}{2} \sum_{x, y} M_x V_{x, y} M_y + m \sum_x M_x$$

$$V_{x, y} = \frac{1}{4N_c} \sum_{\mu} (\delta_{y, x+\hat{\mu}} + \delta_{y, x-\hat{\mu}})$$

引力



■ Hubbard-Stratonovich transf. (補助場の導入)

$$e^{\frac{1}{2}MVM} = \int D\sigma e^{-\frac{1}{2}(\sigma+M)V(\sigma+M) + \frac{1}{2}MVM} = \int D\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma V \sigma - \sigma V M}$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_{x, y} \sigma_x V_{x, y} \sigma_y + \sum_{x, y} \sigma_x V_{x, y} M_y + m_0 \sum_x M_x$$

■ 平均場近似 $\sigma = \text{const.} \rightarrow$ Fermion 行列式が定数に。

$$F_{\text{eff}} = \frac{1}{2} b_{\sigma} \sigma^2 - \frac{T}{V} \log \det(m_q \mathbf{1}) = \frac{1}{2} b_{\sigma} \sigma^2 - N_c \log(b_{\sigma} \sigma + m_0)$$

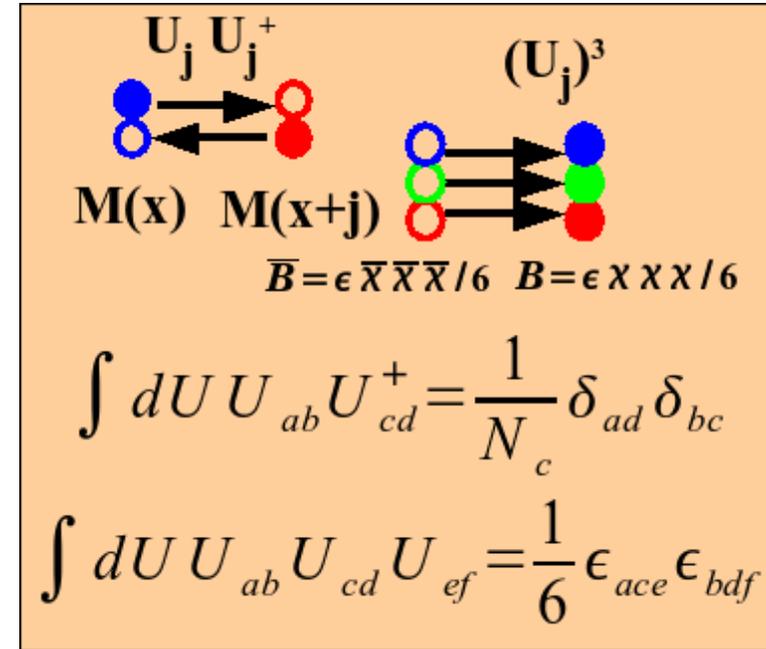
$$(m_q = b_{\sigma} \sigma + m_0, b_{\sigma} = (d+1)/2N_c)$$

SCL-LQCD: Tools (1) --- One-Link Integral

■ Group Integral Formulae

$$\int dU U_{ab} U_{cd}^+ = \frac{1}{N_c} \delta_{ad} \delta_{bc}$$

$$\int dU U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \frac{1}{6} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf}$$



$$\begin{aligned} & \int dU \exp(-a \bar{\chi}(x) U \chi(y) + b \bar{\chi}(y) U^+ \chi(x)) \\ &= \int dU \left[1 - ab \bar{\chi}(x) U_{ab} \chi^b(y) \bar{\chi}^c(y) U_{cd}^+ \chi^d(x) + \dots \right] \\ &= 1 + ab (\chi \bar{\chi})(x) (\chi \bar{\chi})(y) + \dots = 1 + ab M(x) M(y) + \dots \\ &= \exp[ab M(x) M(y) + \dots] \end{aligned}$$

**Quarks and Gluons → One-Link integral
→ Mesonic and Baryonic Composites**

SCL-LQCD: Tools (2) --- 1/d Expansion

- Keep mesonic action to be indep. from spatial dimension d
→ Higher order terms are suppressed at large d .

$$\sum_j (\bar{\chi} U_j \chi) (\bar{\chi} U_j^+ \chi) \rightarrow -\frac{1}{N_c} \sum_j M(x) M(x + \hat{j}) = O(1)$$

$\rightarrow M \propto 1/\sqrt{d}, \chi \propto d^{-1/4}$

$$\sum_j (\bar{\chi} U_j \chi) (\bar{\chi} U_j \chi) (\bar{\chi} U_j \chi) \rightarrow N_c! \sum_j B(x) B(x + \hat{j}) = O(1/\sqrt{d})$$

$$\sum_j (\bar{\chi} U_j \chi)^2 (\bar{\chi} U_j^+ \chi)^2 \rightarrow \sum_j M^2(x) M^2(x + \hat{j}) = O(1/d)$$

*We can stop the expansion in U ,
since higher order terms are suppressed !*

SCL-LQCD: Tools (3) --- Bosonization

- We can reduce the power in χ by introducing bosons

$$\exp\left(\frac{1}{2} M^2\right) = \int d\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma M\right)$$

Nuclear MFA: $V = -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi) \simeq -U(\bar{\Psi}\Psi) + \frac{1}{2}U^2$

$$\exp\left[-\frac{1}{2} M^2\right] = \int d\varphi \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2 - i\varphi M\right]$$

Reduction of the power of χ
→ Bi-Linear form in χ → Fermion Determinant

SCL-LQCD: Tools (4) --- Grassman Integral

- **Bi-linear Fermion action leads to $-\log(\det A)$ effective action**

$$\int d\chi d\bar{\chi} \exp[\bar{\chi} A \chi] = \det A = \exp[-(-\log \det A)]$$

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. constant} = 0 \quad , \quad \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. constant} \equiv 1$$

$$\int d\chi d\bar{\chi} \exp[\bar{\chi} A \chi] = \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!} (\bar{\chi} A \chi)^N = \dots = \det A$$

Constant $\sigma \rightarrow -\log \sigma$ type potential

Effective Potential in SCL-LQCD

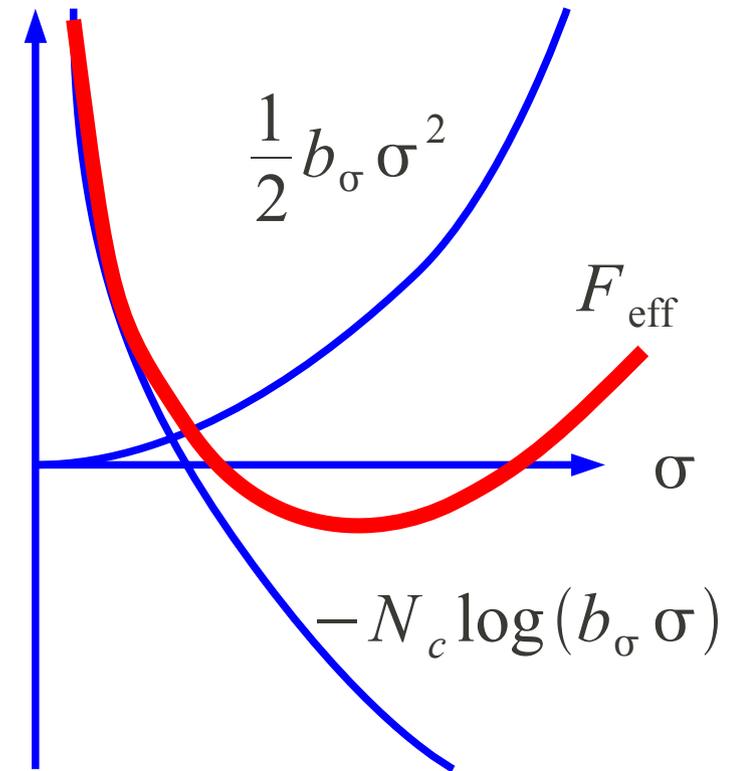
Effective potential

$$F_{\text{eff}} = \frac{1}{2} b_{\sigma} \sigma^2 - N_c \log(b_{\sigma} \sigma + m_0)$$

ギャップ方程式 (カイラル極限 $m_0=0$)

$$\frac{\partial F_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = b_{\sigma} \sigma - \frac{N_c}{\sigma} = 0 \rightarrow \sigma = N_c \sqrt{\frac{2}{d+1}}$$

- 強結合極限の簡単な取扱い
($1/d$ 展開、zero T treatment、
平均場近似) において、カイラル対称性が
自発的に破れることが示された。



Kawamoto, Smit, 1981

Strong coupling limit lattice QCD は、
クォークの閉じ込め、カイラル対称性の自発的破れ
という非摂動的 QCD の 2 大側面を解析的に説明する

Effective Potential in SCL-LQCD (Zero T)

Effective Pot. at Zero T

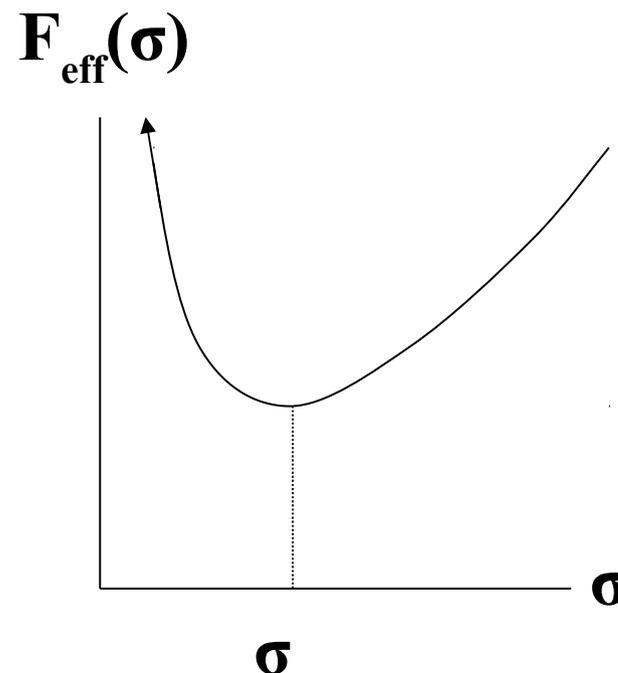
Kawamoto, Smit, 1981

Kluberg-Stern, Morel, Napoly, Petersson, 1981

$$F_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{1}{2} b_{\sigma} \sigma^2 - N_c \log \sigma$$

Spontaneous Chiral Symmetry breaking at $T=0$ is naturally explained !

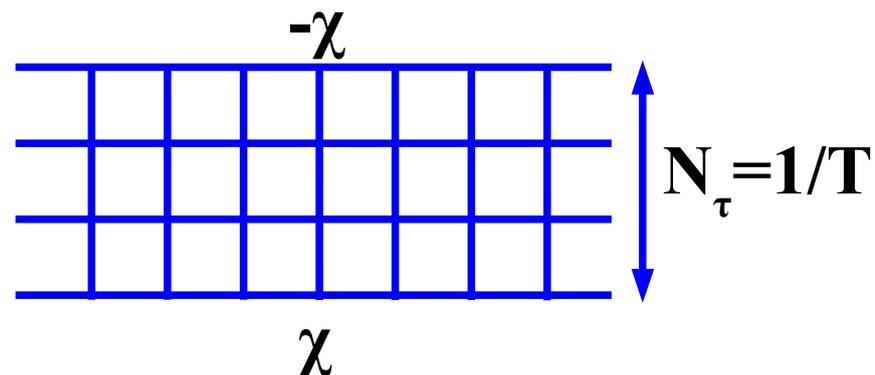
No Phase Transition ?



Grassman integral at each space-time point in Zero T treatment

→ “Temporal” Correlation and Anti-periodic Boundary Cond. would be important at Finite T !

Let's go to Finite T



Strong Coupling Lattice QCD: Finite T treatment

- 松原振動数和の性質から分かるように、時間方向の境界条件（Boson の周期境界条件、Fermion についての反周期境界条件）は大切だが、Zero T treatment では取り入れられない。

- Finite T treatment

Damgaard, Kawamoto, Shigemoto, 1984; Bilic et al., 1992; Nishida, '04; Fukushima, '04; Kawamoto, Miura, AO, Ohnuma, '07;

- 時間方向のリンクを残し、反周期境界条件を取り入れてフェルミオン行列式を評価する。
- 空間リンク積分、ボソン化後の有効作用

$$S_F^{(t)} = \frac{1}{2} \sum_x \left(e^\mu \bar{\chi}_x U_0(x) \chi_{x+\hat{0}} - e^{-\mu} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^+(x) \chi_x \right) = \bar{\chi} V^{(t)} \chi$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \sigma_x V_M(x,y) \sigma_y + \sum_{x,\tau,\tau'} \bar{\chi}_{x,\tau} \underbrace{(V^{(t)} + m_q)}_{\equiv D} \chi_{x,\tau'}$$

$$m_q = V_M \sigma + m_0$$

- $N_c \times N_\tau$ 行列の行列式を求める必要がある。

SC-LQCD: Finite T (cont.)

Fermion determinant (Temporal gauge)

$$D = \begin{vmatrix} I_1 & e^\mu & 0 & & e^{-\mu} U^+ \\ -e^{-\mu} & I_2 & e^\mu & & \\ 0 & -e^{-\mu} & I_3 & e^\mu & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -e^\mu U & & -e^{-\mu} & & I_N \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} N_c \times N_\tau \quad X_N = \begin{vmatrix} I_1 & e^\mu & 0 & & 0 \\ -e^{-\mu} & I_2 & e^\mu & & \\ 0 & -e^{-\mu} & I_3 & e^\mu & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & -e^{-\mu} & I_N \end{vmatrix}$$

$$\det D = \det \left[\underbrace{X_N \otimes \mathbf{1}_c}_{\text{magenta}} + \underbrace{e^{-\mu/T} U^+}_{\text{blue}} + \underbrace{(-1)^{N_\tau} e^{\mu/T} U}_{\text{red}} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} N_c \quad I_k = 2 m_q(\mathbf{x}, \tau_k)$$

For constant σ , X_N is obtained as

$$X_N = \exp(E_q/T) + (-1)^{N_\tau} \exp(-E_q/T)$$

$$E_q = \text{arcsinh}(m_q)$$

$$\rightarrow \det D = \frac{\sinh((N_c + 1)E_q/T)}{\sinh(E_q/T)} + 2 \cosh(N_c \mu/T)$$

Fermion Determinant

Faldt, Petersson, 1986

- Fermion action is separated to each spatial point and bi-linear
 → Determinant of $N_\tau \times N_c$ matrix

$$\exp(-V_{\text{eff}}/T) = \int dU_0 \begin{vmatrix} I_1 & e^\mu & 0 & & e^{-\mu} U^+ \\ -e^{-\mu} & I_2 & e^\mu & & \\ 0 & -e^{-\mu} & I_3 & e^\mu & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -e^\mu U & & & -e^{-\mu} & I_N \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} N_c \times N_\tau$$

$$= \int dU_0 \det \left[\underline{X_N[\sigma] \otimes \mathbf{1}_c} + \underline{e^{-\mu/T} U^+} + \underline{(-1)^{N_\tau} e^{\mu/T} U} \right] \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} N_c$$

$$= X_N^3 - 2 X_N + 2 \cosh(3 N_\tau \mu)$$

$$I_\tau/2 = [\sigma(x) + i\varepsilon(x)\pi(x)]/2 N_c \gamma^2 + m_0/\gamma$$

$$X_N = B_N + B_{N-2}(2; N-1)$$

$$B_N = I_N B_{N-1} + B_{N-2}$$

$$B_N = \begin{vmatrix} I_1 & e^\mu & 0 & & \\ -e^{-\mu} & I_2 & e^\mu & & \\ 0 & -e^{-\mu} & I_3 & e^\mu & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -e^{-\mu} & & & & I_N \end{vmatrix}$$

Effective Potential in SCL-LQCD: Finite T treatment

■ Effective potential

Damgaard, Kawamoto, Shigemoto ('84); Faldt, Petersson ('86); Bilic, Karsch, Redlich ('92); Fukushima ('04); Nishida ('04)

$$F_{\text{eff}} = F_{\text{eff}}^{\text{Aux.}} - \frac{T}{V} \log \det D = \frac{1}{2} b_{\sigma} \sigma^2 + V_q(m_q; \mu, T)$$

$$V_q = -T \log \left[\frac{\sinh((N_c + 1) E_q / T)}{\sinh(E_q / T)} + 2 \cosh(N_c \mu / T) \right]$$

$$E_q = \text{arcsinh}(m_q), \quad m_q = b_{\sigma} \sigma + m_0, \quad b_{\sigma} = d / 2 N_c$$

- 強結合極限の有限温度の取扱い (1/d 展開、平均場近似) において、
 - ◆ 低温・低密度でカイラル対称性が自発的に破れ、
 - ◆ 高温 or 高密度で回復することが示された。

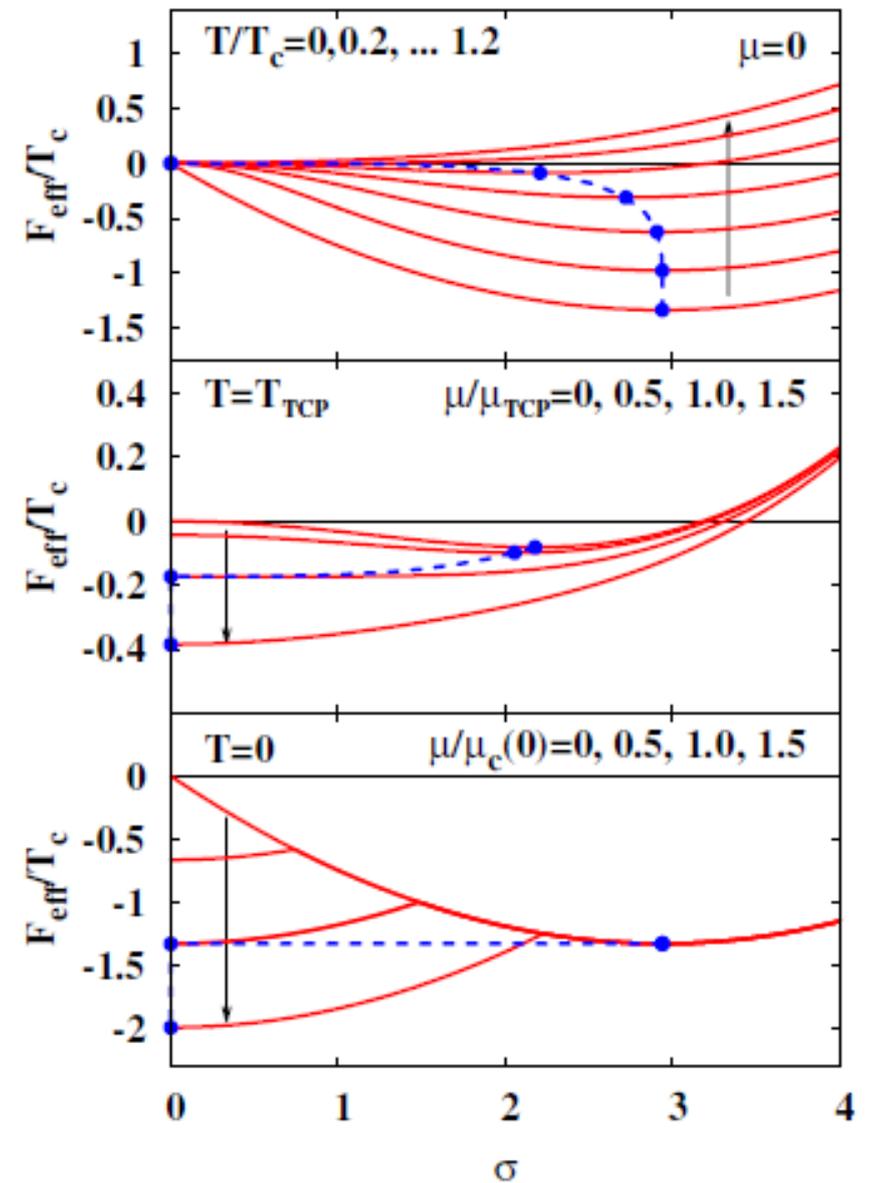
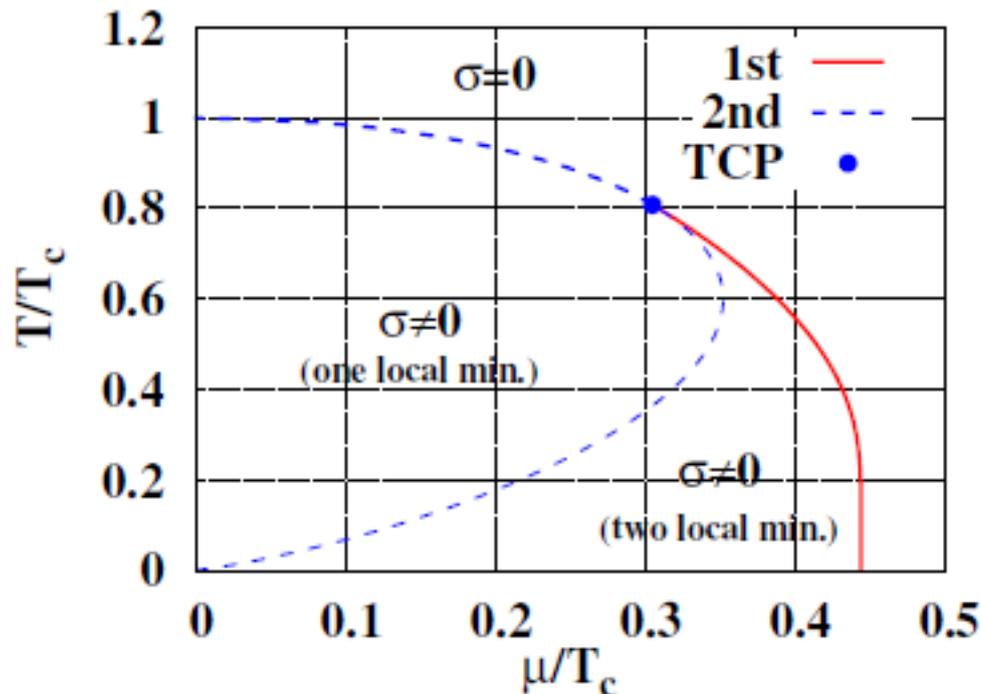
Strong coupling limit lattice QCD(Finite T treatment)
→ QCD に基づく QCD 相図研究を可能にした。

Eff. Pot. in SCL-LQCD (Finite T) (cont.)

What can we discuss by using F_{eff} ?

- Behavior of F_{eff} at finite T and μ
- Phase diagram

Note: These are the results with staggered fermion !



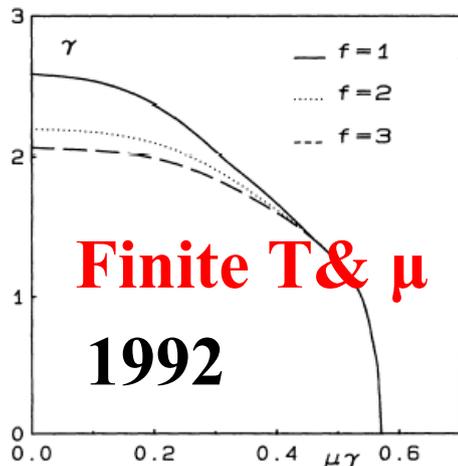
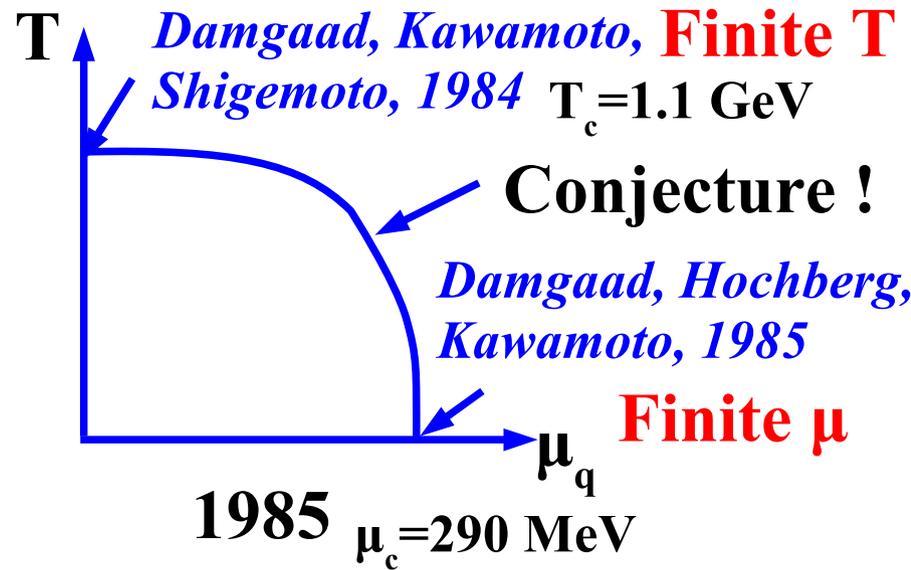
Kawamoto, Miura, Ohnishi, Ohnuma ('07)

Evolution of Phase Diagram

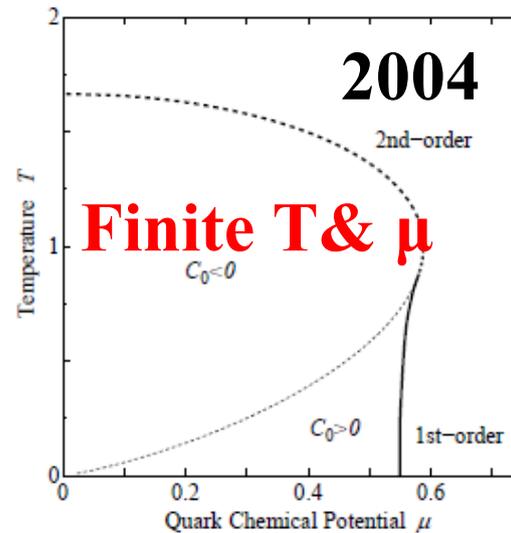
- Phase Diagram “Shape” becomes closer to that of Real World,

$$R = 3 \mu_c / T_c \sim (6-12)$$

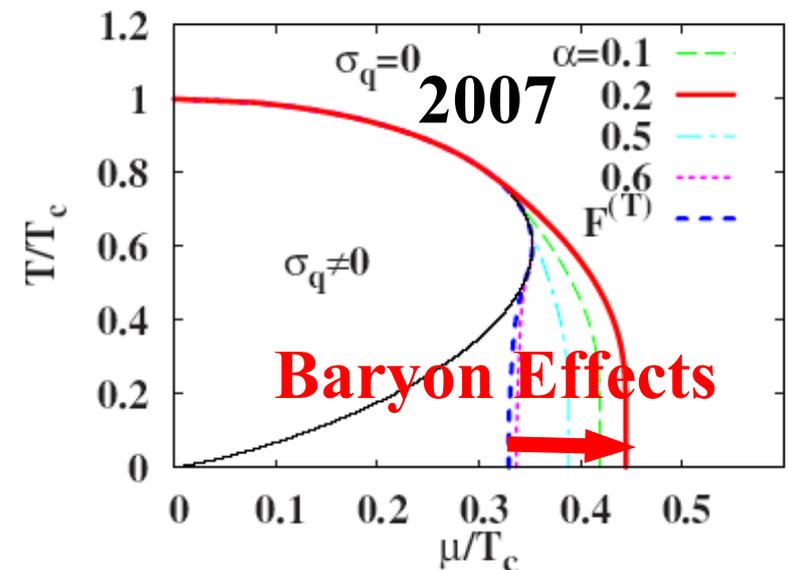
- 1985 → $R=0.79$ (Zero T / Finite T)
- 1992 → $R=0.83$ (Finite T & μ)
- 2004 → $R=0.99$ (Finite T & μ)
- 2007 → $R=1.34$ (Baryon)



Bilic, Karsch, Redlich, 1992



Fukushima, 2004



Kawamoto, Miura, AO, Ohnuma, 2007

強結合極限格子 QCD: Short Summary

- Strong coupling limit of lattice QCD (SCL-LQCD)
 - SCL-LQCD describes
“confinement of quarks”
and
“Spontaneous breaking and restoration of chiral symmetry”
analytically based on QCD (with staggered fermion).
- しかしながら、多くの問題を孕んでいる。
 - 連続領域で $N_f=4$ となる staggered Fermion による記述。
 - 有限結合効果は無視。また $1/d$ 展開の主要項のみ、かつ一様・静的な平均場近似。
 - 現象論的な立場からは、 $N_c \mu_c / T_c \sim 1$ 程度と小さいことは大きな問題。
($T_c = 200 \text{ MeV}$ とすると、 $N_c \mu_c = 200 \text{ MeV} \ll M_N$
→ 原子核が作れない。(Baryon mass puzzle))
- 有限結合効果

*Finite Coupling and Polyakov loop Effects
on the QCD Phase Diagram*

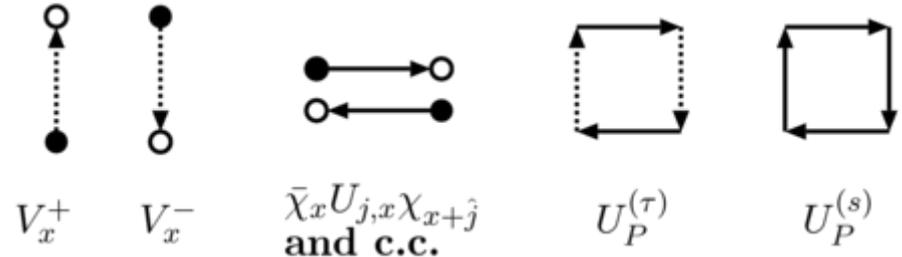
Towards the phase diagram in the real world

- Fermion を含む場合、強結合極限 (Strong coupling limit; SCL) では大きな成功を収めたが ...
 - 強結合極限 ($g \rightarrow \infty$)
 - Staggered fermion (連続領域で $N_f \rightarrow 4$)
 - 解析的な計算では Large d 近似 ($1/d$ 展開の LO) + 平均場近似
 - Polyakov loop (非閉じ込め相転移の秩序変数) を含まない
→ 非閉じ込め相転移が記述できない
 - バリオン質量問題 ($N_c \mu_c < M_N$; 核物質ができる前に相転移)
 - 有限結合効果・ポリアコフループ効果を含む強結合格子 QCD
 - NLO ($1/g^2$): Miura, Nakano, AO, Kawamoto, PRD80('09), 074034.*
 - NNLO ($1/g^4$): Nakano, Miura, AO, PTP123('10)825.*
 - Polyakov loop: Nakano, Miura, AO, arXiv:1009.1518*
Miura, Nakano, AO, Kawamoto (LAT10)
- 現実の QCD 相図の理解に向けた研究の進展

Strong Coupling Lattice QCD

■ Lattice QCD action

$$S_{LQCD} = \frac{1}{2} \sum_x [V_x^+ - V_x^-] + m_0 \sum_x M_x + \frac{1}{2} \sum_{x,j} \eta_{j,x} (\bar{\chi}_x U_{j,x} \chi_x - \bar{\chi}_{x+j} U_{j,x}^+ \chi_x) + \frac{1}{g^2} \sum_P (U_P + U_P^+)$$



Mesonic composites

$$M_x = \bar{\chi}_x \chi_x, \quad V_x^+ = e^\mu \bar{\chi}_x U_{0,x} \chi_{x+\hat{0}}, \quad V_x^- = e^{-\mu} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_{0,x}^+ \chi_x$$

■ Effective Action & Effective Potential (free energy density)

$$\begin{aligned} Z &= \int D[\chi, \bar{\chi}, U_0, U_j] \exp(-S_{LQCD}) \\ &= \int D[\chi, \bar{\chi}, U_0] \exp(-S_{SCL}) \langle \exp(-S_G) \rangle \quad (U_j \text{ integral}) \\ &\approx \int D[\chi, \bar{\chi}, U_0] \exp(-S_{\text{eff}}[\chi, \bar{\chi}, U_0, \Phi_{\text{stat.}}]) \quad (\text{bosonization}) \\ &\approx \exp(-V F_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu)/T) \quad (\text{fermion} + U_0 \text{ integral}) \end{aligned}$$

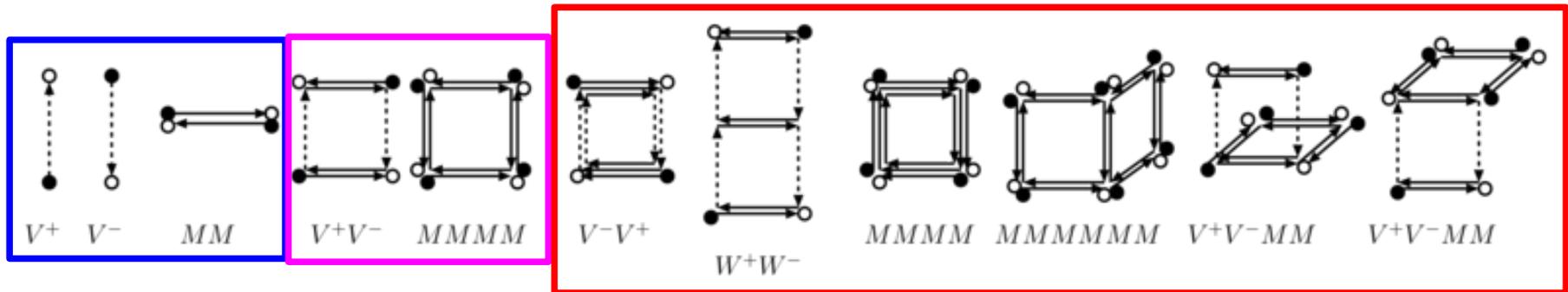
Finite Coupling Effects

Effective Action with finite coupling corrections

Integral of $\exp(-S_G)$ over spatial links with $\exp(-S_F)$ weight $\rightarrow S_{\text{eff}}$

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{SCL}} - \log \langle \exp(-S_G) \rangle = S_{\text{SCL}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_G^n \rangle_c$$

$\langle S_G^n \rangle_c = \text{Cumulant (connected diagram contr.)}$ *c.f. R.Kubo('62)*



$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_x (V_x^+ - V_x^-) - \frac{b_\sigma}{2d} \sum_{x,j>0} [MM]_{j,x}$$

SCL (Kawamoto-Smit, '81)

$$+ \frac{1}{2} \frac{\beta_\tau}{2d} \sum_{x,j>0} [V^+V^- + V^-V^+]_{j,x} - \frac{1}{2} \frac{\beta_s}{d(d-1)} \sum_{x,j>0, k>0, k \neq j} [MMMM]_{jk,x}$$

NLO (Faldt-Petersson, '86)

$$- \frac{\beta_{\tau\tau}}{2d} \sum_{x,j>0} [W^+W^- + W^-W^+]_{j,x} - \frac{\beta_{ss}}{4d(d-1)(d-2)} \sum_{x,j>0, |k|>0, |l|>0, |k| \neq j, |l| \neq j, |l| \neq |k|} [MMMM]_{jk,x} [MM]_{j,x+\hat{l}}$$

$$+ \frac{\beta_{\tau s}}{8d(d-1)} \sum_{x,j>0, |k| \neq j} [V^+V^- + V^-V^+]_{j,x} \left([MM]_{j,x+\hat{k}} + [MM]_{j,x+\hat{k}+\hat{0}} \right)$$

NNLO (Nakano, Miura, AO, '09)

■ Cumulant 展開

$$\langle e^{-S_G} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_G^n \rangle = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_G^n \rangle_c \right]$$

■ Connected diagrams での展開

$$\langle S_G^n \rangle = \sum_{\text{partition } \alpha} \prod \langle S_G^{n_\alpha} \rangle_c = \langle S_G \rangle_c^n + \frac{n!}{2!(n-2)!} \langle S_G \rangle_c^{n-2} \langle S_G^2 \rangle_c + \cdots + \langle S_G^n \rangle_c$$

- 第一項 $\rightarrow (\text{Volume})^n \rightarrow \exp$ の肩に乗せると NLO 項
- 最後の項 $\rightarrow (\text{Volume})^1 \rightarrow$ 他の項にくらべて小さい
 \rightarrow 強結合展開 \sim クラスタ展開

$$\frac{1}{n!} \langle S_G^n \rangle = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \langle S_G \rangle^{k_1} \frac{\langle S_G^2 \rangle_c^{k_2}}{2!} \frac{\langle S_G^3 \rangle_c^{k_3}}{3!} \cdots \frac{\langle S_G^n \rangle_c^{k_n}}{n!}$$

$$\langle \exp(S_G) \rangle = \sum \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \langle S_G \rangle^{k_1} \frac{\langle S_G^2 \rangle_c^{k_2}}{2!} \frac{\langle S_G^3 \rangle_c^{k_3}}{3!} \cdots \frac{\langle S_G^n \rangle_c^{k_n}}{n!} = \exp \left[\sum_k \frac{\langle S_G^k \rangle_c}{k!} \right]$$

Finite Coupling Effects (cont.)

■ 拡張された Hubbard-Stratonovich (EHS) 変換

- 異なる Composite の積の分解が可能

Miura, Nakano, AO (09), Miura, Nakano, AO, Kawamoto (09)

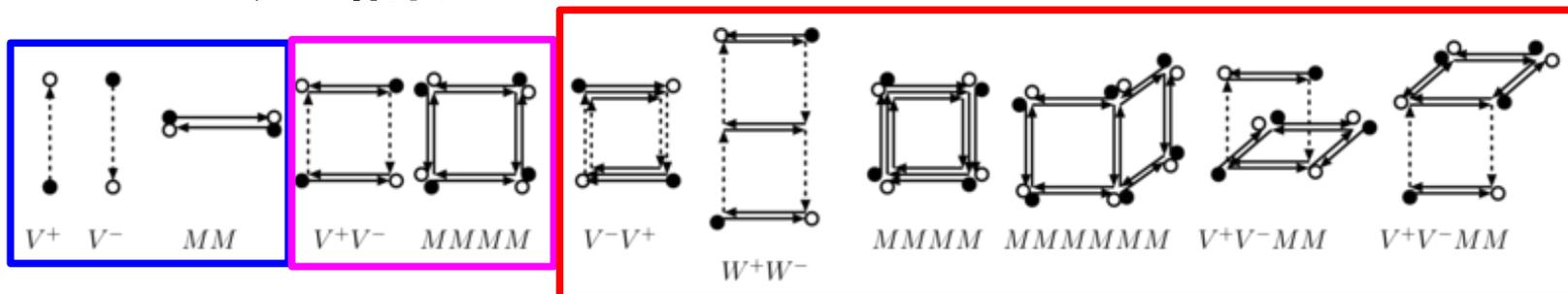
$$\exp(\alpha A B)$$

$$= \int d\varphi d\phi \exp[-\alpha(\varphi^2 - (A+B)\varphi + \phi^2 - i(A-B)\phi)]$$

$$\approx \exp[-\alpha(\bar{\psi}\psi - A\psi - \bar{\psi}B)]_{\text{stationary}}$$

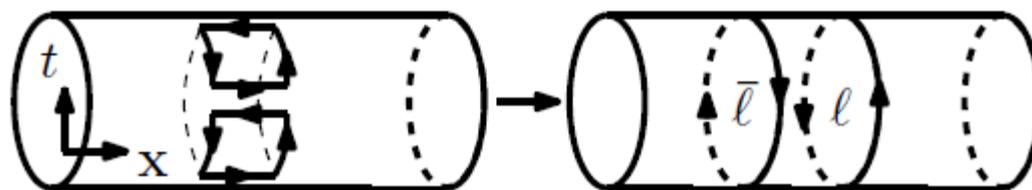
■ 有限結合定数効果

- 波動関数繰り込み定数の変化 (時間方向の hopping が変化)
- 有効クォーク質量の変化 (4 Fermi + 8 Fermi + 12 Fermi)
- 有効化学ポテンシャルの変化 (ベクトル的な平均場)
- ベクトル・スカラー結合



Polyakov loop effects in SC-LQCD

■ Polyakov Loop



$$P = \frac{1}{N_c} \text{tr} L, \quad L = T \exp \left[-i \int_0^\beta dx_4 A_4 \right] = T \prod_{\tau=1}^{N_\tau} U_0(\tau, \mathbf{x})$$

- Order parameter of the deconfinement transition in the heavy quark mass limit.

A.M. Polyakov, PLB72('78),477; L. Susskind, PRD20('79)2610; B. Svetitsky, Phys.Rept.132('86),1.

- Interplay between PL and χ cond. is known to be important in effective models

A. Gocksch, M. Ogilvie, PRD31(85)877; K. Fukushima, PLB591('04),277.

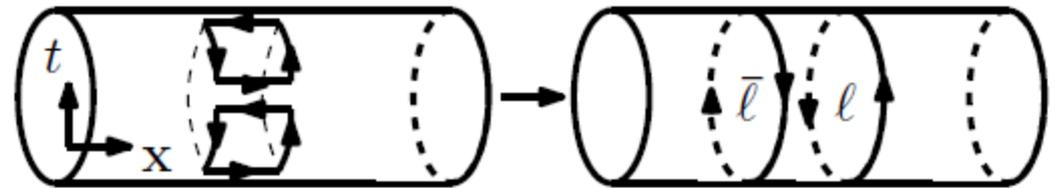
*Polyakov loop will definitely affect QCD phase transition.
→ Let's evaluate its effects in SC-LQCD*

Effective action with Polyakov loop

■ Polyakov Loop action in the leading order of $1/g^2$

- After integrating out plaquette action over spatial links, we get

$$\Delta S_p = - \left(\frac{1}{g^2 N_c} \right)^{N_\tau} N_c^2 \sum_{\mathbf{x}, j > 0} \left[\bar{P}_x P_{x+\hat{j}} + \text{h.c.} \right] \quad (\text{LO in SC expansion})$$



- Polyakov loop coupling with

$$\begin{aligned} Z &\sim \prod_{\mathbf{x}} \int dL(\mathbf{x}) e^{-\Delta S_p} \det_c \left[1 + L e^{-(E_q - \tilde{\mu})/T} \right] \left[1 + L^+ e^{-(E_q + \tilde{\mu})/T} \right] \\ &= \prod_{\mathbf{x}} \int dP d\bar{P} H(P, \bar{P}) e^{-\Delta S_p} \left[1 + N_c P e^{-(E_q - \tilde{\mu})/T} + N_c \bar{P} e^{-2(E_q - \tilde{\mu})/T} + e^{-3(E_q - \tilde{\mu})/T} \right] \\ &\quad \times \left[1 + N_c \bar{P} e^{-(E_q + \tilde{\mu})/T} + N_c P e^{-2(E_q + \tilde{\mu})/T} + e^{-3(E_q + \tilde{\mu})/T} \right] \end{aligned}$$

Finite Polyakov loop l enables one- and two-quark excitation

■ 化学ポテンシャル・グルーオンと Fermion の結合

$$\bar{q} \gamma^0 (igA_0 + \mu) q$$

→ gA_0 は化学ポテンシャルの虚部とみなせる！

$$\exp(\mu/T) \rightarrow \exp[(\mu + i g A_0)/T] = e^{\mu/T} \exp\left[i \int_0^\beta g A_0 d\tau\right]$$

■ ボルツマン・ファクターへの影響

$$L = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2), \exp(i\theta_3)) \quad (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0)$$

$$\rightarrow \det(1 + L \exp(-(E - \mu)/T))$$

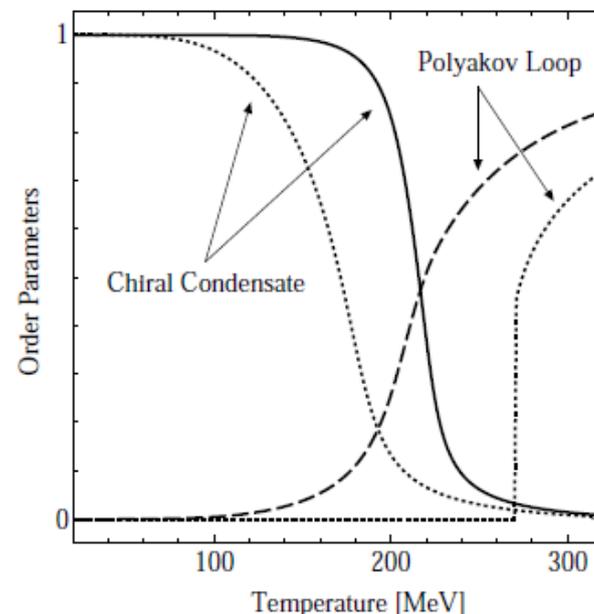
$$= \prod_{k=1}^3 [1 + \exp(-X + i\theta_k)] = 1 + N_c l e^{-X} + N_c \bar{l} e^{-2X} + e^{-3X}$$

$$(X = (E - \mu)/T)$$

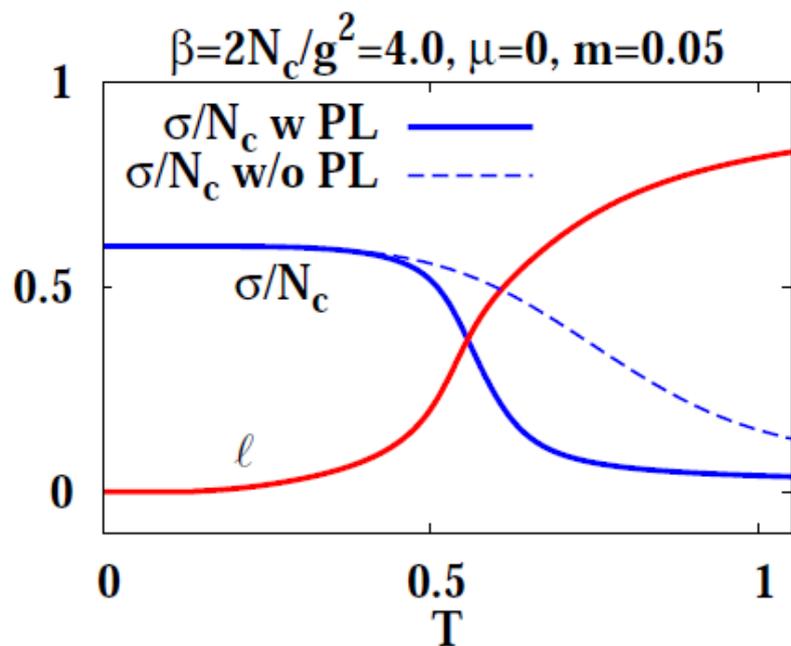
→ 有限のポリアコフ・ループは1クォーク、2クォークの励起を許す

Chiral condensate and Polyakov loop

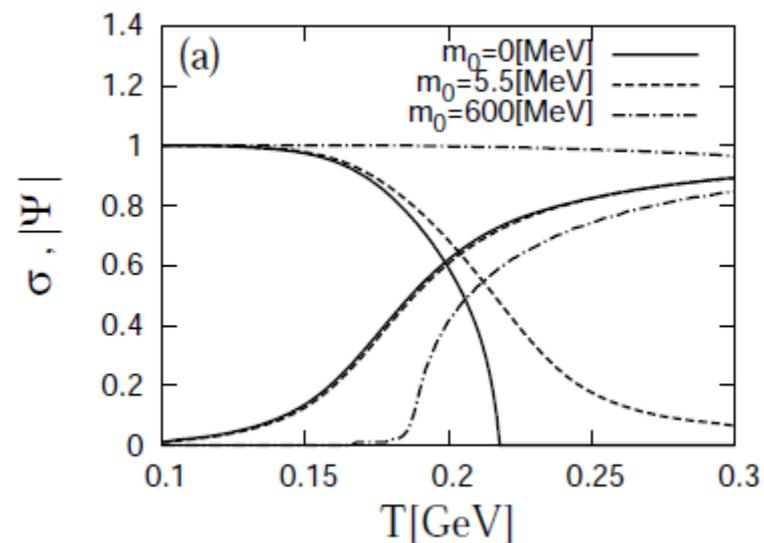
- Chiral and Deconf. transition correlate !
- SC-LQCD w/o PL: quarks are confined.
→ PL promote quarks to deconfine !
(cf. Quarks are *not* confined in NJL
→ PL *confines* quarks in PNJL.)
- T_c is suppressed with PL



Fukushima ('04)



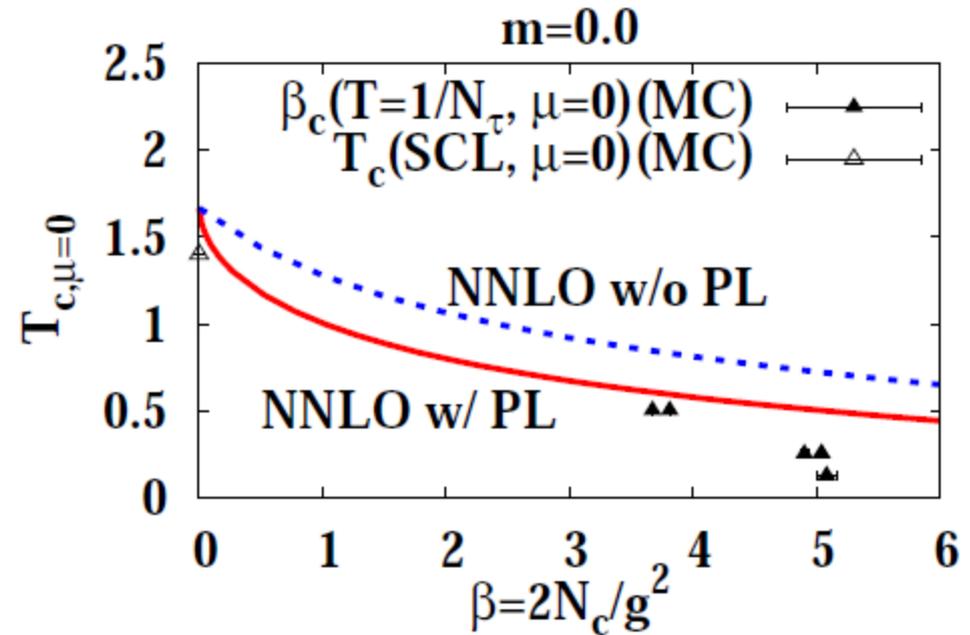
Nakano, Miura, AO, Lat10 & in prep.



Sakai, Kashiwa, Kouno, Yahiro ('08)

Critical Temperature at $\mu=0$

- SC-LQCD w PL seems to be qualitatively promising.
Is it *quantitatively* good ?
 - Improved from SC-LQCD w/o Polyakov loop.
 - Polyakov loop suppresses T_c . (cf. PNJL)
 - Quantitatively, not bad for $\beta < 4$ in $T_c(\beta_c)$
 - In the “scaling” region ($\beta > 5$), we do not see further bending of T_c in SC-LQCD.



Nakano, Miura, AO, LAT10 & in prep.

MC Results:

Ph. de Forcrand, M. Fromm ('09),

Ph. de Forcrand, private comm.,

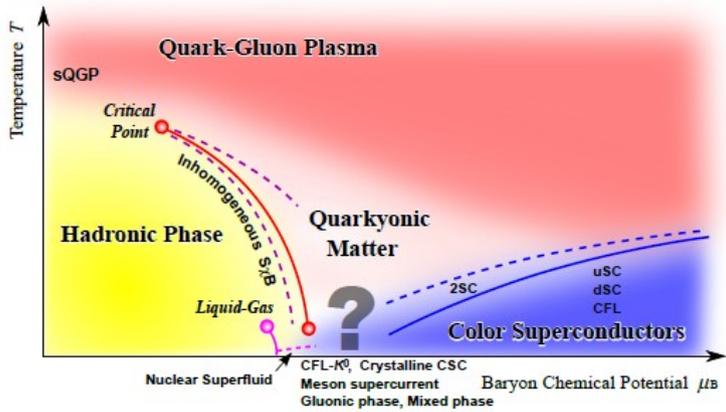
S.A. Gottlieb et al. ('87),

D'Elia, Lombardo ('03),

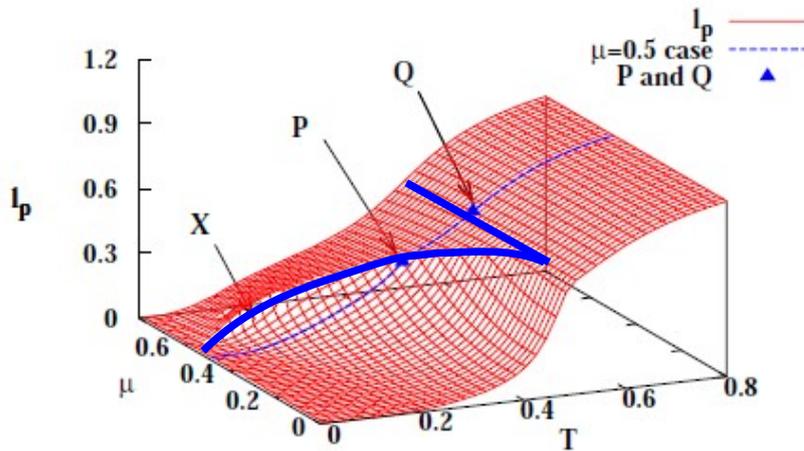
Z. Fodor, S. D. Katz ('02),

R.V. Gavai et al. ('90)

Comparison with Other Models

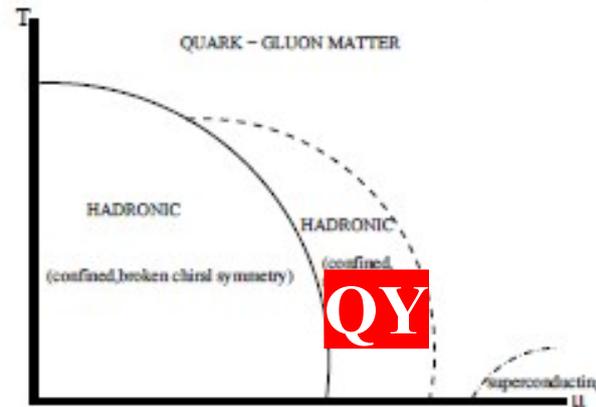


Fukushima, Hatsuda ('10)

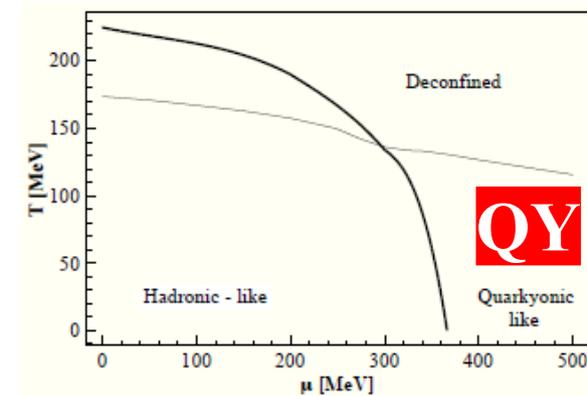


Miura, Nakano, AO, LAT10, in prep.

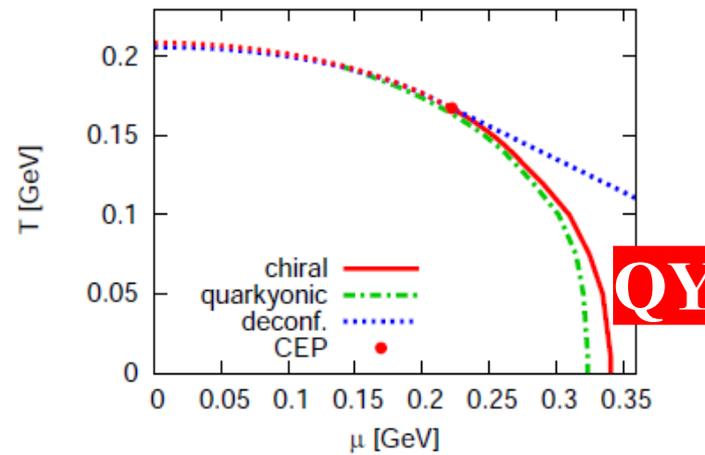
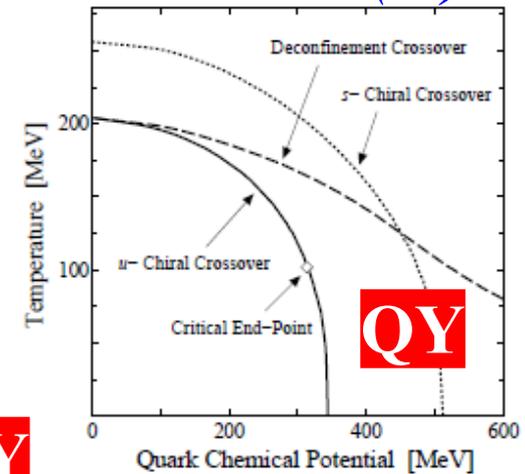
Grozman et al. (08)



Abuki et al. (08)



Fukushima (08)



McLerran, Pisarski, Sasaki ('09)

- Strong coupling lattice QCD (SC-LQCD) has been developed to describe the QCD phase diagram at finite T and μ .
 - Approximations: double expansion ($1/g^2$, $1/d$) and mean field.
 - Recent development: NLO and NNLO in $1/g^2$, Polyakov loop effects
cf. Jolicoeur, Kluberg-Stern, Morel, Lev, Petersson ('84)
 - NNLO at $T=0$ treatment (no phase diagram study)
 - Gocksch-Ogilvie model*
 - SCL-LQCD + *phen. string tension*
- SC-LQCD may serve a qualitatively competitive framework to effective models such as PNJL in some aspects of the QCD phase diagram.
 - NNLO w/ PL (bosonization method) roughly (i.e. 10-20 % precision) explains T_c in MC simulations for $\beta < 4$.
 - NLO w/ PL (Haar measure method) predicts the existence of the quarkyonic matter.

■ 講義 Sec. 1(b)

● 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

● カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

● 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

● 強結合格子 QCD

- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

● 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

*Effective Models of QCD
at High Density*

■ Effective model とは？

- 厳密には ...
注目する自由度以外を積分し、元の理論と同じ観測量を与える模型
- 緩やかな意味では ...
元の理論の対称性などを尊重し、着目する物理量・現象を説明する模型

■ Effective models of QCD

- Quark 模型：構成子クォークとクォーク間の相互作用により、ハドロンのスペクトル・静的な性質を説明
- Bag 模型：内側で摂動論的真空が実現していると考え、current quark によりハドロンのスペクトル・静的な性質を説明
- NJL 模型：クォーク間のカイラル対称な相互作用 \rightarrow χ SSB とその回復
- Quark-Meson 模型：クォークと中間子 \rightarrow χ SSB とその回復
- Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型 \rightarrow NJL, QM 模型 + ポリアコフループ

Bag 模型

■ Bag model

- カイラル対称性が回復した摂動論的真空となった球の中をクォークが運動

$$M_N = \frac{3x}{R} + \frac{4\pi R^3}{3} B + \dots$$

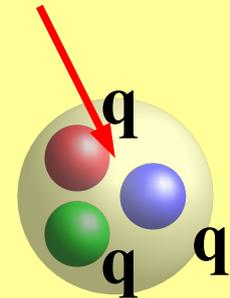
クォークの
運動エネルギー

摂動論的な
真空を作る
エネルギー

相互作用、
カシミア、
周りの中間子
の雲、...

- 球形の bag の中でクォークの Dirac eq. を解いた結果: $x = 2.04 \dots$
- B: カイラル対称性が破れることにより得られるエネルギー密度: $B \sim (220 \text{ MeV})^4$

カイラル対称性が破れていない摂動論的な真空



カイラル対称性が自発的に破れた真空

Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn, Weisskopf ('74)

■ Bag model EOS

● 摂動論的真空

→ カイラル対称性が自発的に破れた真空(物理的真空)に比べて高いエネルギー密度

$$L = L_{\text{particle}} - B \rightarrow T^{\mu\nu} = T_{\text{particle}}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} B$$

(ダークエネルギー)

● 粒子からの圧力 (Stefan-Boltzmann 則)

$$-P = \Omega/V = -\frac{\pi^2}{90} T^4 \left(\sum_B g_B + \frac{7}{8} \sum_F g_F \right)$$

● クォーク・グルーオン・プラズマ: クォーク、グルーオンと摂動論的真空

$$P_{QGP} = \frac{37\pi^2}{90} T^4 - B, \quad \epsilon_{QGP} = \frac{37\pi^2}{30} T^4 + B$$

● ハドロン相: 軽い自由度 = 3種類の π 粒子 $P_H = \frac{3\pi^2}{90} T^4, \quad \epsilon_H = \frac{3\pi^2}{30} T^4$

Bag 模型 (cont.)

■ 相転移: 圧力の大きな相が全体を占める

● クォーク・グルーオン・プラズマ

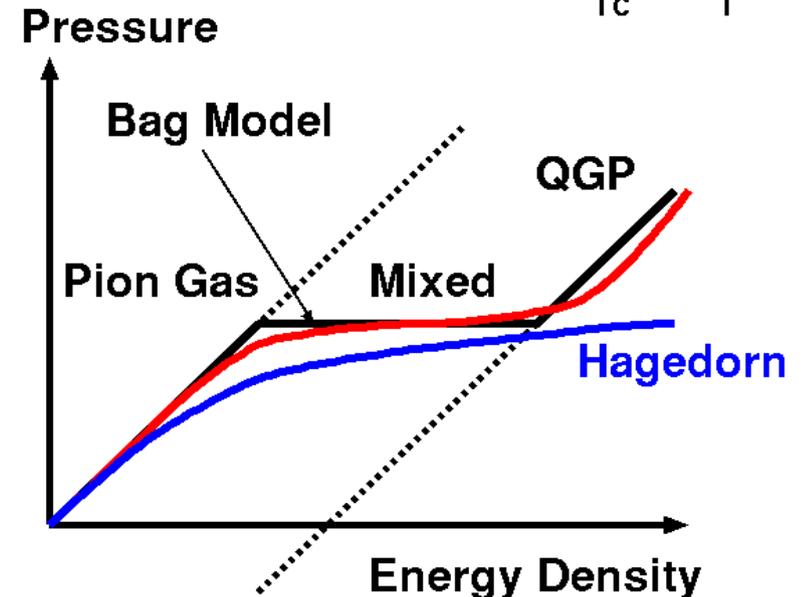
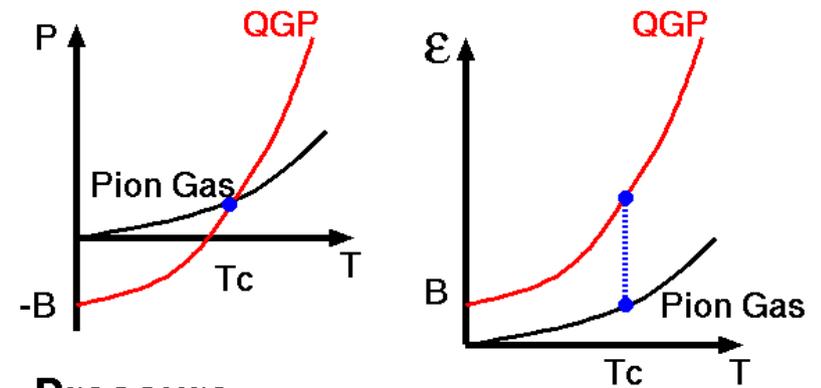
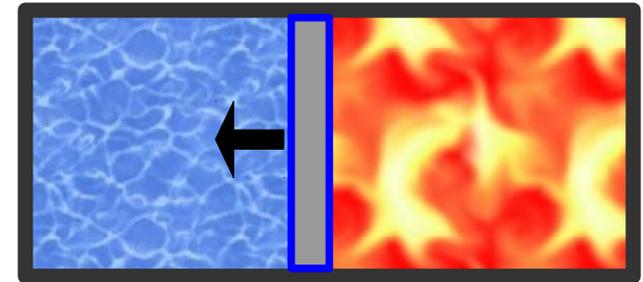
- ▶ 粒子が存在しなければ、摂動論的真空は物理的真空よりも不利 = 負の真空
- ▶ 温度が大きくなれば、大きな自由度のため、圧力は増える

$$\text{DOF} = 2(\text{spin}) \times 2(q, \bar{q}) \times 3(\text{color}) \\ \times 2(\text{flavor}) \times 7/8(\text{Fermion}) \\ + 2(\text{spin}) \times 8(\text{color})$$

● ハドロン相

- ▶ 物理的真空が圧力の基準 (粒子以外の圧力は0)
- ▶ 軽い粒子の自由度は小さい

→ 低温 = ハドロン相、高温 = QGP
 圧力が等しくなったとき相転移
 エネルギー密度は大きく変化



Polyakov loop extended NJL model (PNJL)

■ NJL model + Polyakov loop

K. Fukushima, PLB591('04)277;PRD77('08)114028.

$$\Omega_{\text{NJL}}/V = \frac{1}{2G}(M - m_q)^2 - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + T \ln[1 + e^{-(E_p - \mu)/T}] + T \ln[1 + e^{-(E_p + \mu)/T}] \right\}$$

化学ポテンシャル・グルーオンと Fermion の結合

$$\bar{q} \gamma^0 (igA_0 + \mu) q$$

→ gA_0 は化学ポテンシャルの虚部とみなせる！

$$\exp(\mu/T) \rightarrow \exp[(\mu + i g A_0)/T] = e^{\mu/T} \exp\left[i \int_0^\beta g A_0 d\tau\right]$$

$$\Omega/V = V_{\text{glue}}[L] + \frac{1}{2G}(M - m_q)^2 - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + T \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \ln[1 + L e^{-(E_p - \mu)/T}] + T \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \ln[1 + L^\dagger e^{-(E_p + \mu)/T}] \right\}$$

■ 1クォーク、2クォークの励起

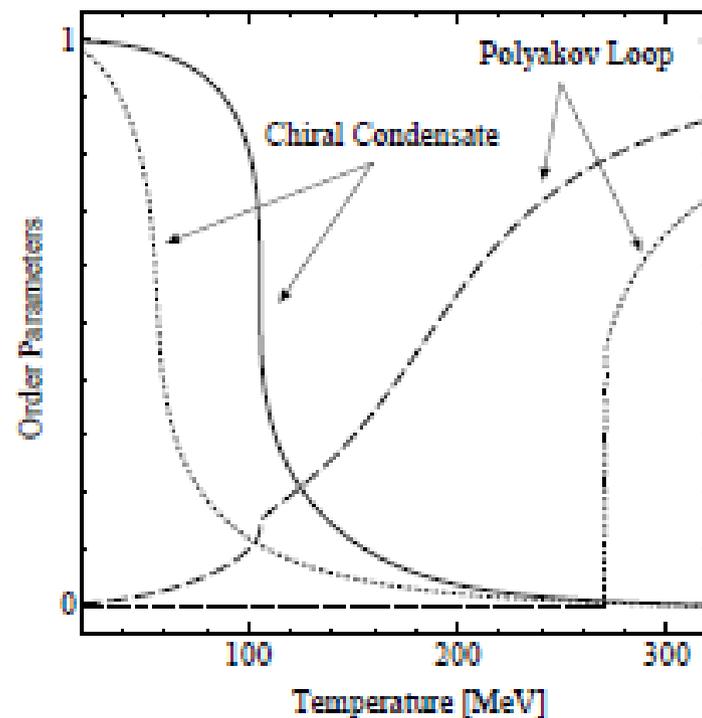
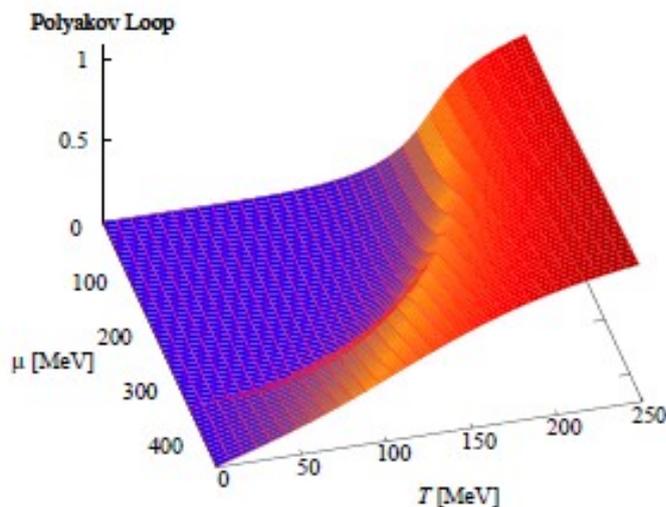
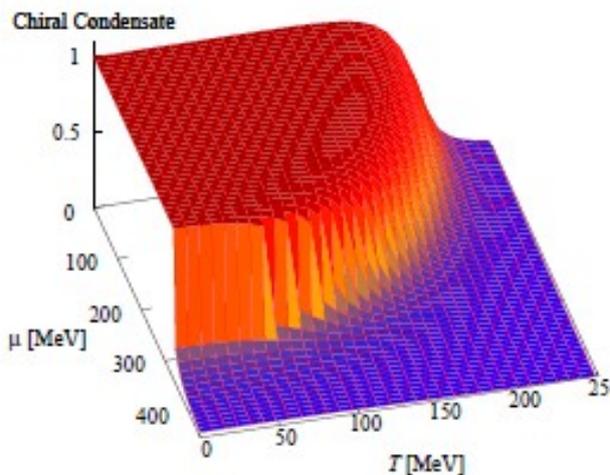
$$L = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2), \exp(i\theta_3)) \quad (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0)$$

$$\rightarrow \det(1 + L \exp(-(E - \mu)/T))$$

$$= \prod_{k=1}^3 [1 + \exp(-X + i\theta_k)] = 1 + N_c l e^{-X} + N_c \bar{l} e^{-2X} + e^{-3X}$$

$$(X = (E - \mu)/T)$$

→ ポリアコフループ l が有限であれば、
1 quark, 2 quark の励起を許す



Quark Meson Model

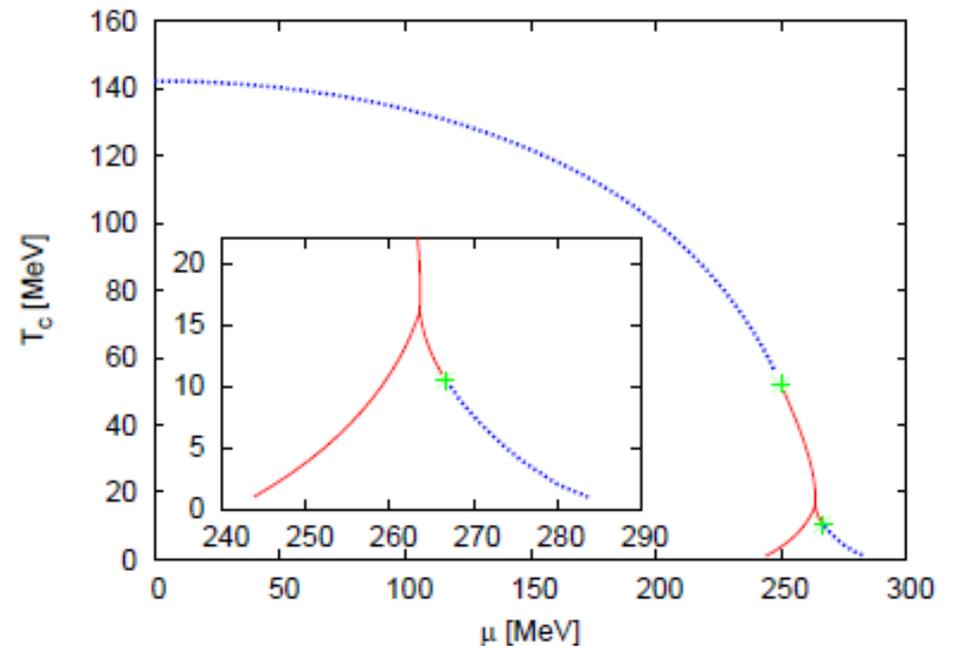
- クォークと中間子を注目する自由度として取り入れる模型
(~ ボソン化した NJL 模型 + ボソンの kinetic term)

B.-J. Schaefer, J. Wambach, NPA757('05)479

$$\Gamma_{\Lambda}[\Phi] = \int d^4x \left\{ \bar{q}[\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)]q + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\vec{\pi})^2 + V_{\Lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right\}$$

$$V_{\Lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \frac{m_{\Lambda}^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda_{\Lambda}}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2$$

- 繰り込み可能。
- 繰り込み群方程式の初期条件等として利用される。



Polyakov Quark Meson model

■ Quark Meson model と Polyakov loop を結合した模型

B.-J. Schaefer, J.M.Pawlowski, J. Wambach, PRD76('07)074023

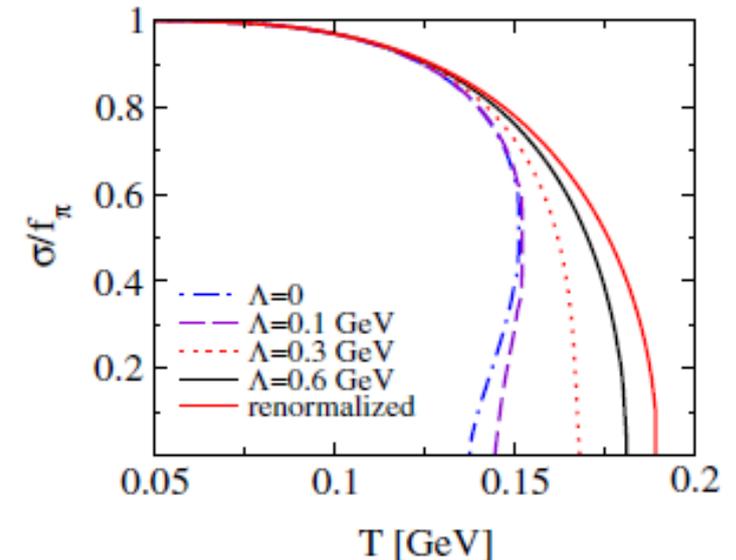
V. Skokov, B. Friman, E. Nakano, K. Redlich, B.-J. Schaefer, PRD82('10)034029.

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\not{D} - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi})) q + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - U(\sigma, \vec{\pi}) - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})$$

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - c\sigma \quad \not{D}(\Phi) = \gamma_\mu \partial_\mu - i\gamma_0 A_0(\Phi)$$

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})}{T^4} = -\frac{b_2}{4} (|\Phi|^2 + |\bar{\Phi}|^2) - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{16} (|\Phi|^2 + |\bar{\Phi}|^2)^2$$

- ゼロ点エネルギーを取り入れない取り扱い (B.-J. Schaefer et al. ('07)) では、2 flavor のカイラル極限でも1次相転移。
- ゼロ点エネルギーを取り入れると相転移の次数が QCD からの予想と一致。 (V. Skokov et al. ('10))



Model dependence of the critical point

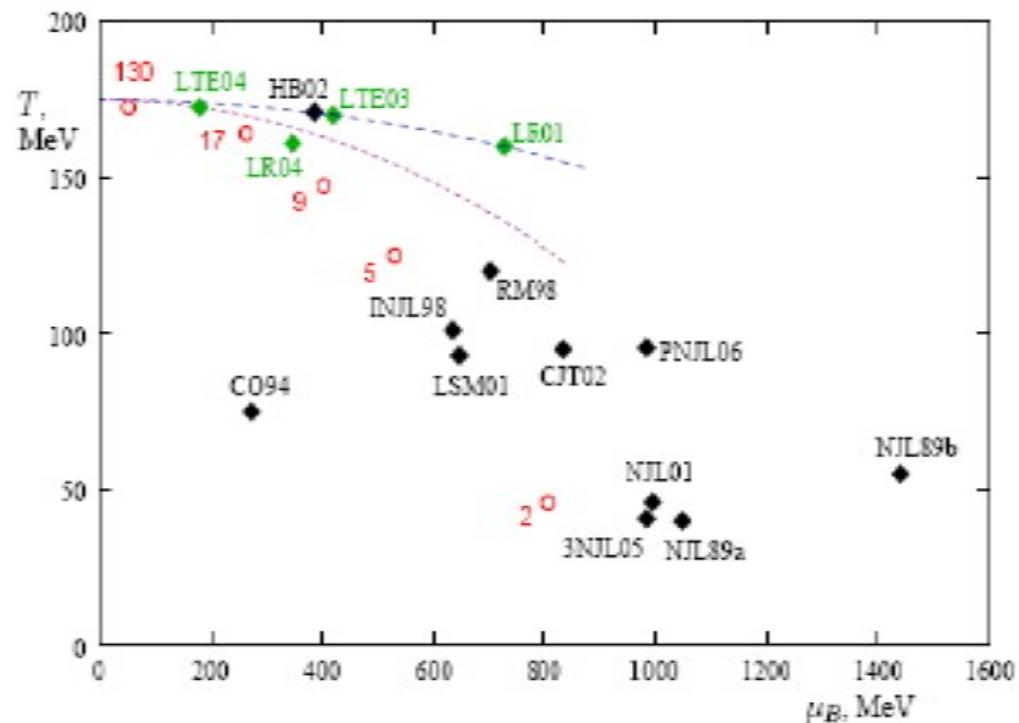
■ Bag model

- ハドロン相と QGP 相を別の自由度で記述
→ QCD 相転移はいつでも一次

■ Chiral Effective models (NJL, PNJL, QM, PQM)

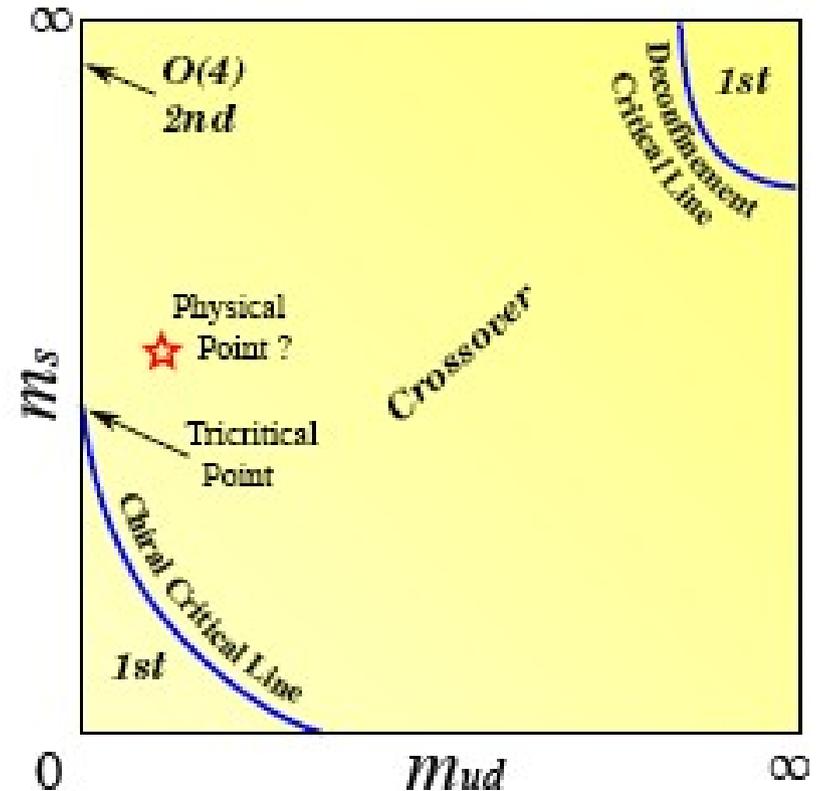
- カイラル対称性を尊重
→ クロスオーバー ($\mu=0$) から1次相転移へ。

■ 模型依存性はまだまだ大きい



高密度物質の QCD 有効模型 Short Summary

- 高密度物質の相図は未解明
→ 多くの模型が提案され、試されている。
- Bag 模型
 - QCD 真空の変化を取り入れた最初のシンプルな模型
 - 相転移は常に1次
- カイラル有効模型
 - 「カイラル対称性の自発的破れ」
 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \rightarrow SU(N_f)_V$
を尊重
 - クォーク質量による相転移次数の
移り変わりを説明
 - 臨界点については模型依存性は大



- 講義内容のおさらい
 - 有限温度の場の理論入門
 - ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数
 - カイラル相転移と NJL 模型
 - ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移
 - 格子上の場の理論入門
 - ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、リンク積分、格子 Fermion
 - 強結合格子 QCD
 - ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ
 - セミナー
 - 強結合格子 QCD から物質の相図と状態方程式へー 現状と展望 –
 - 高密度物質の QCD 有効模型
- 強調したこと：経路積分、松原振動数、ゼロ点エネルギー、リンク変数、カイラル対称性、ボソン化、ポリアコフ・ループ、等。

レポート問題

- ボソン化した NJL 模型の作用から出発して、ゼロ温度 ($T=0$) での有効ポテンシャルを求めよ。
 - 発展：有限温度・有限密度 (有限化学ポテンシャル) での有効ポテンシャルを構成子クォーク質量で 2 次まで展開し、2 次相転移線が $T^2 + \mu_B^2/3\pi^2 = T_c^2$ で与えられることを示せ。
- リンク積分を利用して、Wilson ループの期待値を強結合領域で求めよ。強結合極限での結果に加えて、 $1/g^2$ 補正がどのように与えられるか考察せよ。
- bag 模型状態方程式において相転移が起こる温度を bag constant B を用いて表せ。ハドロン相は 3 つのパイオンを考え、クォーク・グルーオン相ではクォークのフレーバー数を 3 とする。