

直接反応理論

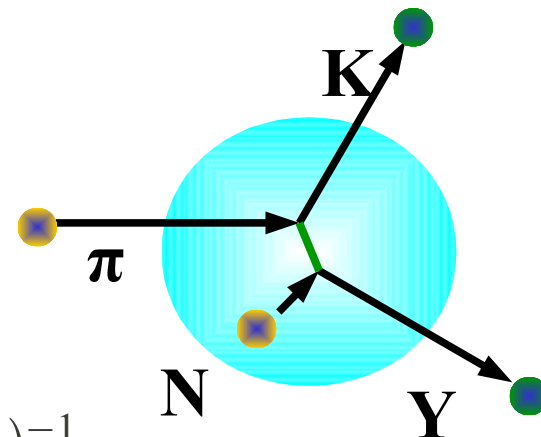
Impulse Approximation (1)

- 短時間の反応であれば
入射粒子と核の反応 $\sim \Sigma$ (入射粒子と核内核子の反応)
→ Impulse 近似

- Lippmann-Schwinger 方程式
(potential 問題)

$$\Psi^{(+)} = \phi + \hat{G}_0 \hat{V} \Psi^{(+)}$$

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}, \quad \phi = \exp(i \vec{k}_i \cdot \vec{r}), \quad \hat{G}_0 = (E - \hat{K} + i \varepsilon)^{-1}$$



- Green's function

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad \rightarrow \quad f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}_f | \hat{V} | \Psi^{(+)} \rangle$$

- T-matrix (transition matrix)

$$\langle \vec{k}_f | \hat{T} | \vec{k}_i \rangle \equiv \langle \vec{k}_f | \hat{V} | \Psi^{(+)} \rangle \quad \rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{T}$$

Impulse Approximation (2)

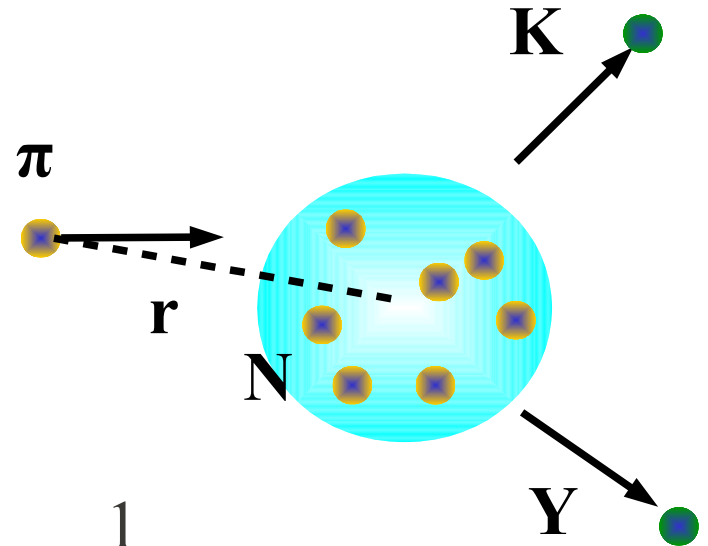
■ ハドロン - 核反応

$$\hat{H} = \sum_i \hat{K}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} v_{ij}$$

$$= \hat{K}(\vec{r}) + \hat{H}_A(\xi) + \sum_{i=1}^A v(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$= \hat{H}_0 + \hat{V}$$

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{T} \quad , \quad \hat{G}_0 = \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\varepsilon} = \frac{1}{E - \hat{H}_A - \hat{K} + i\varepsilon}$$



形式的にはポテンシャル問題と同じだが、
多体問題なのでそのままでは解けない。

■ 方針: T を核内核子との散乱振幅 τ_i で表し、

最後に i と散乱した振幅 T_i の和で T を求める。

$$\tau_i = v_i + v_i G_0 \tau_i \quad , \quad T_i = v_i + v_i G_0 T \quad , \quad T = \sum_i T_i$$

$$\rightarrow T = \sum_i T_i = \sum_i \tau_i + \sum_i \tau_i G_0 \sum_{j \neq i} T_j$$

Impulse Approximation (3)

■ 近似的取扱い

- 近似 1 : 質量数が大きいとして、 $O(1/A)$ を無視する。

$$\sum_{j \neq i} T_j \simeq T \rightarrow T = \tilde{T} + \tilde{T} G_0 T \quad (\tilde{T} = \sum_i \tau_i)$$

- 近似 2 : 核子波動関数は反対称化されているので、どの T_i も同じ。
(Kerman-McManus-Thaler の多重散乱理論)

$$\sum_{j \neq i} T_j \simeq \frac{A-1}{A} T \rightarrow T' = \tilde{T}' + \tilde{T}' G_0 T' \quad (\tilde{T}' = \frac{A-1}{A} \sum_i \tau_i, T' = \frac{A-1}{A} T)$$

いずれの場合も、 $\sum \tau_i$ は光学ポテンシャルの役割を果たす

■ Impulse approximation

$$T \simeq \sum_i \tau_i \simeq \sum_i t_i$$

- 1 段階反応を仮定
- 核内 2 体散乱振幅を自由空間の散乱振幅と同じと仮定

断面積と有効核子数 (1)

■ Fermi's Golden Rule

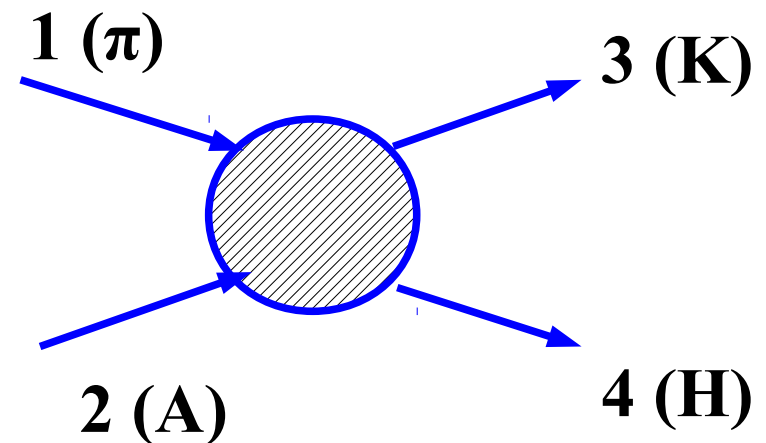
$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \rho_E$$

$$\rightarrow d\sigma = \frac{W}{v_i} = \frac{1}{v_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |T_{fi}|^2 \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\sigma}{dE_3 d\Omega_3} = \frac{p_3 E_3}{(2\pi)^2 v_1} |T_{fi}|^2 \delta(\omega - E_1 + E_3) \quad (\omega = E_4 - E_2)$$

$$T_{fi} = \langle \chi^{(-)}(\vec{k}_f) f | \sum_i t_i | \chi^{(+)} i \rangle$$

χ : 入射・出射粒子の w.f.、
 i, f : 核の始状態、終状態



断面積と有効核子数 (2)

■ 素過程散乱振幅についての近似

- 入射・出射粒子の運動量と入射エネルギーで表せる
- 短距離力である

$$\langle \vec{r}_2 \vec{r}_4 | t | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \simeq t(E, \vec{k}_1, \vec{k}_3) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_3 dE_3} &= \frac{p_3 E_3}{(2\pi)^3 v_1} |t|^2 N_{\text{eff}} \delta(\omega + E_3 - E_1) \\ &\simeq \beta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab.}}^{\text{elem.}} N_{\text{eff}} \delta(\omega + E_3 - E_1) \end{aligned}$$

$$N_{\text{eff}} = \sum_f \left| \int d\vec{r} \chi_3^{(-)*}(\vec{r}) \chi_1^{(+)}(\vec{r}) \langle f | \sum \hat{O}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) | i \rangle \right|^2$$

Green's Function Method

- 1 粒子過程を仮定し、終状態の原子核の状態を見ないとする。
→ 完全系を作るとすれば、 δ 関数をグリーン関数に置き換え可能

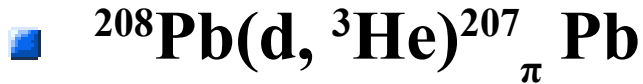
$$\frac{d^2 \sigma}{dE_3 d\Omega_3} = \frac{p_3 E_3}{(2\pi)^2 v_1} |T_{fi}|^2 \delta(\omega - E_1 + E_3) \quad (\omega = E_4 - E_2)$$

$$\sum_f |\langle \chi_3 f | \hat{t} | \chi_1 i \rangle|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) = -\frac{|t|^2}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{\alpha} \langle F_{\alpha} \left| \frac{1}{E - \hat{H}_Y + i\varepsilon} \right| F_{\alpha} \rangle \right]$$

$$\frac{d^2 \sigma}{dE_3 d\Omega_3} = -\frac{p_3 E_3}{(2\pi)^2 v_1} |t|^2 \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{\alpha} \langle F_{\alpha} | G_{\alpha\alpha}(E - E_{\alpha}) | F_{\alpha} \rangle \right]$$

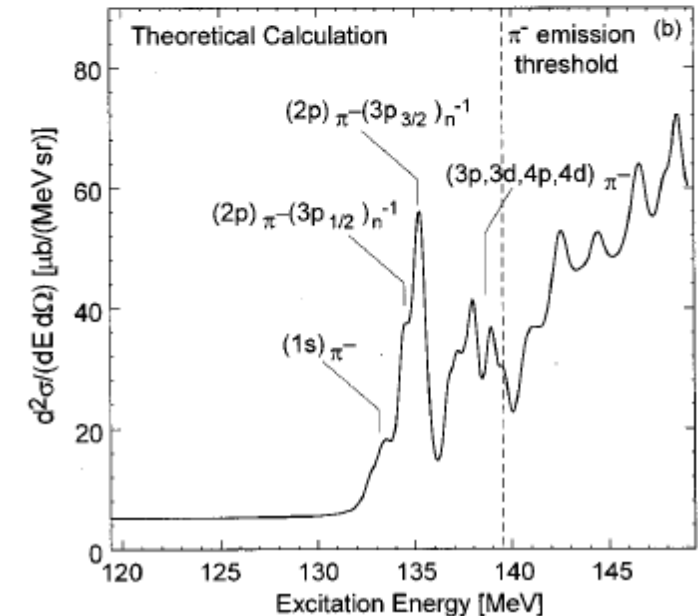
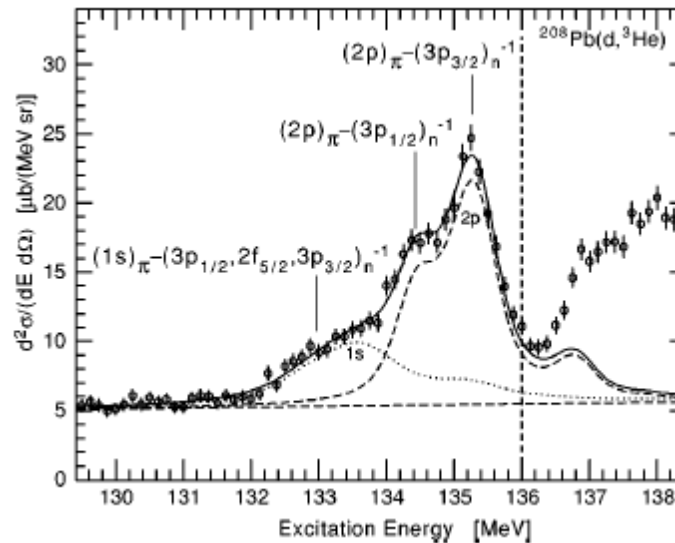
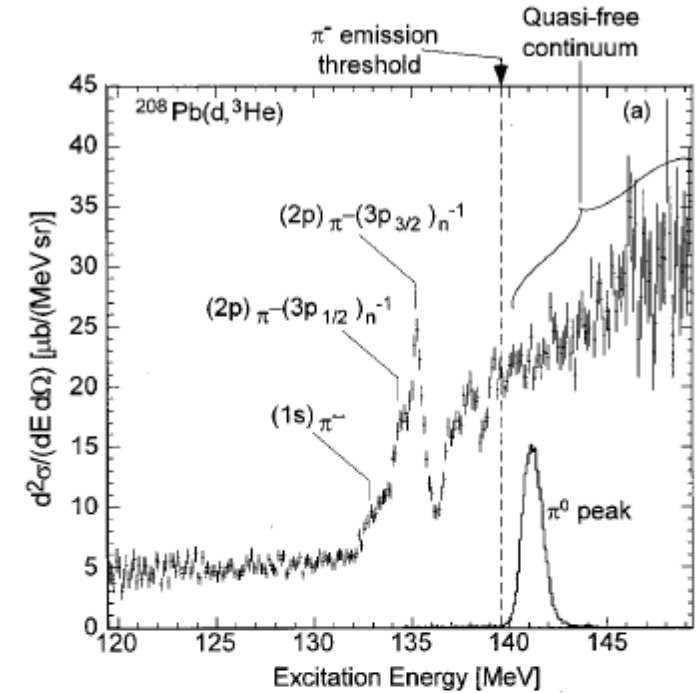
$$F_{\alpha}(\vec{r}) = \chi_3^{(-)*}(\vec{r}) \chi_1(\vec{r}) \psi_{\alpha}$$

Deeply Bound pionic atom (1)



$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{dA \rightarrow ^3\text{He}(A-1)\pi} = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{dn \rightarrow ^3\text{He}\pi} \times N_{\text{eff}}$$

$$N_{\text{eff}} = \sum_{M, m_s} \left| \int \chi_f^*(\mathbf{r}) \xi_{1/2, m_s}^*(\sigma) [\phi_i^*(\mathbf{r}) \otimes \psi_{j'}(\mathbf{r}, \sigma)]_{JM} \chi_i(\mathbf{r}) d^3r d\sigma \right|^2 \times C^2 S / (2j' + 1)$$



K. Itahashi et al., PRC62('00)025202

Deeply Bound pionic atom (2)

■ 正確にスペクトルを再現するには、

- 波動関数の歪曲 (Distorted Wave Impulse Approximation)
- 始状態・終状態の波動関数の光学因子 (spectroscopic factor)

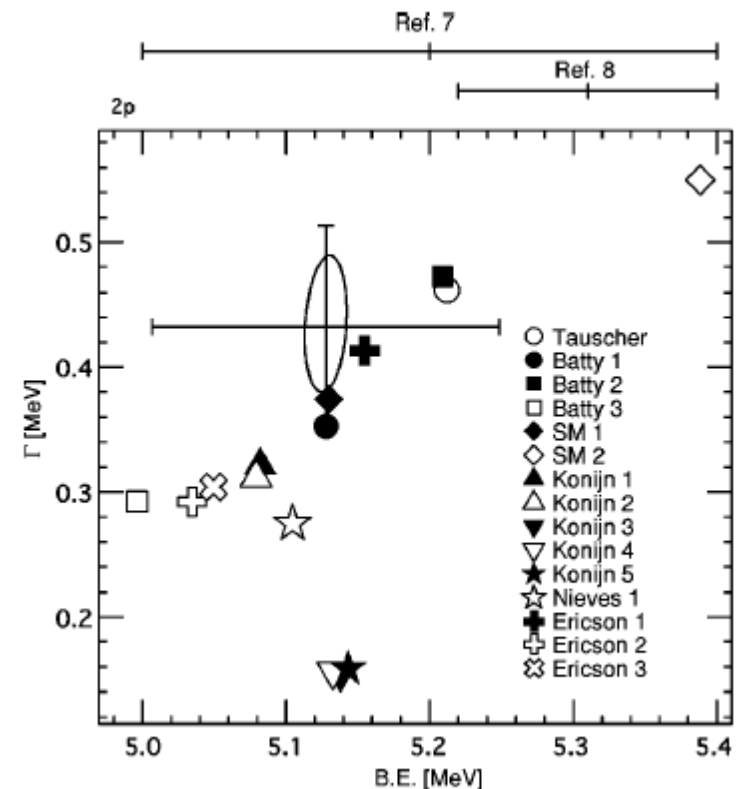
が必要

$$\chi_f^*(\mathbf{r})\chi_i(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})D(\mathbf{b},z)$$

$$D(\mathbf{b},z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^z \sigma_d \rho(\mathbf{b},z')dz' + \int_z^{\infty} \sigma_{^3\text{He}} \rho(\mathbf{b},z')dz'\right)\right]$$

- 束縛エネルギー・幅
- 核内のカイラル対称性

K. Itahashi et al., PRC62('00)025202



Hyperon Potentials in Nuclear Matter

■ $U_{\Lambda}(\rho_0) \sim -30$ MeV: Well known from single particle energies

■ Naïve expectation

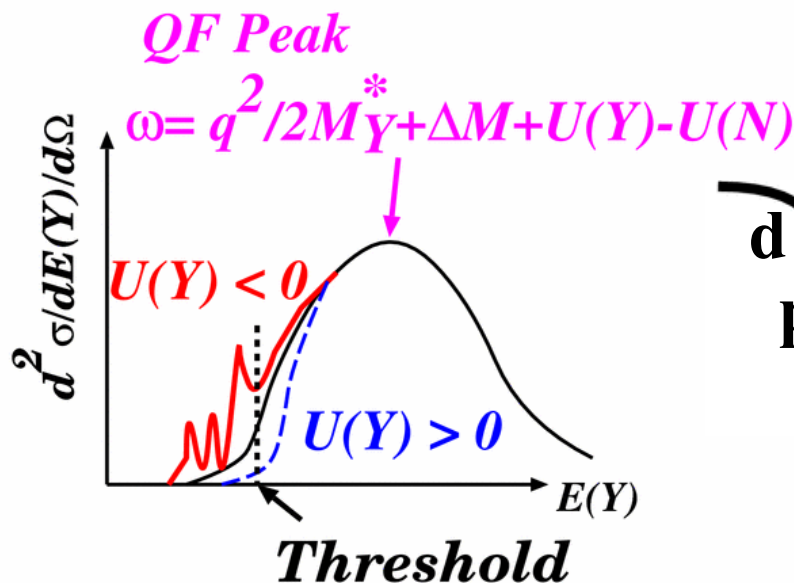
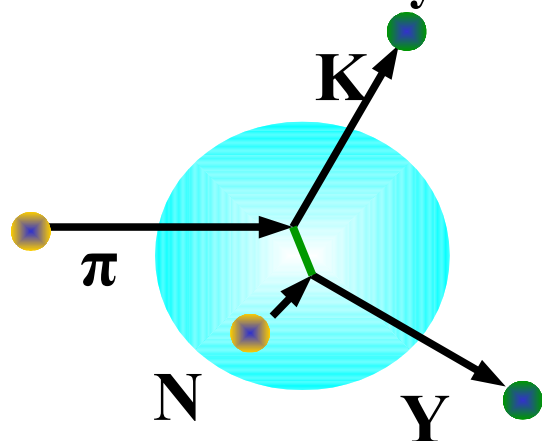
= Quark Number (ud number) Scaling

$$U_{\Lambda} \sim 2/3 U_N \rightarrow U_{\Sigma} \sim 2/3 U_N \sim -30 \text{ MeV}$$

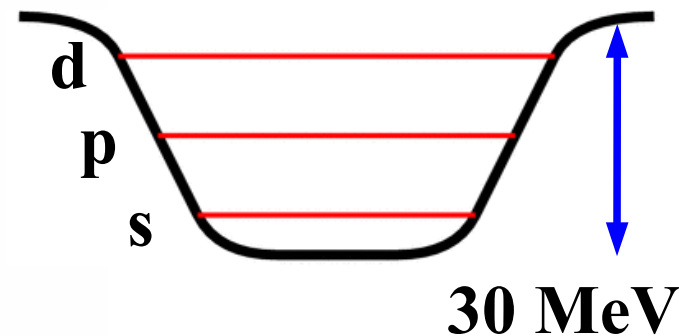
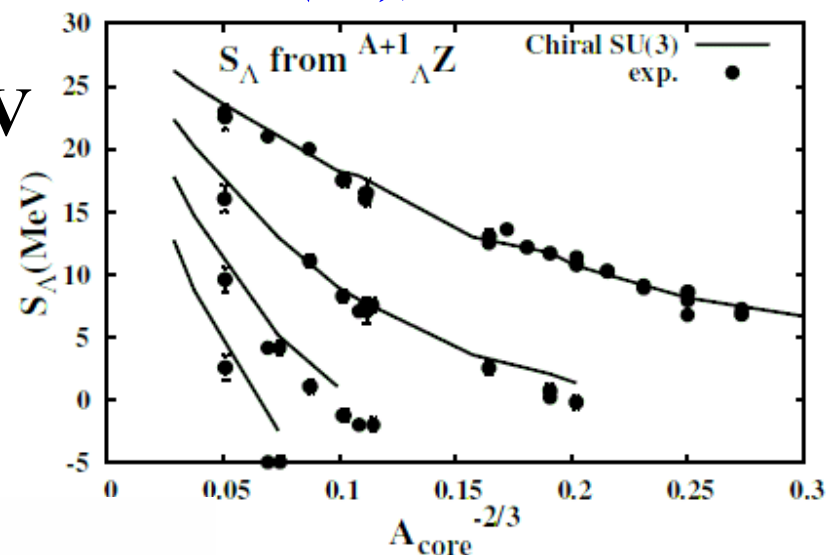
■ Problems with Σ

● Only one bound state ${}^4_{\Sigma}\text{He}$ (Too light !)

→ Continuum (Quasi-Free) Spectroscopy is necessary



Tsubakihara, Maekawa, AO, EPJA33('07),295.



Hypernuclear production (discrete state)

■ Substitutional reaction

- Magic momentum 近辺では $q \sim 0$
→ 核子軌道にハイペロンが入る状態が有利

*H. Bando, T. Motoba, J. Zofca,
Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990), 4021-4198.*

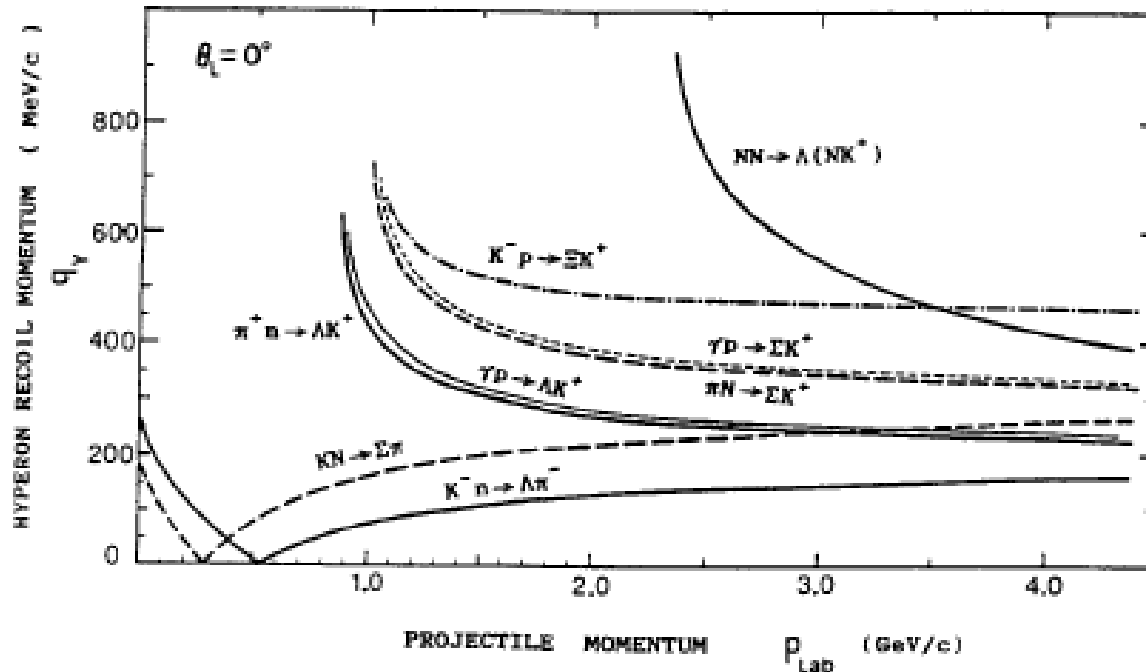
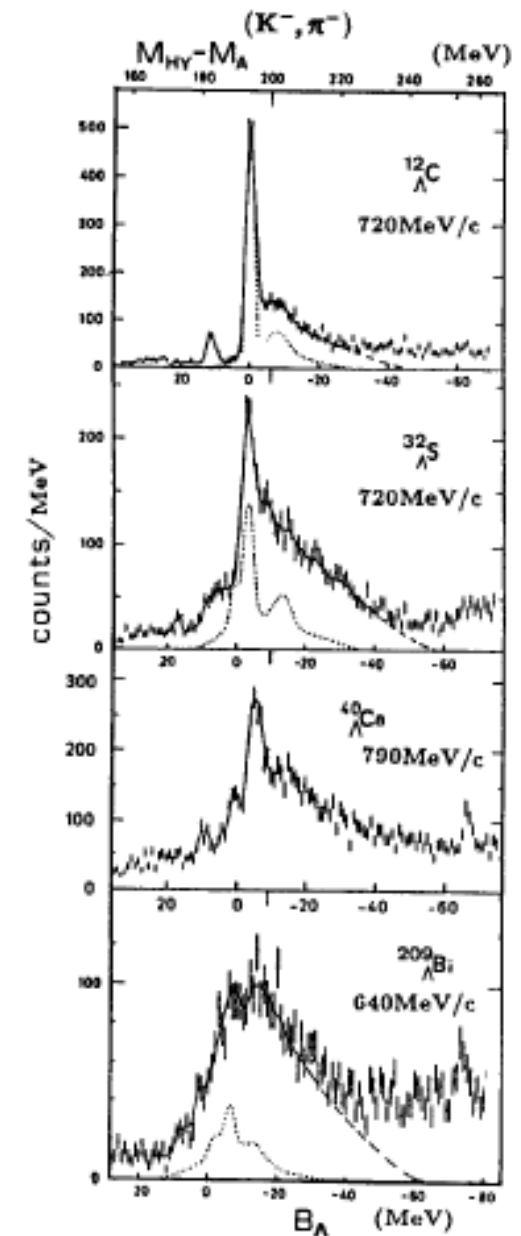


Fig. 2.3. The momentum q_Y transferred to the hyperon Y as a function of the projectile momentum $p_{\text{proj}} = p_a$ in the reaction $aN \rightarrow Yb$ at $\theta_{b,L} = 0^\circ$.



Hypernuclear production (discrete state)

- (π^+, K^+) reaction
 - Finite momentum transfer
 - Finite angular momentum transfer

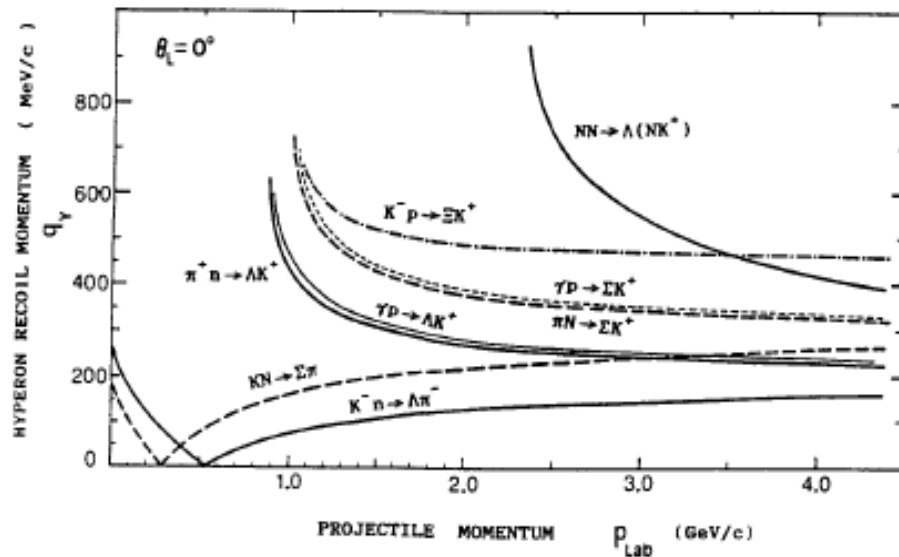
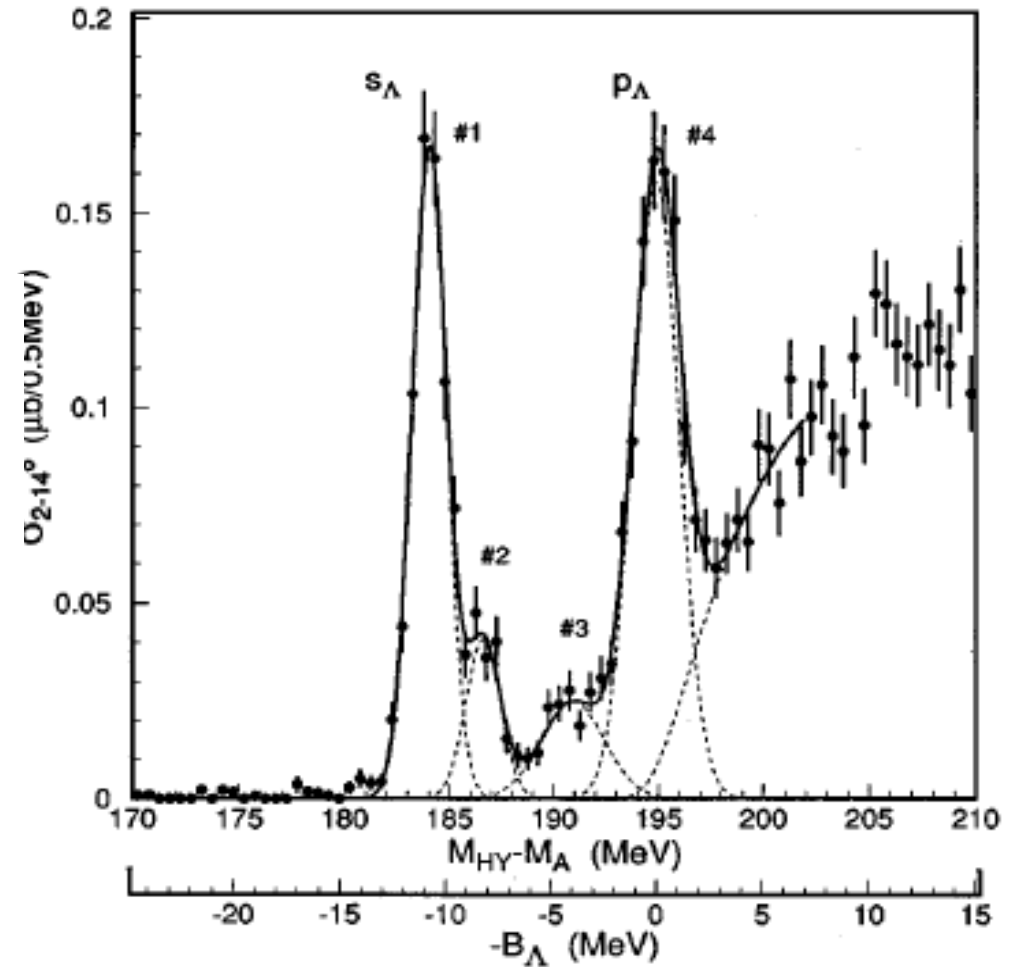


Fig. 2.3. The momentum q_Y transferred to the hyperon Y as a function of the projectile momentum $p_{\text{proj}} = p_\alpha$ in the reaction $\alpha N \rightarrow Yb$ at $\theta_{b,L} = 0^\circ$.



Hasegawa et al.(1996)

Quasi-Free Λ Production (1)

- 有効核子数法 → 十分に離散的な束縛状態で成功
→ 連続状態では？

■ Green's Function Method

O. Morimatsu, K. Yazaki, NPA483('88)493

- 束縛状態と連続状態を同時に記述可能

$$\frac{d^2\sigma}{dE_K d\Omega_K} = \beta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{\text{elem}} S(\omega, q)$$

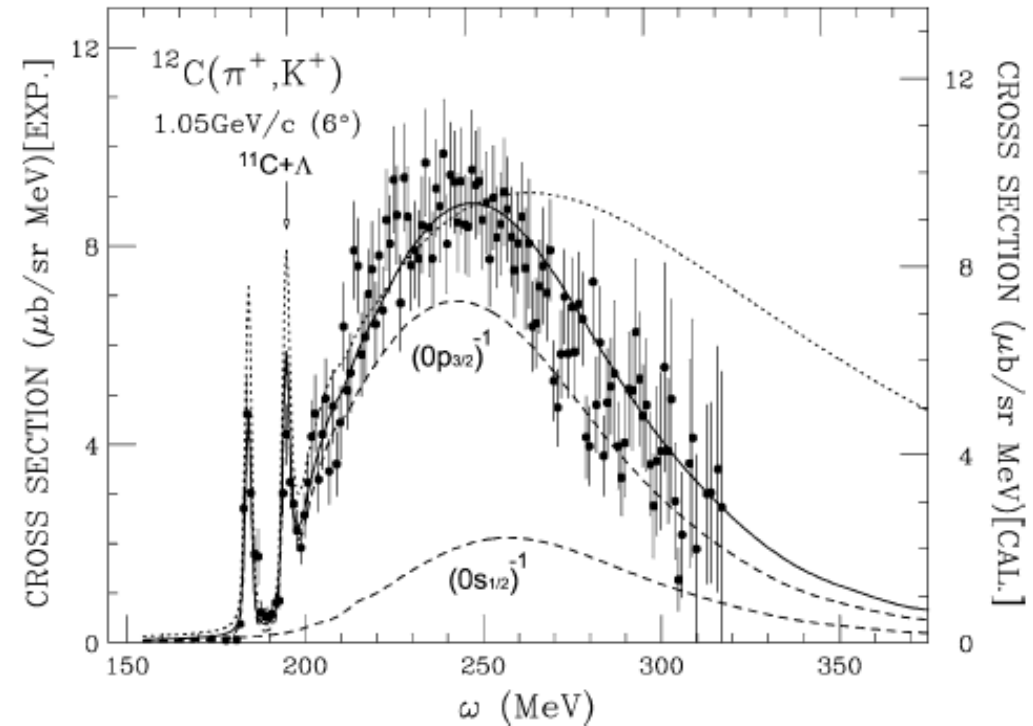
$$S(\omega, q) = \sum_f |\langle f | \hat{O} | i \rangle|^2 \delta(\omega + E_K - E_\pi)$$

$$= (-) \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha\alpha'} \int dr dr' F_\alpha^\dagger(r) G_{\alpha\alpha'}(E_f; r, r') F_{\alpha'}(r')$$

$$F_\alpha(r) = \chi_K^{(-)*} \left(\frac{M_C}{M_A} r \right) \chi_\pi^{(+)} \left(\frac{M_C}{M_A} r \right) \langle \alpha | \Psi_N(r) \rangle,$$

$$\hat{O} = \sum_{j=1}^A \int dr \chi_K^{(-)*}(r) \chi_\pi^{(+)}(r) \hat{U}_-(j) \delta(r - r_j)$$

$$\beta \equiv \left(1 + \frac{E_K^{(0)}}{E_\Lambda^{(0)}} \frac{p_K^{(0)} - p_\pi^{(0)} \cos\theta}{p_K^{(0)}} \right) \frac{p_K E_K}{p_K^{(0)} E_K^{(0)}}$$



T. Harada, Y. Hirabayashi / Nuclear Physics A 744 (2004) 323–343

Quasi-Free Λ Production

■ Kinematical factor による t-matrix の表現

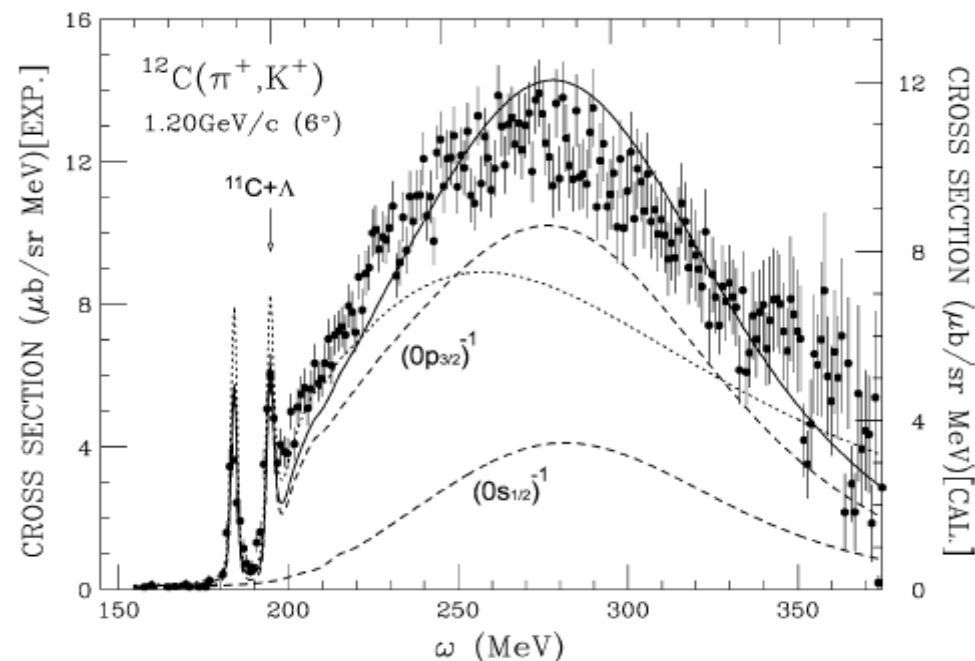
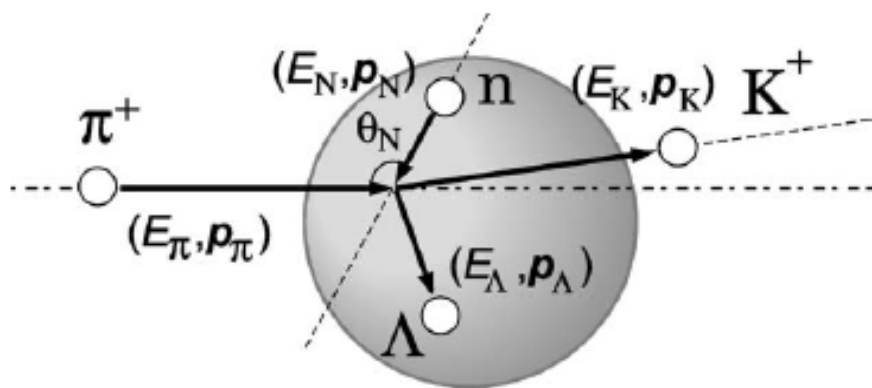
- 狙うエネルギー領域が狭い場合には有効

→ 広いエネルギー領域をカバーする時には最適化運動量を用いる

$$\frac{d^2\sigma}{dE_K d\Omega_K} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{\text{opt}} S(\omega, q),$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{\text{opt}} \equiv \frac{p_K E_K}{(2\pi)^2 v_\pi} |t^{\text{opt}}(p_\pi; \omega, q)|^2$$

$$t^{\text{opt}}(p_\pi; \omega, q) = \frac{\int_0^\pi \sin\theta_N d\theta_N \int_0^\infty dp_N p_N^2 \rho(p_N) t(E_2; p_\pi, p_N)}{\int_0^\pi \sin\theta_N d\theta_N \int_0^\infty dp_N p_N^2 \rho(p_N)} \quad \left| \begin{array}{l} p_N = p_N^* \end{array} \right.$$



T. Harada, Y. Hirabayashi / Nuclear Physics A 744 (2004) 323–343

Quasi-Free Σ Production

■ KEK data of Σ^- production on nuclear target

H. Noumi, et al., Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 072301;

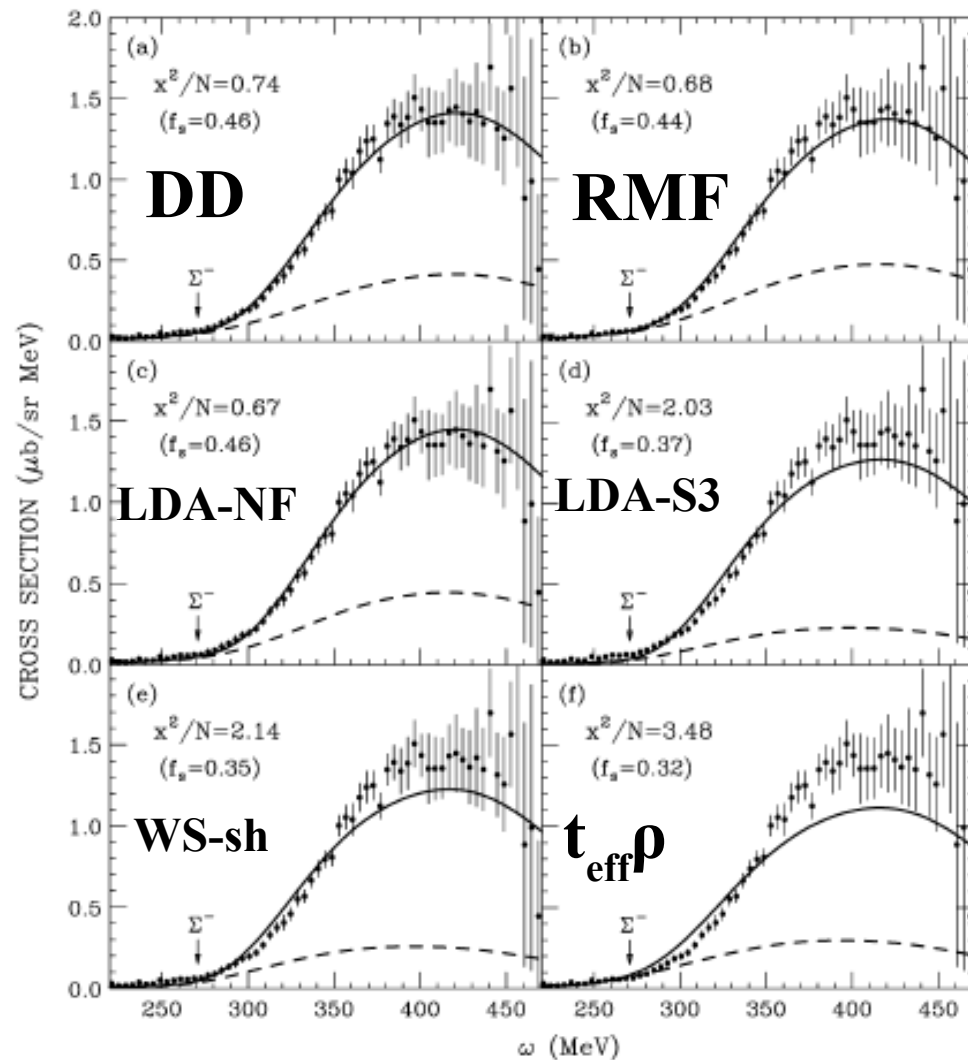
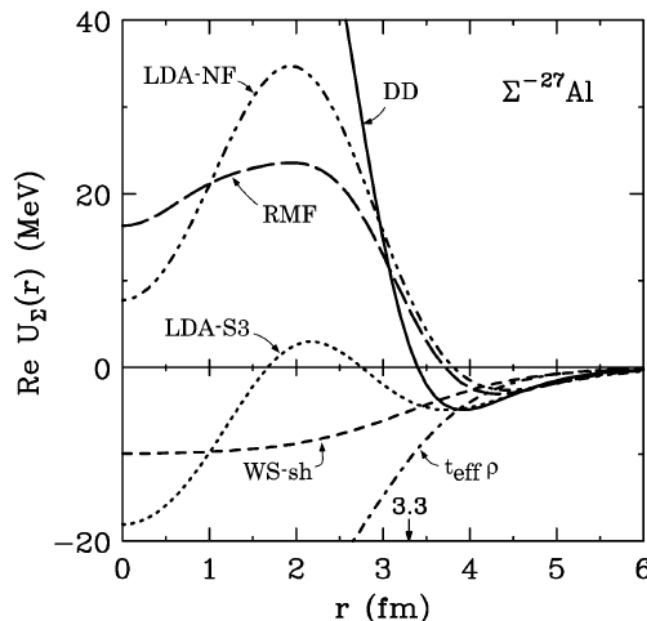
H. Noumi, et al., Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 049902, Erratum.

● Naïve analysis suggest

Re $U \sim 90$ MeV

■ Green's Function Method +OFA t-matrix (DWIA)

● QF data is consistent with Atom data, but sensitivity is small.



T. Harada, Y. Hirabayashi / Nuclear Physics A 759 (2005) 143–169

“Stars” of Hyperon Potentials (A la Michelin)

- $U_{\Lambda}(\rho_0) \sim -30 \text{ MeV}$ 
 - *Bound State Spectroscopy + Continuum Spectroscopy*
- $U_{\Sigma}(\rho_0) > +15 \text{ MeV}$ 
 - Continuum (Quasi-Free) spectroscopy with *Optimal Fermi Averaging t-matrix*
 - Atomic shift data (attractive at surface) should be respected.
 - First example of quark Pauli blocking effects in potential ?
- $U_{\Xi}(\rho_0) \sim -14 \text{ MeV}$ 
 - No confirmed bound state, No atomic data, High mom. transf., $\rightarrow$ Small Potential Deps.
 - Continuum low-res. spectrum shape $\rightarrow -14 \text{ MeV}$
 - Spin-Isospin deps. (π exch.) $\rightarrow$ Deformation $\rightarrow$ Spectrum shape may be modified.



■ ハドロン - 原子核反応を記述する、現時点で「最良」の方法

- 束縛状態の生成
→ 正確な核構造計算
(配位混合を取り入れた Shell 模型計算、クラスター計算、....)
+ 歪曲波インパルス近似 (DWIA)
(spectroscopic factor と光学ポテンシャルによる
入射波・出射波の歪曲を考慮)
- 連続状態のスペクトル
→ 正しい境界条件を与える Green's Function Method を用いた
DWIA
+ 最適化フェルミ運動量平均を行った t-matrix
(Optimal Fermi Averaging t-matrix)

■ ただし、問題は多い

- 束縛状態の生成断面積の絶対値
- 多段階反応
- 連続状態での配位混合の役割