

核多体系物理学

担当: 大西 明、八田佳孝 (基礎物理学研究所)

- 授業の概要・目的: 核子・ハドロン・クォークからなる多体系の性質を状態方程式、および核反応論の観点から議論する。核物質の状態方程式を記述するために必要となる核多体理論(平均場理論、G-matrix、熱場の理論、強結合格子 QCD)、ハイパー核生成反応や重イオン反応を理解する上で必要とされる原子核核反応理論(直接反応、輸送模型等)、等の理論の枠組について解説すると共に、これらについての最近の研究成果についても紹介する。
- 授業計画と内容
核子・ハドロン・クォーク物質の相互作用と状態方程式について以下の内容で講義する。
 1. 状態方程式を記述する理論模型
 - (a) 有限温度の場の理論入門
 - (b) QCD 有効模型 (南部 - ヨナラシニヨ模型、強結合格子 QCD)
 - (c) 相対論的平均場理論
 2. 輸送理論
 - (a) 時間依存平均場理論、半古典輸送模型とボルツマン方程式、流体模型、
 - (b) 古典ヤンミルズ場のダイナミクス
 - (c) 高エネルギー重イオン衝突の概観と輸送理論の適用例。
 3. 直接反応理論
 - (a) 核子 - 核子散乱、核力と位相差、有効相互作用 (G-matrix)
 - (b) ハドロン - 核反応 (光学模型、インパルス近似、グリーン関数法)、
ハイパー核・中間子核生成反応の概観と直接反応理論の適用例
 - (c) 高エネルギー核反応 (グラウバー模型、ハドロン共鳴)
- 成績評価の方法・基準: 履修状況及びレポートにより総合評価する。

参考書 *Quark Gluon Plasma, K.Yagi, T.Hatsuda, Y.Miake (CAMBRIDGE).*
格子上の場の理論、青木慎也 (シュプリンガー・ジャパン)
クォーク・ハドロン物理学入門、国広悌二 (サイエンス社)

■ Sec. 1 状態方程式を記述する理論模型

● 有限温度の場の理論入門

- ◆ 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数

● カイラル相転移と NJL 模型

- ◆ カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移

● 格子上の場の理論入門

- ◆ 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、

● 強結合格子 QCD

- ◆ 強結合極限での string tension と有効ポテンシャル、強結合展開、ポリアコフ・ループ

● 高密度物質の QCD 有効模型

- ◆ Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

● 相対論的平均場模型

- ◆ σ - ω 模型と有効場理論
- ◆ 高密度物質物理・中性子星物理の問題点

Introduction to Lattice Field Theory

格子上の場の理論

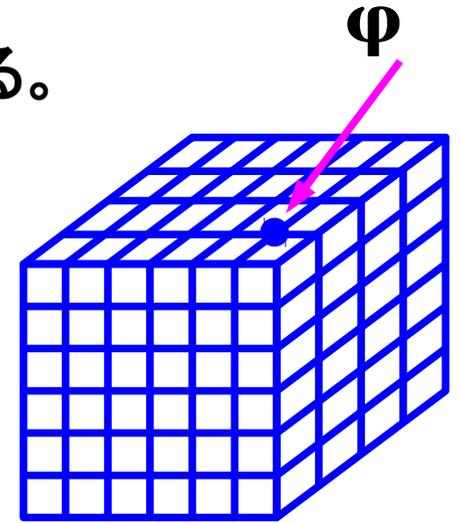
■ 場の理論 = 無限自由度

- 解析的・厳密にとくことは一般には困難 → 数値的に解く
- 求めたいものは非常に複雑な積分
→ 「区分求積」= 有限の格子上で解き、連続極限をとる。

■ スカラー場

- 連続理論 (Euclidean) の作用 (ϕ^4 理論)

$$S_{\text{cont}} = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right]$$



- 格子上の作用

- ◆ 連続極限で S_{cont} に一致
- ◆ S_{cont} とできるだけ同じ対称性を持つ

$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n, \mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

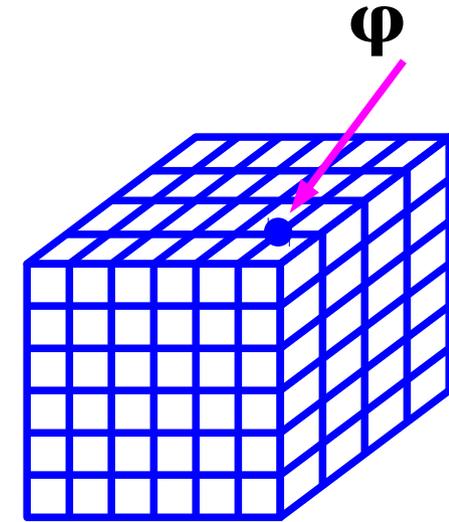
格子場の理論 (cont.)

■ 格子場の作用：スカラー場理論

$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n, \mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} \\ + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

$n = (n_x, n_y, n_z)$: spacetime point on the lattice

$\hat{\mu}$: unit vector in the positive μ direction.



● $a \rightarrow 0$ の極限で、連続理論の作用と一致

$$S_{\text{lat}} \rightarrow a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2} \phi(n) \sum_{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\mu}^2} + \frac{m^2}{2} \phi(n)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(n)^4 \right] + O(a^6) \\ = \int d^4 x \left[-\frac{1}{2} \phi(x) \partial^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right]$$

● $\phi \rightarrow -\phi$ 等の対称性を保つ。

Gauge field

■ Gauge action (Euclidean)

$$S_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu],$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad ([t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \operatorname{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

(経路積分では変数が c 数なので、 $gA \rightarrow A$ とスケール)

■ Gauge transformation

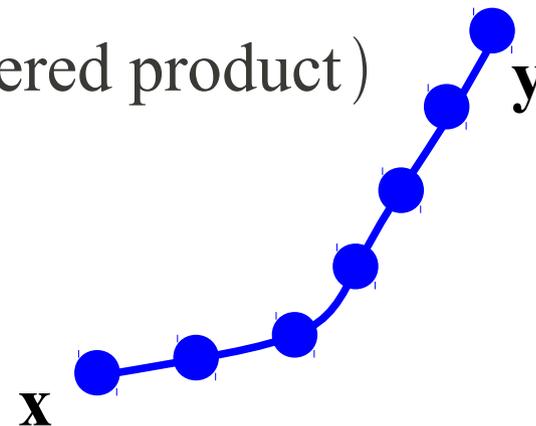
$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i\partial_\mu)V^+(x), \quad F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x)F_{\mu\nu}V^+(x)$$

■ ゲージ不変性をもつ格子上的作用をどのように作るか？ → リンク変数

$$U(x, y) \equiv P \exp \left[i \int_x^y dz_\mu A_\mu(z) \right] \quad (P: \text{path ordered product})$$

リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受ける

$$U(x, y) \rightarrow U'(x, y) = V(x)U(x, y)V^+(y)$$



Appendix: Gauge transformation of U

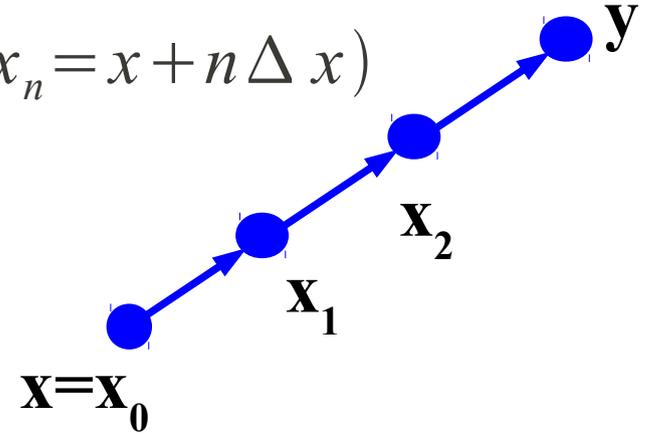
■ Proof of $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow V(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \mathbf{y})V^+(\mathbf{y})$

$$U(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] \quad (x_n = x + n \Delta x)$$

(multiply $(1+i A \Delta x)$ to the right !)

By using the gauge transformation of A ,

$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^+(x)$$



and the unitarity of V , $V(\mathbf{x}) V^+(\mathbf{x})=1$, we get

$$\begin{aligned} & 1 + i A'_\mu(x_n) \Delta x_\mu \\ &= 1 + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^+(x_n) \Delta x_\mu + V(x_n) \partial_\mu V^+(x_n) \Delta x_\mu \\ &= V(x_n) V^+(x_{n+1}) + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^+(x_{n+1}) \Delta x_\mu + O((\Delta x)^2) \\ &= V(x_n) [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] V^+(x_{n+1}) + O((\Delta x)^2) \\ &\rightarrow U'(x, y) = V(x) U(x, y) V^+(y) \end{aligned}$$

Gauge action

■ リンク変数

$$U_{n,\mu} \equiv U(n, n + \hat{\mu}) = \exp[ia A_{\mu}(n)] \in \text{SU}(N)$$

- リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受けるので、「閉じた経路」にそって積をとると、その trace はゲージ不変。

$$\prod_{n \in C} U \rightarrow V(n) \left(\prod_{n \in C} U \right) V^+(n)$$

■ Plaquette

Lattice 上で最も小さな loop は 単位正方形

$$n \rightarrow n + \hat{\mu} \rightarrow n + \hat{\mu} + \hat{\nu} \rightarrow n$$

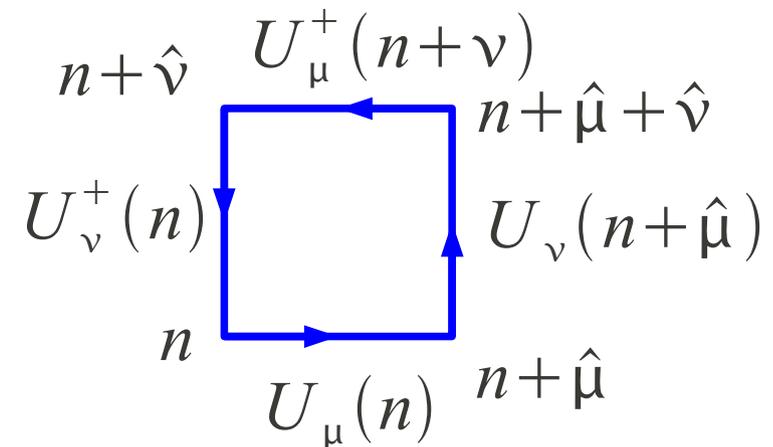
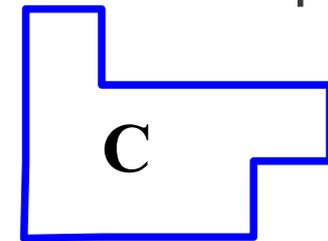
$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\nu,\mu}^+ U_{n,\nu}^+$$

■ Gauge action (plaquette action)

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right] \quad (\beta_g = 2 N_c / g^2)$$

$$U_{n,\mu} = U(n, n + \hat{\mu})$$

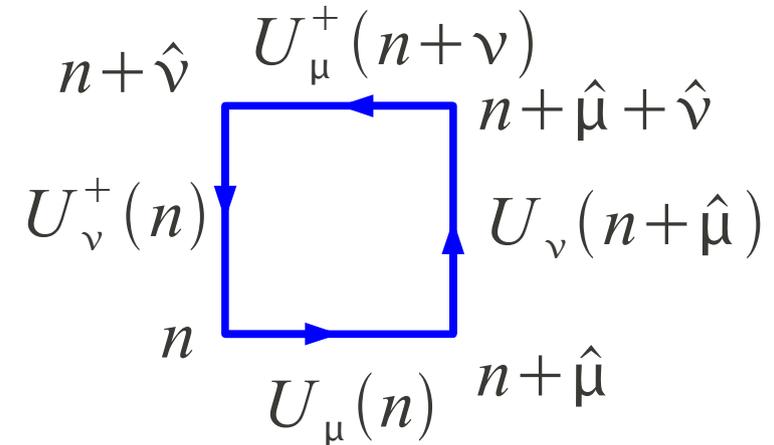
$$U_{n,\mu}^+ = U(n + \hat{\mu}, n)$$



Appendix: Plaquette and continuum action

■ ゲージ場の格子作用

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right]$$



● U(1) (電磁場) の場合：周積分 = rotation の面積分 $\rightarrow \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}$

● 非可換ゲージ場の場合：Hausdorff 公式の利用 $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

$$\text{tr } U_{\mu\nu}(x) = \text{tr } e^{ia\{A_\mu(x) + A_\nu(x+\hat{\mu}) + ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}} \times e^{-ia\{A_\mu(x+\hat{\nu}) + A_\nu(x) - ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}}$$

$$= \text{tr } e^{ia[(A_\nu(x+\hat{\mu}) - A_\nu(x)) - (A_\mu(x+\hat{\nu}) - A_\mu(x)) + ia[A_\mu, A_\nu] + O(a^3)]}$$

$$= \text{tr} \left[\underbrace{1 + ia^2 F_{\mu\nu} + a^4 X_4 - a^4 F_{\mu\nu}^2/2}_{0} + O(a^6) \right]$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G = \sum_{n, \mu \neq \nu} \beta_g \text{tr} \left[1 - \frac{a^4}{2} F_{\mu\nu}^2 \right]$$

S. Aoki, Text

■ ゲージ場の経路積分

$$Z_G = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp(-S_G) = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp[\beta_g \sum_{P \in \text{plaq.}} \text{tr}(U_P + U_P^+)]$$

- dU は群上の不変測度 (Haar measure)
→ ゲージ変換

$$U_{n, \mu} \rightarrow V(n) U_{n, \mu} V^+(n + \hat{\mu})$$

に対して不変な積分の測度が必要

■ リンク積分 SU(N)

- ゲージ不変性のみで、リンク変数の多項式の積分はほぼ決まる。

$$\int dU 1 = 1 \quad (\text{normalization}), \quad \int dU U_{ab} = 0$$

$$\int dU U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$$

$$\int dU U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

Proof of the one-link integral formulae

■ $\int dU U_{ab} = 0$

- LHS = R_{ab} とおく。両辺に左から SU(N) 行列 V をかけると

$$\text{LHS} = \int dU (VU)_{ab} = \int d(VU) (VU)_{ab} = R_{ab}, \quad \text{RHS} = (VR)_{ab}$$

V は任意の SU(N) の元だから、 $R_{ab} = 0$

■ $\int dU U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$

- LHS = T_{bi}^{aj} とおく。U, U⁺ が LU, U⁺L⁺ と変換するよう L, L⁺ をかける。

$$\text{LHS} = \int dU (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = \int d(LU) (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = T_{bi}^{aj}$$

$$\text{RHS} = L_{ac} T_{bi}^{ck} L_{kj}^+ \rightarrow LT_{bi} = T_{bi}L \rightarrow T_{bi}^{aj} = S_{bi} \delta^{aj}$$

任意の SU(N) の元と交換するので上添字について T は単位行列。
同様に右変換して S も単位行列に比例。

a=j とおいて和をとると、比例係数が 1/N と分かる。

Proof of the one-link integral formulae

$$\int dU U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

- 左辺を T_{ijk}^{abc} とおく。U を左変換。

$$T_{ijk}^{abc} = L_{ad} L_{be} L_{cf} T_{ijk}^{def}$$

任意の L に対して不変な 3 階のテンソルは完全反対称テンソルのみ。
右変換も同様。

$$T_{ijk}^{abc} = c \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk}$$

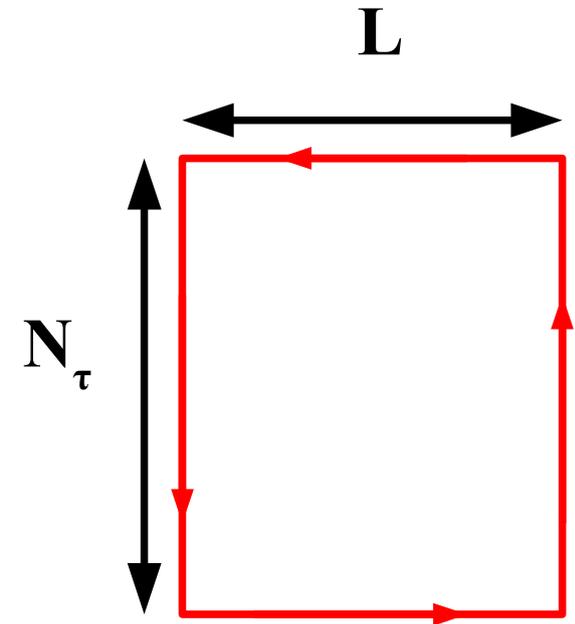
- 両辺に abc をかけて和をとり、 $\det U=1$ を使うと $c=1/N!$

Wilson Loop

- One link integral formulae の応用として、強結合領域での Wilson loop の期待値を求めてみます。
- Wilson loop

$$W(C=L \times N_\tau) = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

- 空間方向 L 、時間方向 N_τ のループにそって、リンク変数を掛け合わせたもの。
- 意味づけ
ある時刻に両端が重いクォークからなり、 L だけ伸びたストリングを作る。
虚時間 N_τ の後に同じ位置で観測する確率。



$$\langle O_L(N_\tau) O_L^+(0) \rangle \propto \exp(-V(L) N_\tau) \quad (\text{for large } N_\tau)$$

$V(L)$ = Interquark potential

Wilson loop (cont.)

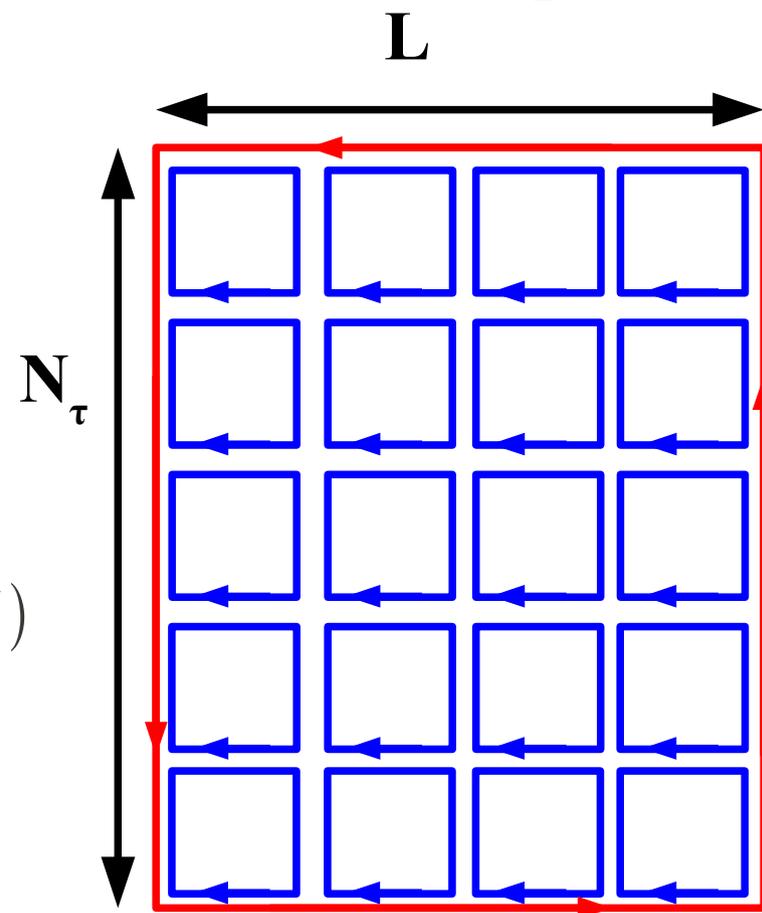
■ 強結合極限での評価

$$\langle W(C=L \times N_\tau) \rangle = \int DU W(C) \exp \left[\frac{1}{g^2} \sum_P \text{tr}(U_P + U_P^+) \right]$$

- リンク変数が残っていると積分して0。
→ Wilson loop に含まれるすべてのリンクを plaquette からのリンクと組み合わせて消す必要がある。
- 結合が強いとき、できるだけ少ない数の plaq. で消すには、Wilson loop を平面的に plaq. で埋めればよい。

$$\langle W(C) \rangle = N \left(\frac{1}{g^2 N} \right)^{LN_\tau} \rightarrow V(L) = L \log(g^2 N)$$

強結合極限では面積則
→ クォークの閉じ込め



K.G. Wilson, PRD10('74),2445

Strong Coupling Lattice QCD: Pure Gauge

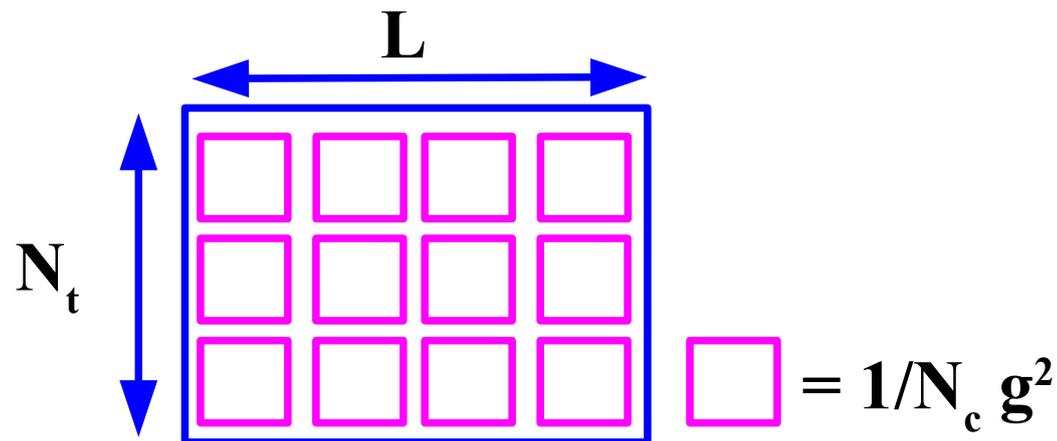
■ Quarks are confined in Strong Coupling QCD

● Strong Coupling Limit (SCL)

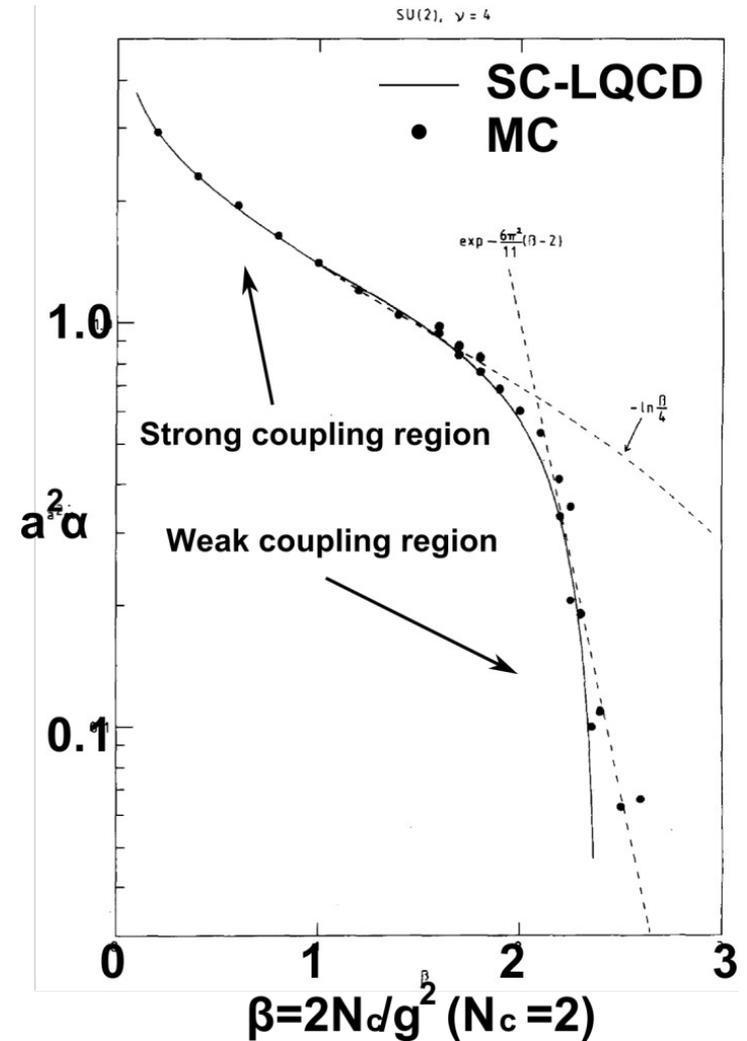
- Fill Wilson Loop with Min. # of Plaquettes
- Area Law (Wilson, 1974)

$$S_{\text{LQCD}} = -\frac{1}{g^2} \sum_{\square} \text{tr} [U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}]$$

● Smooth Transition from SCL to pQCD in MC (Creutz, 1980; Munster 1980)



K. G. Wilson, PRD10(1974),2445
M. Creutz, PRD21(1980), 2308.
G. Munster, (1980, 1981)



Munster, '80

Fermions on the Lattice

■ Fermion action (Euclidean)

$$S_{q, \text{cont}} = \int d^4 x \bar{q} (-i \gamma_\mu D_\mu + m) q, \quad D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu$$

■ 格子上の action → Link 変数の利用

$$S_{F, \text{lat}} = a^4 \sum_x \left[\sum_\mu \frac{\left(\bar{q}(x) \Gamma_\mu U_{x, \mu} q(x + \hat{\mu}) - \bar{q}(x + \hat{\mu}) \Gamma_\mu U_{x, \mu}^+ q(x) \right)}{2a} + m \bar{q}(x) q(x) \right]$$

● q, U の変換性からゲージ不変

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad U_{x, \mu} \rightarrow V(x) U_{x, \mu} V^+(x + \hat{\mu})$$

● 連続極限で $S_{q, \text{cont}} \hat{=}$

$$U = 1 + i A_\mu a, \quad S_{F, \text{lat}} \rightarrow a^4 \sum_x \bar{q}(x) \left[\Gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i A_\mu \right) + m \right] q(x)$$

$$\Gamma_\mu = -i \gamma_\mu$$

これ以降、 Γ を γ , $x_4 \rightarrow x_0$ とします。

Fermions on the Lattice (cont.)

- 一見よさそうだが、問題点が ... → ダブラー
自由場の場合、Fermion の hopping matrix を Fourier 変換すると

$$D = i \Gamma_{\mu} \frac{\sin(p_{\mu} a)}{a} \quad (p_{\mu} = 2\pi n_{\mu} / La, n_{\mu} = 0, 1, \dots, L-1)$$

(3+1) 次元格子上で、D は 16 回 0 となる。($p_{\mu} = 0, \pi/a$)
→ 低エネルギーで現れる Fermion の種類が 16 倍増える。

- Nielsen-Ninomiya の定理

「適当な仮定 (平行移動不変性、カイラル対称性、局所性、エルミート性、双線形性) を満たす格子 Fermion にはダブラーが存在する」

- 解決方法

- Wilson Fermion : $a \rightarrow 0$ でダブラーが無限に重くなるように 2 階微分に対応する項を加える。(カイラル対称性がない)
- Domain wall Fermion, Overlap Fermion, ...
- Staggered (Kogut-Susskind) Fermion

Staggered Fermion

- Staggered Fermion : Spinor 構造・ γ 行列を数因子 η で表せる。

$$\chi = \gamma_3^{x_3} \gamma_2^{x_2} \gamma_1^{x_1} \gamma_0^{x_0} q$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x + \hat{\mu}) &= \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \gamma_2^{x_2} \gamma_1^{x_1} \gamma_0^{x_0} \gamma_\mu \gamma_0^{x_0} \cdots \gamma_\mu^{x_\mu+1} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x + \hat{\mu}) \\ &= \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \cdots \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \gamma_\mu^{2x_\mu+2} \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x + \hat{\mu}) = \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \chi(x + \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1}}$$

- Lattice action with staggered Fermion

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x + \hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x + \hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

Fermion の 4 成分が全て等価。1 成分のみを考えてよい。

→ 16 個のダブラーが、(Dirac Fermion で) 4 つのダブラーとなる。

- カイラル変換 : χ, χ^{bar} について同じ、隣り合った χ で逆の位相

$$\chi_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \chi_x, \quad \bar{\chi}_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \bar{\chi}_x, \quad \varepsilon(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

→ 厳密なカイラル対称性をもつ

Lattice QCD with staggered Fermion

■ Lattice QCD action with (unrooted) staggered Fermion

$$S_{LQCD} = S_F + S_G$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

$$S_G = -\frac{1}{g^2} \sum_{\text{plaq.}} \text{tr} \left[U_P + U_P^+ \right]$$

- Spinor 構造が simple(無い) → 解析的・数値的な計算が簡単
- $m=0$ (chiral limit) で厳密な chiral 対称性をもつ
→ カイラル相転移の議論が可能
- 連続領域 ($g \rightarrow 0, a \rightarrow 0$) では $N_f=4$ だが、有限の a ではフレーバー対称性は破れている。
- Chiral anomaly ($U(1)_A$) については controversial

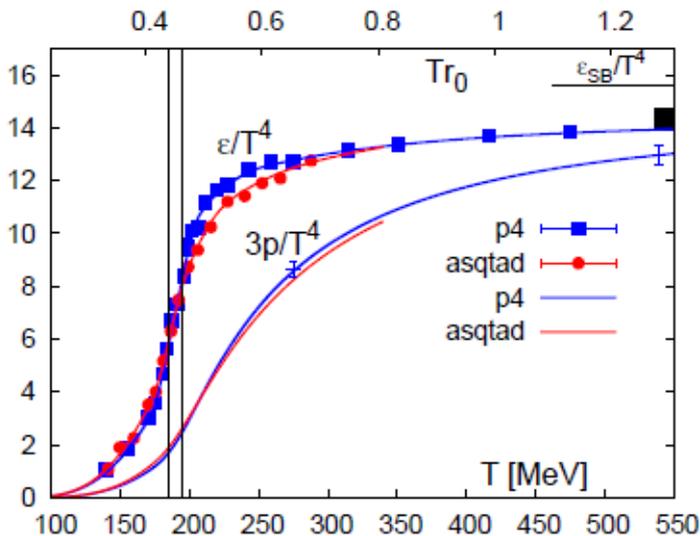
Monte-Carlo simulation in Lattice QCD

■ 分配関数 (or 生成汎関数)

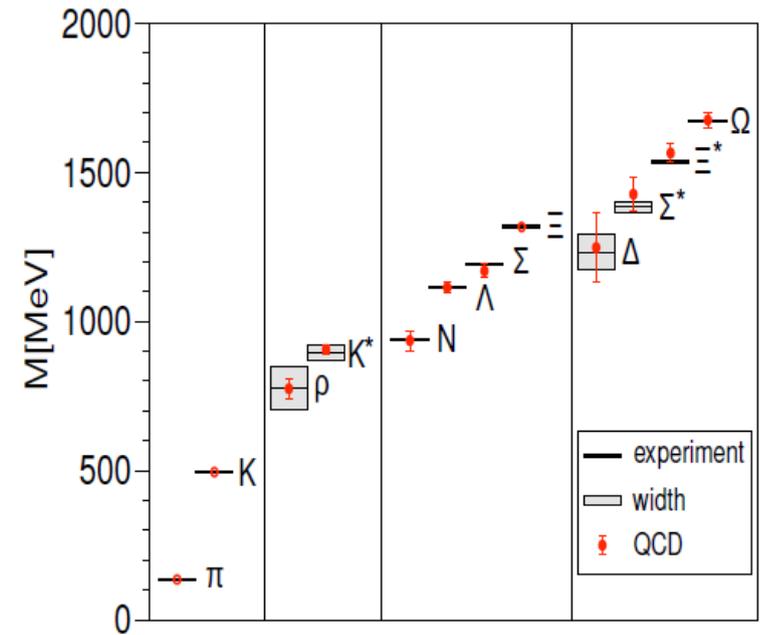
$$S = S_G(U) + \bar{q} D q, \quad Z[J] = \int DU \det D(U) \exp[-S_G(U) + J \hat{O}]$$

$$\rightarrow \langle O \rangle = \frac{\int DU \det D(U) O(U) \exp[-S_G(U)]}{\int DU \det D(U) \exp[-S_G(U)]} = \frac{\delta Z[J]}{\delta J}$$

- Monte-Carlo 法では、通常先に Fermion determinant を評価し、リンク変数の配位を MC 法で求める。クォークを含む演算子の場合には、propagator をあらわに評価。



Hot QCD (2009)



BMW collaboration, Science 322(2008)1224

■ 格子 QCD

- リンク変数の導入により、完全なゲージ対称性を保持。
- グルーオン作用 : Plaquette (プラケット) 作用 (or its improved ver.)
→ 連続極限 ($a \rightarrow 0$) で連続理論のゲージ作用
- クォーク作用 : リンク変数を用いてゲージ対称性を保てる。

■ Monte-Carlo simulation

- 非摂動的 QCD を厳密に解く第一原理計算。
- 大きな成功 : クォークの閉じ込め、ハドロン質量、QCD 相転移 ($\mu=0$)
- カイラル対称性には多少の問題あり
 - ◆ Staggered fermion: Fast, but ugly ($N_f=4 \rightarrow$ quarter root, anomaly, ...)
 - ◆ Wilson fermion: Explicit chiral symmetry breaking at finite a .
 - ◆ DW/Overlap fermion: large numerical cost.

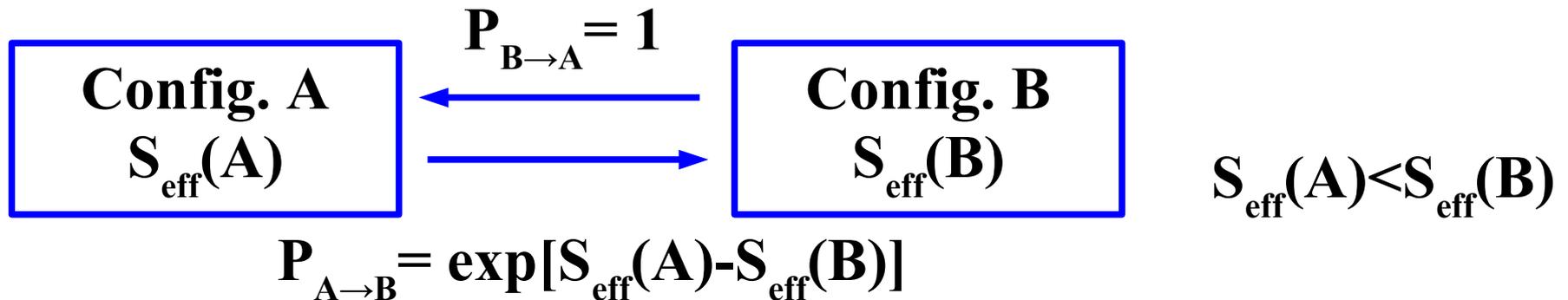
■ 有限密度での格子 QCD MC simulation は残された大きな問題。

- 「大学院生や postdoc に与えてはいけないテーマ」(青木さん)

Monte-Carlo Integral: Importance Sampling

■ Metropolis sampling

= One of the typical (popular) method of importance sampling



● Trial prob.: $P_{\text{A} \rightarrow \text{B}}^{\text{try}} = P_{\text{B} \rightarrow \text{A}}^{\text{try}}$ (detailed balance)

● Pickup prob.: According to S_{eff} .

● In equilibrium, $P(\text{A}) P_{\text{A} \rightarrow \text{B}} = P(\text{B}) P_{\text{B} \rightarrow \text{A}} \rightarrow P(\text{A}) \propto \exp[-S_{\text{eff}}(\text{A})]$