

# 核多体系物理学

担当: 大西 明、八田佳孝 (基礎物理学研究所)

- 授業の概要・目的: 核子・ハドロン・クォークからなる多体系の性質を量子色力学(QCD)、状態方程式、および核反応論の観点から議論する。強い相互作用の基本理論であるQCDの基本的性質、核物質の状態方程式を記述するために必要となる核多体理論(平均場理論、G-matrix、熱場の理論、強結合格子QCD)、ハイパー核生成反応や重イオン反応を理解する上で必要とされる原子核核反応理論(直接反応、輸送模型等)、等の理論の枠組について解説すると共に、これらについての最近の研究成果についても紹介する。
- 授業計画と内容: 量子色力学、および核子・ハドロン・クォーク物質の相互作用と状態方程式について以下の内容で講義する。

1. 量子色力学(QCD)の基本的性質  
QCD作用と対称性、摂動論的QCD、発展方程式、カラーグラス描像

八田

2. 状態方程式とQCD相図を記述する理論模型

- ・ 核力と位相差、有効相互作用、核物質の状態方程式、平均場理論、
- ・ 有限温度での場の理論、南部-ヨナラシニヨ模型、強結合格子QCD

3. 原子核反応理論

- ・ 核子-核子散乱、ハドロン-原子核反応、
- ・ 流体力学、輸送理論、
- ・ ハイパー核・中間子核生成反応の概観と直接反応

大西

- 成績評価の方法・基準: 履修状況及びレポートにより総合評価する。

参考書 *Quark Gluon Plasma*, K.Yagi, T.Hatsuda, Y.Miake (CAMBRIDGE).  
格子上の場の理論、青木慎也 (シュプリンガー・ジャパン)  
クォーク・ハドロン物理学入門、国広悌二 (サイエンス社)

# 状態方程式や QCD 相図を記述する理論模型

- 2.1 核物質の状態方程式概観 (10/20)
  - なぜ状態方程式か？中性子星パズル、対称エネルギー
  - 状態方程式を記述する理論模型
- 2.2 核力と位相差、有効相互作用 (10/27)
- 2.3 平均場理論：相対論的平均場 (RMF) 模型を中心に。(11/10)
- 2.4 カイラル相転移と南部 - ヨナラシニヨ (NJL) 模型 (11/17)
  - 有限温度・密度の場の理論入門
  - 経路積分表示、ユークリッド時空、松原和、自由場の分配関数
  - カイラル対称性、Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、カイラル相転移
- 2.5 格子上の場の理論入門 (→ 青木さんの講義)
  - 格子 QCD、Plaquette 作用、格子 Fermion、リンク積分、
  - 強結合格子 QCD、Area Law、強結合展開、ポリアコフ・ループ
- 2.6 高密度物質の QCD 有効模型 (12/1)
  - Bag 模型、Quark-Meson 模型、Polyakov loop extended Quark-Meson (PQM) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型

---

# *Chiral Transition and NJL model*

# Quantum Chromodynamics (QCD)

## ■ QCD Lagrangian

*notation: Yagi, Hatsuda, Miake*

$$L = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - m) q - \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g A_\mu \quad (\text{Covariant derivative})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu] = \frac{-i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (\text{Field strength})$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad (t^a = \text{SU}(3) \text{ generator}, [t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

## ■ Gauge transformation

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad g A_\mu(x) \rightarrow V(x) (g A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^\dagger(x)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x) F_{\mu\nu} V^\dagger(x), \quad D_\mu(x) \rightarrow V(x) D_\mu(x) V^\dagger(x)$$

# Chiral Symmetry

## ■ Chiral transformation

= indep. rotation of left- and right-handed quarks

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \rightarrow q'_L = V_L q_L, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \rightarrow q'_R = V_R q_R$$

$${}^t q = (u, d, s, \dots), \quad V_{L,R} \in \text{SU}(N_f)$$

**axial-vector transformation**

$$q \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\lambda^j \theta^j \gamma_5\right)q = V_A q$$

- **QCD Lagrangian is invariant under chiral transformation when quarks are massless.**

$$L_q = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - m) q$$

$$\rightarrow q^+ V_A^+ \gamma^0 (i \gamma^\mu D_\mu - m) V_A q = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - V_A m V_A) q$$

$$\delta L_q \simeq \frac{1}{2} \bar{q} i \gamma_5 \{\lambda^j \theta^j, m\} q \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow 0)$$

# Chiral Symmetry (cont.)

## ■ Chiral transformation of hadrons (SU(2)<sub>f</sub>)

$$S = \bar{q} q \text{ (Scalar)}, \quad P^a = \bar{q} i \gamma_5 \tau^a q \text{ (Pseudo scalar)}$$

$$\delta q = -\frac{i}{2} \theta^j \lambda^j \gamma_5 q, \quad \delta \bar{q} = -\frac{i}{2} \bar{q} \theta^j \lambda^j \gamma_5 \text{ (infinitesimal transf.)}$$

$$S \rightarrow S' = S - \theta^a P^a, \quad P^a \rightarrow P'^a = P^a + \theta^a S$$

→ Scalar and Pseudo scalar mixes under chiral transf.

- $P^a$  の  $\theta^a$  方向の成分を  $P$ 、 $\theta^a$  ベクトルの大きさを  $\theta$  とすると、chiral transf. は (S, P) 空間での回転

$$\begin{pmatrix} S' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} \rightarrow S^2 + P^2 = \text{const. (chiral circle)}$$

- 「演算子」～「粒子」と考えると、 $\sigma (J^\pi=0^+)$  と  $\pi (J^\pi=0^-)$  の質量は縮退するはずだが、軽いスカラー中間子は存在しない。  
→ 対称性の自発的破れ

## ■ Chiral symmetric Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - U(\sigma, \boldsymbol{\pi})$$

$$U(\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 - f^2)^2$$

### ● Invariant under chiral transf.

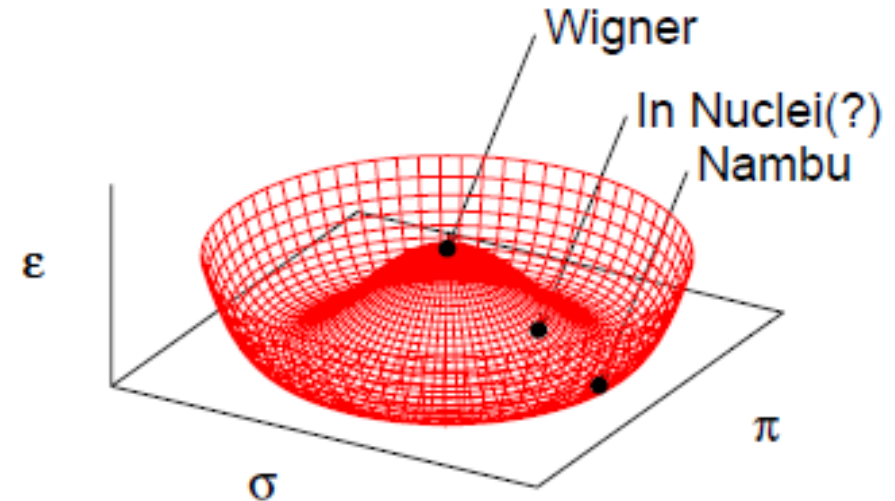
$$\delta \sigma = -\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad \delta \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\theta} \sigma$$

### ● $\sigma$ and $\pi$ masses

$$f^2 < 0 \rightarrow m_\sigma^2 = m_\pi^2 = -\lambda f^2$$

$$f^2 > 0 \rightarrow \langle \sigma \rangle = f$$

$$U(\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \times 0 \times \boldsymbol{\pi}^2 + O((\varphi, \boldsymbol{\pi})^4) \quad (\varphi = \sigma - f)$$



→ When a member condensates, their masses split,  
and massless modes appear !

# Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model

## ■ NJL Lagrangian

$$L = \bar{q} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \frac{G^2}{2 \Lambda^2} [(\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \tau q)^2]$$

QCD において quark の高運動量成分、  
gluon を積分

→ QCD の対称性を保った  
quark の有効理論  
( $m=0$  で chiral sym. をもつ)

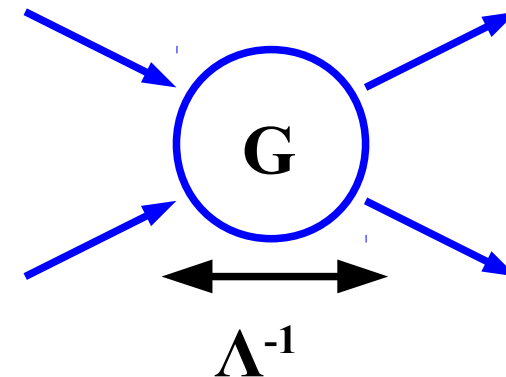
$$S = \bar{q} q, P = \bar{q} i \gamma_5 \tau q$$

→  $S^2 + P^2 = \text{invariant under chiral transf.}$

## ■ Euclidean

$$(x_\mu)_E = (\tau = it, \mathbf{x}), (\gamma_\mu)_E = (\gamma_4 = i \gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$L_E = \bar{q} (-i \gamma_\mu \partial_\mu + m) q - \frac{G^2}{2 \Lambda^2} [(\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \tau q)^2]$$



*Nambu, Jona-Lasinio ('61), Hatsuda, Kunihiro ('94)*



# NJL model: Partition Function

## Partition Function

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{NJL}} &= \int Dq D\bar{q} \exp\left[-\int d^4x L_{\text{NJL}}\right] \\
 &= \int Dq D\bar{q} D\Sigma \exp\left[-\int d^4x \left\{ \underbrace{\bar{q}(-i\gamma\partial + m + \overbrace{G\Sigma}^M)}_D q + \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \right\}\right] \\
 &= \int D\Sigma \exp\left[-S_{\text{eff}}(\sigma, \boldsymbol{\pi}; T)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrammatic representation: } \text{double line} = \text{single line} - \text{single line with a blue circle} \\
 & G = G_0 - G_0 \Sigma G
 \end{aligned}$$

## Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$-\frac{G^2}{2\Lambda^2} \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2 \right] \rightarrow \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + G \bar{q} \underbrace{(\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})}_\Sigma q$$

## Effective Action

$$S_{\text{eff}}(\Sigma; T) = -\log \det D + \int d^4x \frac{\Lambda^2}{2} [\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)]$$

経路積分において、フェルミオンは反可換な Grassmann 数

# Appendix: Bosonization & Grassman Integral

## ■ Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$\exp\left[\frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2}\right] = \int d\sigma \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{2}\left(\sigma - \frac{GS}{\Lambda^2}\right)^2 + \frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2}\right]$$

$$\exp\left[\frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2}\right] = \int d\pi^a \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{2}\left(\pi^a - \frac{GP^a}{\Lambda^2}\right)^2 + \frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2}\right]$$

## ■ Grassman number

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. constant} = 0 \quad , \quad \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. constant} \equiv 1$$

$$\begin{aligned} \int d\chi d\bar{\chi} \exp[\bar{\chi} A \chi] &= \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!} (\bar{\chi} A \chi)^N = \dots = \det A \\ &= \exp[-(-\log \det A)] \end{aligned}$$

**Bi-linear Fermion action leads to  $-\log(\det A)$  effective action**

# Fermion Determinant with Mean Field Approximation

- Fermion determinant をいかに計算するか？  
→ 平均場近似 + Fourier 変換により、解析的な計算が可能

Mean field approx.  $\Sigma(x) = \sigma = \text{const.}$

Fourier transf.  $q(x) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n, k} \exp(-i \omega_n \tau + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) q_n(\mathbf{k})$

Fermion matrix は対角的となる。

$$D = -i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - i \gamma_4 \partial_\tau + M = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - \gamma_4 \omega + M = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - i \gamma_0 \omega + M$$

$$= \begin{pmatrix} -i \omega + M & \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & i \omega + M \end{pmatrix}$$

$$\det D = \prod_{n, k} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2} \quad (d_f = 4 N_c N_f = \text{Fermion d.o.f.})$$

$$\rightarrow F_{\text{eff}} = \Omega/V = -\frac{T}{V} \log Z = -\frac{T}{V} \sum_{n, k} \log (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2} + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2$$

# Effective potential of NJL model

## ■ 松原振動和 → 有効ポテンシャル

$$F_{\text{eff}} = \Omega / V = -d_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_k}{2} + T \log(1 + e^{-E_k/T}) \right] + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2$$

ゼロ点エネルギー + クォークの熱励起部分 + 補助場

## ■ 真空 (T=0, μ=0) での有効ポテンシャル (chiral limit, m=0)

$$F_{\text{eff}} = -\frac{d_f}{2} \int^{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k + \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 = \Lambda^4 \left[ -\frac{d_f}{2} I(x) + \frac{x^2}{2G^2} \right] \quad (x = M/\Lambda)$$

$$\underbrace{\int^{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k}_{\Lambda^4 I(M/\Lambda)}$$

$$\frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} = -\frac{d_f}{16\pi^2} + \frac{x^2}{2} \left[ \frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \right] + O(x^4 \log x) \quad (G_c^2 = 8\pi^2/d_f)$$

**$G > G_c$  のとき、2次の係数が負 → カイラル対称性の自発的破れ**

$$I(x) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \sqrt{1+x^2}(2+x^2) - x^4 \log \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right] \simeq \frac{1}{8\pi^2} \left[ 1+x^2 + \frac{1}{8}x^4 \left( 1+4 \log \frac{x}{2} \right) + O(x^6) \right]$$

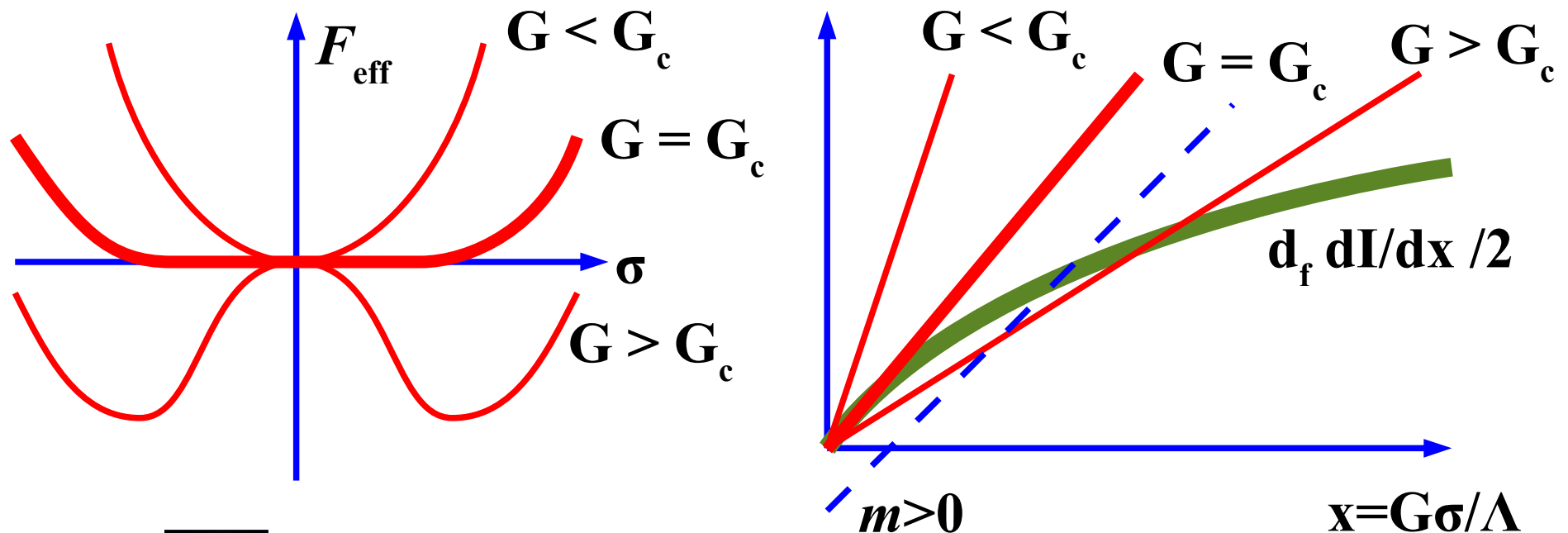
# Spontaneous breaking of chiral symmetry

- $F_{\text{eff}}$  が最小になる  $\sigma$  が実現される (Gap equation)

$$\frac{1}{\Lambda^4} \frac{\partial F_{\text{eff}}}{\partial x} = -\frac{d_f}{2} \frac{dI(x)}{dx} + \frac{x}{G^2} = 0$$

$G > G_c$  のとき有限の  $\sigma (\sim q^{\text{bar}} q)$  の解がエネルギー最小状態を与える

*quark* 間の引力が十分に強ければ、 $\sigma (\sim q^{\text{bar}} q)$  が凝縮し、構成子クォークの質量を生み出す。(Nambu, Jona-Lasinio ('61))



# Chiral Transition at Finite $T$

## Effective potential at finite $T$ in NJL

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} &= -\frac{d_f}{2} I(x) - \frac{d_f}{\Lambda^4} P(M; T) + \frac{x^2}{2G^2} \\ &= -\frac{d_f}{16\pi^2} - \frac{d_f \pi^2}{90} \frac{7}{8} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^4 + \frac{x^2}{2} \left[ \frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^2\right) \right] + O(x^4 \log x) \end{aligned}$$

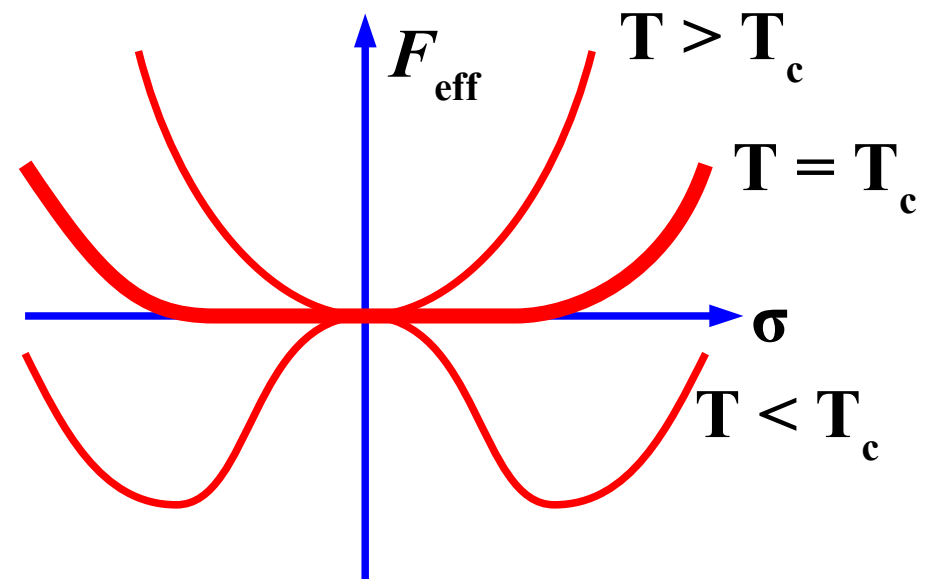
Stefan-Boltzmann

$$P(M; T) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{3E} \frac{1}{\exp(E/T) + 1}$$

→  $T < 3^{1/2} \Lambda/\pi$  の範囲で、  
カイラル相転移が起こるはず

有限温度での  
カイラル相転移を示唆

圧力への質量補正



## ■ カイラル対称性

- クォーク質量が小さいときに QCD がもつ対称性
- 自発的なカイラル対称性の破れがハドロン質量を生み出す。

## ■ 南部 - ヨナラシニヨ模型 (NJL)

- クォーク・反クォークの引力が強い場合には、クォーク・反クォーク対 ( $q^{\text{bar}}q$ ) が真空中で凝縮(カイラル凝縮)して、構成子クォークの質量を生み出す。
- 有限温度ではクォークの熱励起効果により凝縮が弱められ、ある温度で凝縮が消える(カイラル対称性の回復)。

## ■ 技術的な部分

- 経路積分において Fermion は反可換な Grassman 数で表す。  
(Fermion determinant, 反周期境界条件)
- クォーク間の相互作用のボソン化による取扱い  
(Hubbard-Stratonovich transf.)

- 有限密度の場合に、分配関数はどう変わるか？
- Example: Relativistic Mean Field (RMF)

$$L = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma) \psi + L_{\text{meson}}(\Phi) \quad (\Phi = \sigma, \omega, \rho)$$

$$\Sigma = g_\sigma \sigma + \gamma^0 (g_\omega \omega^0 + g_\rho \rho^0 \tau)$$

- Euclid 化 + 化学ポテンシャルの導入

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} D\Phi \exp \left[ - \int d^4x (L - \mu \psi^\dagger \psi) \right]$$

$$= \int D\psi D\bar{\psi} D\Phi \exp \left[ - \int d^4x \{ \bar{\psi} D\psi + L_{\text{meson}}(\Phi) \} \right]$$

$$= \int D\Phi \exp \left[ - S_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu) \right]$$

$$D = -i \gamma \partial - \mu \gamma^0 + M + \Sigma$$

- 有効作用

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(F)} + S_{\text{meson}} = - \sum_{n, k} \log \det D_{n, k} + \int d^4x L_{\text{meson}}$$



## Appendix: Finite $\mu$ (cont.)

- 一様な場を仮定  $\rightarrow$  Fourier 変換により  $D$  をブロック対角化

$$D_{n,k} = \gamma^0 (-i\omega_n - (\mu - V^0)) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M + g_\sigma \sigma$$

$$\rightarrow \det D = \left[ (\omega_n + i\mu^*)^2 + E^{*2} \right]^2$$

$$\mu^* = \mu - g_\omega \omega^0 - g_\rho \rho^0 \boldsymbol{\tau}, \quad E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}, \quad M^* = M + g_\sigma \sigma$$

- 松原振動数和を実行

$$F_{\text{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \underbrace{E^*}_{\text{ゼロ点}} + \underbrace{T \log \left( 1 + e^{-(E^* - \mu^*)/T} \right)}_{\text{粒子 (核子)}} + \underbrace{T \log \left( 1 + e^{-(E^* + \mu^*)/T} \right)}_{\text{反粒子 (反核子)}} \right]$$

- 温度 0 の場合      ゼロ点      粒子 (核子)      反粒子 (反核子)

$$F_{\text{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2} \int^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* + d_N \int^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* - \mu^* \rho_B \quad (d_N = d_f/2)$$

ゼロ点エネルギーは核子のループから現れる  
 $\rightarrow$  RMF では通常無視

# Phase diagram

## GL expansion at finite $\mu$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_F}{d_f V} &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log(1 + e^{-(E_k - \mu)/T})(1 + e^{-(E_k + \mu)/T}) \\ &= -P_{SB}^F - \frac{M^2 \Lambda^2}{16\pi^2} + \frac{M^2 \mu^2}{16\pi^2} + \frac{M^2 T^2}{48} + \text{const.} + \mathcal{O}(M^4), \end{aligned}$$

Second order boundary  $T^2 + \mu_B^2/3\pi^2 = T_c^2$  ( $\mu_B = 3\mu$ )

