

核物質基礎論

菅沼秀夫・大西 明

Abstract

核物質基礎論後半部分(大西担当)では核子・ハドロン・クォークからなる物質(単純のため核物質とよぶ)の物性、および現象との関連について講義する。講義の内容は、10. 高温・高密度核物質概観、11. 有限温度・密度における場の理論入門、12. QCD 有効模型における相転移と相図、13. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題、14. 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論、を予定している。

10 高温・高密度核物質概観

10.1 量子色力学

強い相互作用の基本理論である量子色力学 (Quantum Chromodynamics; QCD) はクォークとグルーオンのダイナミクスを記述する非可換ゲージ理論である。QCD のラグランジアン (密度) は

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{2}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (10-1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad A_\mu = A_\mu^a t_a, \quad (10-2)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] = \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right) t_a, \quad (10-3)$$

と与えられる。ここで D_μ は共変微分、 $F_{\mu\nu}$ はグルーオン場の強度テンソルである。SU(N_c) の生成子 t_a はトレースレスの $N_c \times N_c$ エルミート行列であり、 $[t_a, t_b] = if_{abc}t_c$ (f_{abc} は構造定数, abc について反対称)、 $\text{tr}(t_a, t_b) = \delta_{ab}/2$ を満たす。QCD のラグランジアンは局所非可換ゲージ変換 $q(x) \rightarrow q'(x) = U(x)q(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$ ($U \in \text{SU}(N_c)$) の下で不変である。このラグランジアンは荷電粒子の電磁相互作用を記述する量子電磁力学 (QED) と似ている (QED は可換ゲージ理論) が、クォーク ($N_c = 3$ 成分) やグルーオン ($N_c^2 - 1 = 8$ 成分) がカラー自由度をもつ、 A_μ と $F_{\mu\nu}$ がともに $N_c \times N_c$ 行列である、グルーオン同士の相互作用がある、等の点で違いがある。

非可換ゲージ理論としての性質から QCD は大きなエネルギースケールにおいて相互作用が弱くなるという漸近的自由性を持つ [1]。クォークの種類は Table 1 に示す 6 種類が知られており、この場合にはグルーオンやクォークによる量子補正により、繰りこみの結果としてエネルギースケール Q の増加とともに

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (10-4)$$

($\Lambda \simeq 200$ MeV) と結合定数 g が減少するのである。逆にエネルギースケールが小さい場合には非摂動的な取り扱いが必要である。代表的な非摂動的効果として、カラーの閉じ込め [2] とカイラル対称性の自発的破れ [3] がある。前者はクォークやグルーオンが単独では観測できないこと、後者はクォークが大きな有効質量 (構成クォーク質量; constituent quark mass) を獲得し、南部-ゴールドストーン粒子である π 粒子の質量が小さくなる、等の現象として現れる。

QCD が強い相互作用の基礎理論であることは、様々な実験と考察から明らかになっている。

- クォークは様々なハドロンの存在を説明するために導入され [4, 5]、その後カラー自由度が導入された [6]。

Table 1: クォークの種類。質量は Particle Data Group の評価 [7] に基づく current quark mass である。括弧内はクォーク模型で用いられるおおよその質量 (constituent quark mass)。

世代	種類	電荷	質量
I	u	$+2/3$	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ (300) MeV
	d	$-1/3$	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ (300) MeV
II	c	$+2/3$	1.275 ± 0.025 (1.5) GeV
	s	$-1/3$	95 ± 5 (500) MeV
III	t	$+2/3$	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.87$ GeV
	b	$-1/3$	4.18 ± 0.03 (4.5) GeV

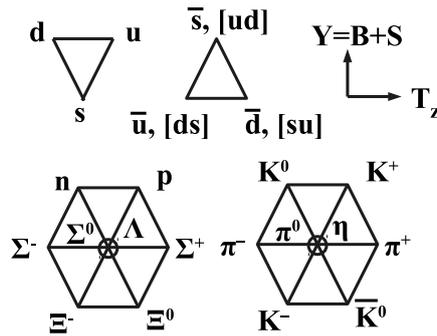


Figure 1: ハドロンの種類

- 漸近的自由性から高エネルギーにおける反応では摂動計算が可能であり、電子・陽電子から何らかのクォーク・反クォーク対を作る確率は $N_c \sum_q Q_q^2$ に比例する。ここで Q_q はそのエネルギーで十分に作られるクォークの電荷である。ミュオン対生成との生成断面積の比 (R-比)

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \rightarrow N_c \sum_q Q_q^2 \quad (10-5)$$

などから、 $N_c = 3$ であることが確認されている。また、高運動量移行反応によりハドロンを生成する深非弾性散乱 (deep inelastic scattering) は、ハドロン内部に電荷を持ちほぼ自由な運動をする点粒子が存在していることを示しており、高運動量移行の極限でスケーリングの性質を示す。このスケーリングはその破れを含めて QCD の摂動計算により説明できている。

- 非摂動領域では摂動計算は破綻するが、格子 QCD により精緻なシミュレーション計算が行われており、ハドロンの質量、閉じ込めポテンシャル、バリオン間相互作用などが求められ、実際のハドロンの性質を見事に再現している。

10.2 ハドロン

カラーの閉じ込めの性質から、クォーク・グルーオンは単独では現れず、複合粒子として観測されることとなる。特にクォークを含む複合粒子の場合には、カラー空間での回転によって変化しない (カラー 1 重項) の要請から、 $\bar{q}^a q^a$ 、 $\varepsilon_{abc} q^a q^b q^c$ 等の組み合わせで現れる。こうした複合粒子をハドロンとよぶ。

Table 2 に u, d, s クォークからなる代表的なハドロン、スピン $1/2$ を持つ正パリティ状態の基底状態バリオン (バリオン 8 重項) とスピン 0 を持つ負パリティ状態の基底状態中間子 (擬スカラー中間子 8 重項)、を示す。これらのハドロンは図 1 のようにアイソスピンの z 成分とハイパー電荷 ($T_z, Y = S + B$) で整理することができる。¹ バリオン 8 重項はストレンジクォークの数による差 (ストレンジクォーク 1 つあ

¹陽子、中性子はほぼ質量が同じであり、同じ粒子の 2 つの状態と考える。これをスピンの状態になぞらえて陽子・中性子を核子

Table 2: 代表的なハドロンの (バリオン 8 重項と擬スカラー中間子 8 重項)。質量は Particle Data Group の評価 [7] に基づく。

バリオン				メソン (中間子)			
種類	電荷	クォーク組成	質量	種類	電荷	クォーク組成	質量
p	+1	uud	938.27 MeV	π^+	+1	$u\bar{d}$	139.57 MeV
n	0	udd	939.57 MeV	π^0	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	134.98 MeV
Λ	0	$(uds - dus)/\sqrt{2}$	1115.68 MeV	π^-	-1	$d\bar{u}$	139.57 MeV
Σ^+	+1	uus	1189.37 MeV	K^+	+1	$u\bar{s}$	493.68 MeV
Σ^0	0	$(uds + dus)/\sqrt{2}$	1192.64 MeV	K^-	-1	$s\bar{u}$	493.68 MeV
Σ^-	-1	dds	1197.45 MeV	K^0	0	$d\bar{s}$	497.61 MeV
Ξ^0	0	uds	1314.86 MeV	\bar{K}^0	0	$s\bar{d}$	497.61 MeV
Ξ^-	-1	dds	1321.71 MeV	η	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	543.86 MeV

たり 200 MeV 程度) を除くと質量がほぼ同程度である。この近似的な対称性を (フレーバー)SU(3) 対称性と呼ぶ。この SU(3) 対称性は中間子とバリオンの結合定数を決定する上での指針となるなど、大きな成功を収めている。

10.3 QCD 相転移

QCD のもうひとつの大きな特徴は非摂動論効果を通じて真空自体が変化することである。物理的な真空ではカイラル凝縮・グルーオン凝縮等を持ち、摂動論的真空に比べてエネルギー密度が下がり、圧力は大きくなる。この真空の変化は摂動論的真空が作られている領域においてエネルギー密度、圧力をわずらすことに対応する [8]。

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{qg}} + B, \quad P = P_{\text{qg}} - B, \quad B^{1/4} = 90 \sim 300 \text{ MeV}. \quad (10-6)$$

ここで $\varepsilon_{\text{qg}}, P_{\text{qg}}$ はクォーク、グルーオンの場がもつエネルギー密度と圧力であり、摂動論的真空を作るために必要なエネルギー密度がバッグ定数 (bag constant) B である。こうした描像に基づいて、核子を摂動論的真空のバッグに 3 つのクォークが入った状態としてとらえた模型がバッグ模型 [8] である。

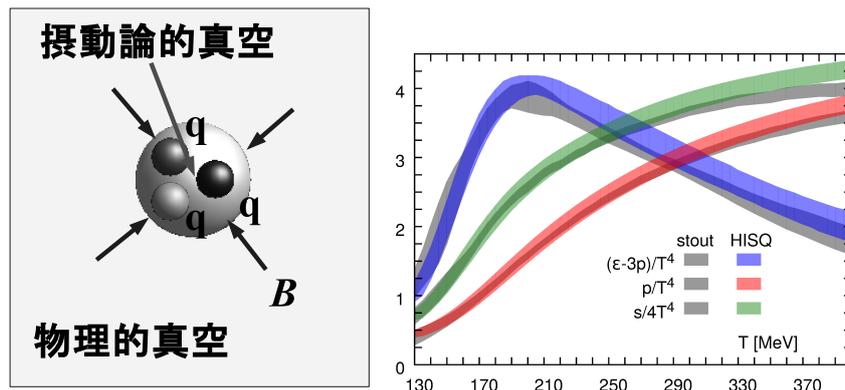


Figure 2: (左) バッグ模型 (bag model) 描像における真空。(右) 格子 QCD 計算によるゼロ密度における圧力 [10]。

のアイソスピンの上向き・下向き状態と考える。クォークの言葉では u, d クォークが軽いクォークのアイソスピン上下状態となる。 s クォークはストレンジネス量子数 $S = -1$ をもつ。バリオンはフレーバーについて反対称なクォーク対 (diquark, $[ud], [ds], [su]$) とクォークの組み合わせでできている。これらのクォーク対は反クォーク $\bar{s}, \bar{u}, \bar{d}$ と同じ $(T_3, Y) = (0, 2/3), (-1/2, -1/3), (1/2, -1/3)$ を持つ。

核物質の相図 (phase diagram)

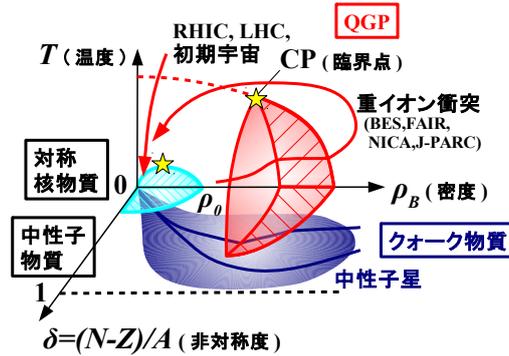


Figure 3: 核物質の相図

一方で QCD は漸近的自由を持つため、エネルギースケールが大きくなる高温・高密度の極限ではクォークやグルーオンは自由粒子として振る舞うはずである。すなわち、温度・密度を上げていくと、カイラル対称性が自発的に破れカラー自由度が閉じ込められた物理的真空をハドロンが動き回る状態 (ハドロン物質) から、カイラル対称性が回復しクォーク・グルーオンがほぼ自由に動きまわる状態 (パートン物質) への QCD 相転移がおこるはずである。クォーク・グルーオンが自由に動きまわる平衡に達した物質をクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) と呼ぶ。

バッグ模型において、クォーク質量をゼロとした場合、温度 T 、クォーク化学ポテンシャル μ_q における QGP の圧力は

$$P_{\text{QGP}} = 4N_c N_f \left(\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{24} \mu_q^2 T^2 + \frac{1}{48\pi^2} \mu_q^4 \right) + 2(N_c^2 - 1) \frac{\pi^2}{90} T^4 - B \quad (10-7)$$

と与えられる。 $4N_c N_f$ はクォークの自由度 (4 はスピン自由度と粒子・反粒子の自由度)、 $2(N_c^2 - 1)$ はグルーオンの自由度である。さて QCD 相転移温度はどの程度であろうか? ゼロ密度 ($\mu = 0$) におけるハドロン物質を質量ゼロの自由 π 粒子ガスとして扱おうと、その圧力は

$$P_\pi = 3 \times \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (10-8)$$

と与えられる。2相の圧力が等しくなる温度 T_c は、

$$T_c^4 = \frac{90}{\pi^2} \frac{B}{d_{\text{QGP}} - d_\pi} \quad (10-9)$$

$$\simeq (0.72 B^{1/4})^4 \quad (N_f = 2 \text{ の場合}) \quad (10-10)$$

($d_{\text{QGP}} = 4N_c N_f \times 7/8 + 2(N_c^2 - 1)$, $d_\pi = 3$) となり、バッグ定数を $B^{1/4} \simeq 220 \text{ MeV}$ [9] とすると $T_c \simeq 158 \text{ MeV}$ となり、最近の格子 QCD 計算結果 [10, 11] とほぼ一致する。

温度の上昇と同様に、密度を上昇させた場合にも相転移が期待される。核子はクォークからなる有限の大きさをもつ複合粒子であり、超高密度になると核子が重なりあい、どのクォークがどの核子に属しているかの判別がつかなくなってくるためである (パーコレーション描像)。残念ながら有限密度では、第一原理計算である格子 QCD 計算には符号問題があり、正確な結果を得ることができていない。また単純なバッグ模型描像でハドロン相を質量ゼロ核子のフェルミガスと近似した場合には相転移は起こらない。一方で高密度の極限ではクォーク対が凝縮したカラー超伝導 [12] 状態が基底状態に現れることが知られている。

現在考えられている核物質の相図を Fig. 3 に示す。この相図は核子数密度 (ρ_B)、温度 (T)、非対称度 (δ) の違いにより現れる物質の性質・組成が大きく変化することを示している。ゼロ密度・有限温度の相

転移では格子 QCD 計算が示すように、QCD 相転移は滑らかな crossover 転移である [13]。ゼロ温度・有限密度での相転移については不定性が大きいですが、カイラル有効模型の結果から一次相転移線、および結果として crossover と一次相転移の間に現れる QCD 臨界点 [14] が存在すると期待されている。こうした状態の変化を重イオン衝突実験や中性子星の観測により探索すべく、研究が進められている。

10.4 重イオン衝突による高温・高密度物質探索

高エネルギーでの原子核・原子核衝突 (重イオン衝突) は、実験室で大きな体積の高温・高密度核物質を作る唯一の手段であろう。これまで多くの加速器施設で重イオン衝突実験が行われてきた。代表的な高エネルギー重イオン加速器施設としては、

- BEVALAC at LBL (Bevatron+SuperHILAC (1971-1993), Lawrence Berkeley Laboratory, $\sim 800A$ MeV),
- SIS at GSI (Schwerionensynchrotron (1990-), Gesellschaft für Schwerionenforschung, $\sim 2A$ GeV),
- AGS at BNL (Alternating Gradient Synchrotron (1960-), Brookhaven National Laboratory, $\sim 10.6A$ GeV),
- SPS at CERN (Superconducting Proton Synchrotron, (1959-), $\sim 158A$ GeV),
- RHIC at BNL (Relativistic Heavy-Ion Collider (2000-), 衝突型 $\sqrt{s_{NN}} \leq 200\text{GeV}$),
- LHC at CERN (Large Hadron Collider, Relativistic Heavy-Ion Collider (2008-), 衝突型 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76, 5.5\text{TeV}$),

等がある。核子あたりの入射エネルギー E と核子対不変質量 $\sqrt{s_{NN}}$ の間には

$$\sqrt{s_{NN}} = \sqrt{2m_N(E + 2m_N)} \quad (10-11)$$

の関係がある。高エネルギー領域では入射エネルギーの $1/2$ 乗でしか重心系でのエネルギーが上がらないことが、衝突型加速器を利用する理由である。

重イオン衝突でどのようなエネルギー密度が到達できるのか、評価してみよう。核子対あたりの不変質量が $\sqrt{s_{NN}}$ であるとき、重心系におけるローレンツ・ファクターは $\gamma = \sqrt{s_{NN}}/2m_N$ で与えられる。原子核は入射軸 (z 軸) 方向に $1/\gamma$ 倍収縮するので、原子核が衝突によって完全に止まってしまう場合 (Landau 描像) [15] には、エネルギー密度は

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{\gamma m_N \rho_0}{1/\gamma} = \gamma^2 m_N \rho_0 \quad (10-12)$$

と評価できるであろう。 $\sqrt{s_{NN}} \sim 5$ GeV 程度の入射エネルギー領域 (AGS エネルギー, $E/A = 10.6$ GeV) においては、中心衝突における正味陽子 (net-baryon) のラピディティ分布は重心付近にピークを持ち、原子核全体がほぼ止まっているように見える。(ただしその広がりも熱分布よりも広い。)

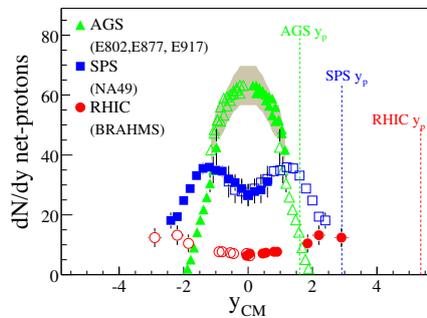


Figure 4: 高エネルギー重イオン衝突におけるラピディティ分布 [16]

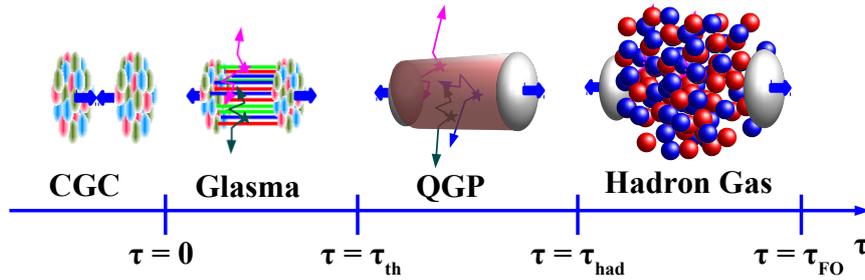


Figure 5: 重イオン衝突の描像

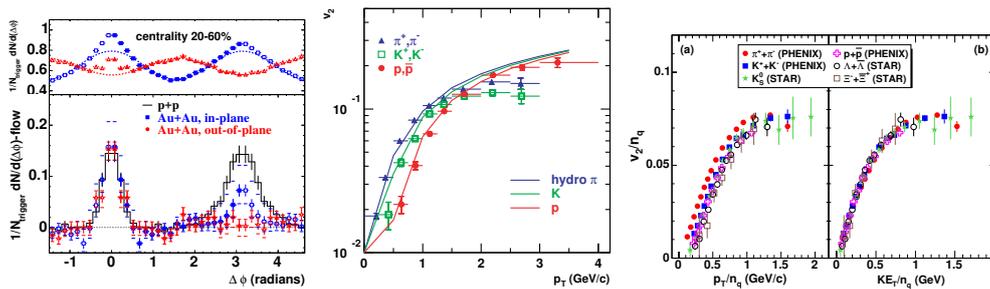


Figure 6: QGP 生成の証拠 [23, 24]

Landau 描像に従うのであれば、入射エネルギーを上げると比較的低いエネルギーで十分なエネルギー密度をもつ物質が出来、QCD 相転移が起こると考えられる。一方、エネルギーが更に大きくなると入射核・標的核の核子はすり抜けて、中心ラピディティ付近に近似的に boost invariant な熱い物質を残すようになる (Bjorken 描像 [17])。Figure 4 に示すように $\sqrt{s_{NN}} \sim 20$ GeV (SPS エネルギー、 $E/A = 158$ GeV) では net proton 分布は中心ラピディティ付近で谷をもち、 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (RHIC エネルギー、衝突型) では中心ラピディティ付近で平らな分布を持っている、すなわち近似的に boost invariant な状態が作られていることが分かる。

衝突型加速器エネルギーにおける重イオン衝突の描像を Fig. 5 に示す。高エネルギー反応では原子核はカラーグラス凝縮 (Color Glass Condensate; CGC) 状態 [18] と高エネルギーパートンの集合として捉えることができる²。衝突直後は低運動量部分を担う古典的 Yang-Mills (グルーオン場の期待値, Classical Yang-Mills; CYM) 場中を高運動量をもつジェットが通過する状態として記述できよう。短い時間 ($\tau \sim \tau_{th}$ (0.5–1.5) fm [19]) の後、場は熱化し、QGP が生成される。この熱平衡化時間は摂動論的 QCD では説明できず [20]、「早い熱平衡化パズル」として認識されている。QGP の低運動量成分の運動は小さな粘度 (viscosity) をもつ流体 (ほぼ完全流体; almost perfect fluid) としてよく記述できることが知られている。例えばずれ粘性は AdS/CFT 対応から最小値が $\eta/s = 1/4\pi$ (s はエントロピー密度) と予想されており [21]、RHIC での集団フローの観測データは $4\pi\eta/s = (1-3)$ 程度のずれ粘性を示唆する。小さな粘性と早い熱平衡化のため、ほぼ衝突領域の形状で作られた流体が膨張し、粒子分布の非等方性を生み出す。この非等方性は集団フローとして観測されている。物質の温度が T_c 近辺に下がると、QGP から多くのハドロンが作られる。生成されるハドロン量はある温度・化学ポテンシャルを仮定した統計モデルでよく記述されることが示されている [22]。ハドロン物質としての時間発展の後、ハドロン間の相互作用が起らなくなり、終状態でのハドロンの運動量が定まる (kinetic freeze-out)。流体としての時間発展とハドロン物質としての時間発展の結果、集団的な膨張速度は $v \sim 0.7c$ にも達する。

²電子-核子衝突実験からよく知られているように、核子は大きな運動量割合を持つ価クォーク (valence quarks) と小さな運動量をもつ海クォーク (sea quarks)、グルーオンからできている。高エネルギー反応で励起される小さな運動量割合 x の領域ではグルーオンが支配的であり、密度が大きな場合にはグルーオン場を古典場 (場の演算子の期待値) として扱うことが妥当性をもつ。原子核は全体としてはカラー 1 重項であるが短時間でみれば局所的にはカラー密度が揺らいでいる。高エネルギー反応では衝突の時刻を瞬間的に見ることになるので、原子核はカラー電荷がドメイン構造を持った状態に見える。

RHIC, LHC エネルギーにおける QGP 生成のシグナルには次のようなものがある。

- ハドロン生成率の統計モデルによる再現
- jet quenching (ジェット)の消失)
- 大きな楕円フロー
- 楕円フローのクォーク数スケーリング

統計モデルはハドロン生成量が熱化学平衡での値

$$N_h = g_h V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp((E_h - \mu_h)/T) \mp 1}, \quad (10-13)$$

$$\mu_h = B_h \mu_B + Q_h \mu_Q + S_h \mu_S. \quad (10-14)$$

で与えられることを示し、その成功は重イオン衝突において平衡が達成されていることを意味する。特に化学平衡については SPS までのエネルギーで見られていない現象である。ジェットは核子内のパートンが大きな運動量移行を伴う弾性散乱した結果として現れ、大きなエネルギー・運動量をもつハドロンの束である。pp 反応、および dA 反応では 2 つのジェットがほぼ逆方向に現れるが、RHIC エネルギーでの AA 衝突ではジェット的一方のみが観測されている。これはジェットを作るパートン的一方が媒質との相互作用により大きなエネルギーを失い、ジェットとして現れないことを意味している。また核子衝突からの生成量で規格化したハドロンの運動量分布は高運動量領域で $R_{AA} \simeq 0.2$ 程度となっており、ジェットのエネルギー損失が大きな運動量を持つハドロン生成量の抑制としても観測されている。楕円フローは方位角についてのハドロン生成量のフーリエ成分として定義される。

$$\frac{dN_h}{p_T dp_T dy d\phi} = \frac{1}{2\pi} \frac{dN_h}{p_T dp_T dy} \left(1 + 2 \sum_n v_n \cos(n\phi) \right), \quad (10-15)$$

$$v_n = \langle \cos(n\phi) \rangle = \left\langle \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_x^2 + p_y^2} \right\rangle \quad (10-16)$$

方位角分布の異方性の起源は反応関与者 (participants) の空間的異方性である。衝突径数が有限の場合、関与者はアーモンド型の形をもつ。系が十分に熱化すると短径方向の圧力が強くなり、衝突径数方向 ($\pm x$ 方向) に多くの粒子が放出されることとなる。つまり大きな楕円フローは早い時点での系の熱化を示す。さらにハドロンがクォークの再結合 (recombination) で作られる場合には、楕円フローはクォークの持つ v_2 の和として現れる。クォーク数スケーリングはクォークが集団運動を持つこと、およびハドロンがクォークの再結合により作られていることと無矛盾である。

これらの証拠に基づいて、現在では RHIC・LHC エネルギーの重イオン衝突において QGP 生成が起こっていると広く認識されている。

10.5 中性子星の構造と組成

中性子星は半径が 5-20 km と非常に小さいにもかかわらず太陽の 1-2 倍の質量をもつ天体である。太陽の半径 (70 万 km) と平均密度 (1.4 g/cm^3) から、典型的な中性子星 (半径 12 km、質量 $1.4 M_\odot$ 、 M_\odot は太陽質量) の平均密度は $4 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ (1 cm^3 に 400 兆 g!) であり、原子核の中心密度 ($M_N \rho_0 \simeq 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, M_N は核子質量) よりも高いことが分かる。通常物質や星は主として電子の圧力で支えられているが、中性子星は原子核と同様に、核子 (陽子・中性子) の間に働く強い力、すなわち核力により支えられているのである。

現在考えられている中性子星の構造と組成を図 7 に示す。中性子星表面は通常物質と同様に安定な原子核と電子からなるが、内側に入って密度が上がるにつれて電子密度が大きくなり、原子核は中性子過剰になっていく (外殻、outer crust)。密度が $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ 程度になると中性子が原子核からこぼれ落ち (neutron drip)、中性子過剰な原子核と drip した自由中性子、および電子が構成要素となる (内殻、

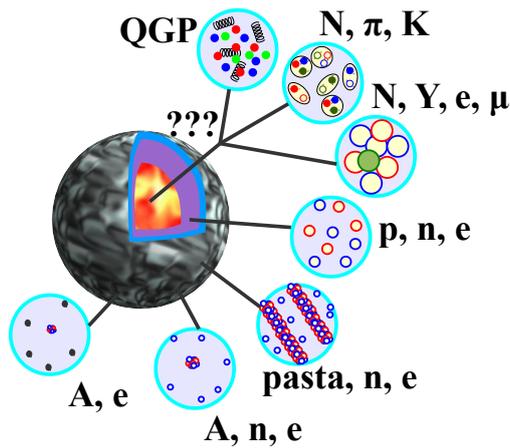


Figure 7: 中性子星の構造と組成

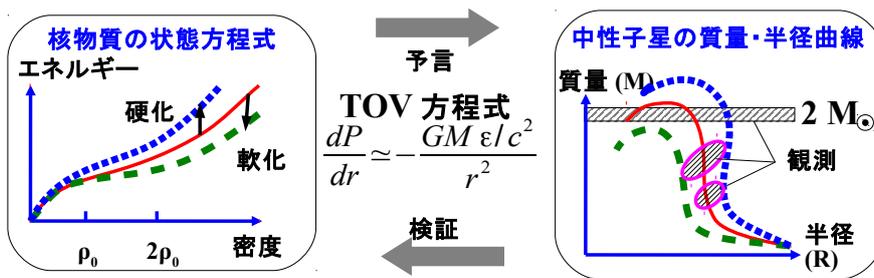


Figure 8: 中性子星の質量・半径曲線と核物質の状態方程式の関連

inner crust)。さらに密度が高くなって原子核間の距離が小さくなってくると、球形よりも棒状・板状等の形の方がエネルギー的に有利となり、いわゆる「パスタ原子核」が現れると期待されている。こうした密度領域は原子核中心密度よりも低く、相図で見れば気体(核子ガス)・液体(原子核)の混合相に対応する。密度が $\rho_B \sim 0.5\rho_0$ 程度に達すると、核子と電子からなる一様な物質が現れる (outer core)。中性子星コア (inner core) は我々の宇宙に安定に存在する物質の中では最も高い密度 ($(5-10)\rho_0$) に達する。核子間の斥力とフェルミエネルギーのため、高密度では核子を他の粒子に置き換える方が安定になる可能性があり、物理学者は核子以外のハドロンを含む物質、あるいはクォーク物質等の極限状態物質が現れているのではないかと夢をふくらませてきた。特に 2010 年の重い中性子星の発見 [25] は中性子星コアの組成について大きな問題を投げかけている。

中性子星コアを直接覗くことはできないが、図 8 に示すように重力と圧力の釣り合いを示す Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\epsilon/c^2 + P/c^2)(M + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - 2GM/rc^2)} \quad (10-17)$$

を通じて、中性子星の半径と質量から高密度における状態方程式の性質を調べることができる。ここで $M(r)$ は半径 r までに含まれる質量であり、圧力は状態方程式を通じてエネルギー密度 ϵ と関係づく。

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon/c^2, \quad P = P(\epsilon) \text{ (EOS)} \quad (10-18)$$

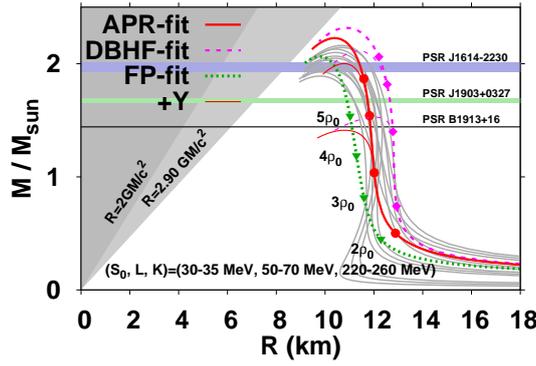


Figure 9: 中性子星の質量・半径曲線

TOV 方程式は、一般相対論的補正を除いた表式

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\epsilon/c^2}{r^2} \quad (10-19)$$

からわかるように、圧力差 (dP) が内側の質量 (M) と微小な質量 ($\epsilon dr/c^2$) 間の重力の釣り合いを示す方程式である。圧力 (P) とエネルギー密度 (ϵ) を結びつける状態方程式が硬い場合には左辺の圧力勾配が大きくなり、より大きな質量・より小さな半径での重力を支えることができる。さらに質量が大きくなると重力が支えられなくなり、中性子星はつぶれてブラックホールとなる。一方、図に示すようにいくつかの中性子星の質量と半径が高精度で求めれば、状態方程式を決定することができるだろう。中性子星が高密度物質の実験室と呼ばれる所以である。

さて、核物質の状態方程式を中性子星物質の状態方程式と結びつけよう。中性子星のマントル (outer core) 領域は陽子・中性子・電子の様な物質からなる。温度は十分低く、また電気的中性条件から電子の密度は陽子密度に等しい。核子あたりのエネルギーを核子の数密度 (ρ_B) と非対称度 ($\delta = (N - Z)/A$) の関数として与え、非対称度依存性が δ^2 で表されるとしよう。

$$E_{NM}(\rho_B, \delta) = E_{SNM}(\rho_B) + S(\rho_B)\delta^2 \quad (10-20)$$

ここで E_{SNM} は対称核物質 ($N = Z$) における核子あたりのエネルギーであり、 $S(\rho_B)$ は対称エネルギーと呼ばれ、純中性子物質 ($\delta = 1$) と対称核物質のエネルギー差である。このときエネルギー密度と圧力は

$$\epsilon = \rho_B(E_{NM} + m_N), \quad P = \rho_B^2 \partial E_{NM} / \partial \rho_B \quad (10-21)$$

と与えられるので、 ρ_B を媒介変数として状態方程式が与えられる。電子の質量を無視すると、核子数あたりの電子エネルギーは次のように与えられる。

$$E_e = \frac{2}{\rho_B} \int_0^{k_{Fe}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \sqrt{\hbar^2 k^2 + m_e^2} \simeq \frac{\hbar k_{Fe}^4}{4\rho_B \pi^2} = \frac{3}{8} \hbar k_F (1 - \delta)^{4/3} \quad (10-22)$$

電子と陽子のフェルミ波数は等しいため、非対称度により表されることに注意せよ。電子エネルギー、および中性子と陽子の質量差を考慮すると、核子あたりの中性子星物質エネルギーは

$$E_{NSM}(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, 0) + S(\rho_B)\delta^2 + \frac{1}{2}(M_n - M_p)\delta + E_e(\rho_B, \delta) \quad (10-23)$$

と与えられる。

図 9 に中性子星の質量・半径曲線の計算結果を示そう。灰色の線は現象論的な状態方程式において対称エネルギーパラメータと非圧縮率を $S_0 = (30 - 35)$ MeV, $L = (50 - 70)$ MeV, $K = (220 - 260)$ MeV の範囲 [26, 27] で動かした場合の結果である。また実線、破線、点線は第一原理計算 [28] をフィットした模型

での計算結果である。これらの結果は核子のみを考えた場合、原子核物理で得られたデータが中性子星の最大質量が $2M_{\odot}$ 程度、半径が 12 km 程度であることを示唆する。また図 9 において $3\rho_0$ 近辺で分岐を起こしている線は通常の見方でハイペロンを導入した場合の結果であり、最大質量が $(1.4-1.5)M_{\odot}$ 程度へ下がっている。質量が非常に正確に測定されていた Hulse-Taylor pulsar (PSR B1913+16, $1.441M_{\odot}$) [29] の質量はパラメータの取り方によっては支えることができるため、2010 年以前は最大質量が小さいことは、大きな問題と考えられていなかった。

核子とレプトン (電子、ミューオン) から構成される状態方程式を用いると中性子星の最大質量は $(1.5-2.8)M_{\odot}$ と予想される。前節で示したように最近の対称エネルギー・非圧縮率の結果を現象論的に用いると不定性はもう少し小さくなる。ハイペロン自由度を考慮すると高密度において状態方程式が軟化し、最大質量は $(1.3-1.7)M_{\odot}$ へと下がる。ハイペロンはハイパー核データに基づいて導入されているため、これ以上重い中性子星は存在しないだろうと思われていた。

ところが 2010 年に約 $2M_{\odot}$ ($1.97 \pm 0.04M_{\odot}$) の中性子星 (PSR J1614-2230) が見つかった [25]。この重い中性子星の存在は「中性子星内部には核子以外のハドロンは存在しない」ことを示唆する。観測データは一般相対論効果に基づくパルスの遅れ (Shapiro delay) の特徴を見事に示しており、十分信頼に足るものである。さらにこの後もう一つ $2M_{\odot}$ の中性子星が見つかる (PSR J0348+0432, $2.01 \pm 0.04M_{\odot}$) [30] とともに、しばらく前に知られていた $1.67M_{\odot}$ の中性子星 (PSR J1903+0327) [31] の確かさも広く信じられるようになった。

一方、ハイパー核データに基づく理論計算は $(2-4)\rho_0$ においてハイペロンが現れることを予言し、冷却曲線の分析からも異粒子の存在が好まれる。この矛盾はハイペロンパズルと呼ばれており、多くの研究者に注目されている。

さて、このパズルは解けるのだろうか？ 2010 年以降、いくつかの解決方法が提案されている。一つ目は、これまで考えられてきた 2 体力に加えて、ハイペロンを含む 3 つの粒子にまたがる 3 体力 (3 バリオン力) を導入することである [32]。実は核物質の飽和密度 (ρ_0) を説明する上でも 3 つの核子が関与する 3 体力 (3 核子力) が必要であることが知られており、3 バリオン力の導入は自然な提案といえるだろう。ハイペロンを含む 3 バリオン力により、重い中性子星を支えるとともに、ハイパー核データがより良く説明できることも示されてきた [32]。二つ目の解決方法はクォーク物質へのクロスオーバー相転移を導入することである。中性子星コアでは核子が重なり合う高密度となっており、クォーク物質となっても不思議ではない。一般的には相転移に伴って状態方程式は軟化するが、連続的なクロスオーバー相転移の場合にはこれが当てはまるとは限らない。比較的低い密度から徐々に相転移すると仮定し、低密度における第一原理的計算結果と現象論的なクォーク物質状態方程式を組み合わせると、重い中性子星が支えられることが示された [33, 34]。この場合にはハイペロン混合が起こる前にクォーク物質への転移が始まるため、ハイペロンによる状態方程式の軟化を避けることができる。

重い中性子星パズルの解決方法として他にもいくつかの機構が提案されているが、どの描像が正しいのか、実験・観測、あるいは基本理論に基づいて決定することが必要である。3 核子力の大きさについては、例えばカイラル有効場理論³ が与える 2 体力と 3 体力は核物質の飽和点をほぼ説明するとともに、長年の問題であった原子核内スピン軌道力の大きさも説明できることが示された [35]。ハイペロンを含む 3 体力は様々な質量数のハイパー核スペクトルを調べることにより 3 体力を制限できる可能性が提案されている [32]。一方、クォーク物質が現れる密度については高エネルギー重イオン衝突からも興味をもたれている [36]。現在探索されている QCD 臨界点⁴ の存在と位置は中性子星コアにおける QCD 相転移密度にも制限を与える。臨界点が低い密度に存在し、かつ中性子過剰物質で消えることが分かれば [37]、中性子星におけるクロスオーバー転移を支持する結果となる。さらなる研究が必要である。

中性子星の観測と分析はこの 10 年程度の間大きく進み、質量におけるハイペロンパズルのみでなく、半径・冷却・磁場などの観測からもいくつかの謎が生まれている。例えば中性子星の半径も最近の大きな話題となっている。半径は $(2-4)\rho_0$ の密度における対称エネルギーに敏感であり、原子核物理学から制限された対称エネルギー [26] から中性子星半径は $R_{NS} = (11-14)$ km 程度と推測される。X 線観測から推定される中性子星半径は、残念ながら解析グループによって結果が異なるが [38, 39]、もしも中性

³QCD の対称性を尊重した有効理論。

⁴高温・低密度側のクロスオーバー転移と低温・高密度側の一次相転移をつなぐ点。ただし、一次相転移の存在は確認されていない。

子星の半径が 10km 以下 [39] であるとすれば、高密度における対称エネルギーが現在の原子核物理から推測される値から大きくずれていることになり、新たな謎となる。

このように現在の中性子星物理は地上実験と天体観測が、互いを動機付けつつ検証するという面白い段階を迎えている。国内ではハイパー核・中性子過剰核・天体観測・理論研究を組み合わせた科研費研究「中性子星核物質」 [40] も進行中であり、今後の進展が期待される。

References

- [1] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343; H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [2] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345; Phys. Rev. **124** (1961) 246. U. Vogl and W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27** (1991) 195; S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649; T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** (1994) 221; M. Buballa, Phys. Rept. **407** (2005) 205.
- [4] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [5] T. Nakano, K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **10** (1953), 581.
- [6] M. Y. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965), B1006.
- [7] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38** (2014), 090001.
- [8] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf Phys. Rev. D **9** (1974), 3471.
- [9] K. Yagi, T. Hatsuda, Y. Miake, "Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang" (2005, Cambridge University Press, Cambridge).
- [10] A. Bazavov *et al.* [HotQCD Collaboration], Phys. Rev. D **90** (2014) 094503.
- [11] S. Borsanyi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg and K. K. Szabo, Phys. Lett. B **730** (2014) 99.
- [12] D. Bailin and A. Love, Phys. Rept. **107** (1984) 325; M. Iwasaki and T. Iwado, Phys. Lett. B **350** (1995) 163; M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Lett. B **422** (1998) 247; R. Rapp, T. Schfer, E. V. Shuryak and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 53; M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Nucl. Phys. B **537** (1999) 443.
- [13] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, Nature **443** (2006) 675.
- [14] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. A **504** (1989) 668.
- [15] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk SSSR **17** (1953), 51.
- [16] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 102301; I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 1.
- [17] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27** (1983) 140.
- [18] L. D. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 2233; F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian and R. Venugopalan, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60** (2010) 463.
- [19] U. W. Heinz, AIP Conf. Proc. **739** (2005) 163.
- [20] R. Baier, A. H. Mueller, D. Schiff and D. T. Son, Phys. Lett. B **502** (2001) 51.
- [21] P. K. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94** (2001) 111601.
- [22] A. Andronic, P. Braun-Munzinger and J. Stachel, Nucl. Phys. A **772** (2006) 167.
- [23] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 102 (STAR white paper).
- [24] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 184 (PHENIX white paper).

- [25] P. Demorest *et al.*, Nature **467** (2010), 1081.
- [26] C.J. Horowitz, E.F. Brown, Y. Kim, W.G. Lynch, R. Michaels, A. Ono, J. Piekarewicz, M.B. Tsang, H.H. Wolter, J. Phys. G **41** (2014) 093001.
- [27] S. Shlomo, V.M. Kolomietz, G. Coló, Eur. Phys. J. A **30** (2006), 23.
- [28] A. Akmal, V. R. Pandharipande and D. G. Ravenhall, Phys. Rev. C **58** (1998) 1804; G. Q. Li, R. Machleidt and R. Brockmann, Phys. Rev. C **45** (1992) 2782; B. Friedman and V. R. Pandharipande, Nucl. Phys. A **361** (1981) 502.
- [29] R. A. Hulse and J. H. Taylor, Astrophys. J. **195** (1975) L51. doi:10.1086/181708
- [30] J. Antoniadis *et al.*, Science **340** (2013) 6131.
- [31] P. C. C. Freire *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **412** (2011) 2763.
- [32] S. Nishizaki, T. Takatsuka and Y. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. **108** (2002) 703; T. Miyatsu, S. Yamamuro and K. Nakazato, Astrophys. J. **777** (2013) 4; K. Tsubakihara, A. Ohnishi Nucl. Phys. A **914** (2013), 438; Y. Yamamoto, T. Furumoto, N. Yasutake and T. A. Rijken, Phys. Rev. C **90** (2014), 045805. D. Lonardoni, A. Lovato, S. Gandolfi and F. Pederiva, Phys. Rev. Lett. **114** (2015), 092301.
- [33] K. Masuda, T. Hatsuda and T. Takatsuka, Astrophys. J. **764** (2013), 12; Prog. Theor. Exp. Phys. **2013** (2013) 073D01.
- [34] T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song and G. Baym, Phys. Rev. D **91** (2015) 045003.
- [35] M. Kohno, Phys. Rev. C **88** (2013), 064005; H. Nakada and T. Inakura, Phys. Rev. C **91** (2015), 021302.
- [36] L. Adamczyk *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **112** (2014), 032302.
- [37] H. Ueda, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, M. Ruggieri and K. Sumiyoshi, Phys. Rev. D **88** (2013), 074006.
- [38] F. Ozel, G. Baym, T. Guver, Phys. Rev. D **82** (2010), 101301; A. W. Steiner, J. M. Lattimer, Ed. F. Brown, Astrophys. J. **722** (2010), 33. V. Suleimanov *et al.*, Astrophys. J. **742** (2011), 122;
- [39] S. Guillot *et al.* Astrophys. J. **772** (2013), 7.
- [40] 文部科学省科学研究費補助金新学術領域(領域番号 2404、領域代表 田村裕和)「実験と観測で解き明かす中性子星の核物質」
<http://lambda.phys.tohoku.ac.jp/nstar/>

11 有限温度・密度における場の理論入門

前節では核物質の相図と状態方程式の研究の進展について概観した。本節ではこうした研究に必要な有限温度の場の理論を自由場、平均場近似の範囲内で解説する。

11.1 経路積分と分配関数

量子力学における経路積分 (path integral) は振幅が経路の和で表されることを示す。時刻 t_i に位置 q_i にいた粒子が時刻 t_f に位置 q_f に到着する振幅は次のように与えられる。

$$S_{fi} = \langle q_f, t_f | \exp(-i\hat{H}(t_f - t_i)) | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i, q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \exp(iS[q]), \quad S[q] = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (11-1)$$

ここで L は古典力学でのラグランジアンである。経路積分の特徴として、演算子のかわりに通常の c-number を用いて表現できること、作用 S の構成時に正準交換関係を用いることにより「量子論」の性質を取り込むことができる、等がある。

場の理論は各点での場の振幅 $\phi(x, t)$ を座標とする量子力学であり、経路積分の適用は straightforward である。

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | \exp(-i\hat{H}(t_f - t_i)) | \Psi_i \rangle = \int_{\Psi(t_i)=\Psi_i, \Psi(t_f)=\Psi_f} \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]), \quad S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (11-2)$$

さて、統計力学における分配関数は上の振幅と似ていることに注意しよう。分配関数を虚時間形式を用いて以下のように書き換える [41]。

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_n \exp(-E_n/T) = \sum_n \langle n | \exp(-\hat{H}/T) | n \rangle = \sum_n \langle n | \exp(-\hat{H}(t_f - t_i)) | n \rangle_{t_f - t_i = -i/T} \\ &= \int_{\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)} \mathcal{D}\phi \exp(-S_E(\phi)), \end{aligned} \quad (11-3)$$

$$S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau d^3x \mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi), \quad \mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi) = -\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \partial_t \phi \rightarrow i\partial_\tau \phi). \quad (11-4)$$

ここで $\beta = 1/T$, $t = -i\tau$, $\partial_t = i\partial_\tau$ である。上の書き換えから、統計力学の分配関数は虚時間発展の振幅の和であることが分かる。また全ての状態について和は $\tau = 0, \beta$ で周期境界条件をつけて任意の $\phi(x, t)$ について足し合わせることに対応する。この Wick rotation を用いた虚時間形式への書き換えをユークリッド化とよぶ。

11.2 自由スカラー場

さて、例としてスカラー場の理論における分配関数を求めてみよう。ユークリッド化のルールに従い、 $t = -i\tau$, $\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}$ とすると、 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ としてラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + U(\phi) \quad (11-5)$$

相互作用がない場合に分配関数を求めよう。有限サイズの箱 (体積 $V = L^3$) の中での自由スカラー場理論 ($U = 0$) では、場のフーリエ成分での記述が便利である。

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n, \mathbf{k}} \exp(-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{k}). \quad (11-6)$$

ここで周期境界条件から振動数と波数は $\omega_n = 2\pi nT$, $k_i = 2\pi n_i/L$ と離散化される。このときユークリッド化作用は

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \phi_n^*(\mathbf{k}) \phi_n(\mathbf{k}), \quad (11-7)$$

と与えられる。フーリエ変換はユニタリ変換であるから積分の測度は変化せず(高々定数倍)、 $\mathcal{D}\phi = N \prod_{n,\mathbf{k}} d\phi_n(\mathbf{k})$ とおける。ガウス積分を実行して分配関数が求まる。

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} = N \prod_{n,\mathbf{k}} \sqrt{2\pi} [\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2]^{-1/2} \quad (E_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2), \quad (11-8)$$

分配関数から自由エネルギーは

$$\Omega = -T \log Z = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[T \sum_n \log(\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2) \right] + \text{const.} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} I(E_{\mathbf{k}}, T) + \text{const.}, \quad (11-9)$$

$$I(x, T) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(\omega_n^2 + x^2) \quad (\omega_n = 2\pi nT), \quad (11-10)$$

と求まる。次節で説明する松原和の方法により、

$$S = T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT) = -i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} - 1}, \quad (11-11)$$

であることが分かる。ここで ω_0 は g の極である。これを $\partial I / \partial E_{\mathbf{k}}$ に適用しよう。

$$\frac{\partial I(E, T)}{\partial E} = 2TE \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + E^2} = -2iE \sum_{\omega_0=\pm iE} \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{e^{i\beta\omega_0} - 1} = \frac{e^{\beta E} + 1}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\cosh(\beta E/2)}{\sinh(\beta E/2)}, \quad (11-12)$$

$$I(E, T) = \frac{2}{\beta} \log(\sinh(\beta E/2)) + \text{const.} = E + 2T \log(1 - e^{-E/T}) + \text{const.} \quad (11-13)$$

式(11-9)に代入して、自由エネルギーの表式を得る。

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right] + \text{const.} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right] + \text{const.} \\ &= V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} - \frac{\mathbf{k}^2}{3E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/T} - 1} \right] + \text{const.} \end{aligned} \quad (11-14)$$

1行目から2行目には部分積分を行っている。2行目第2項は統計力学での $-PV$ を表しており、場の理論における自由エネルギー (grand potential) はゼロ点エネルギーと粒子のもつ圧力からなることが分かる。

11.3 松原和

虚時間についての周期境界条件を満たす振動数 $\omega_n = 2\pi nT$ (松原振動数) についての和 (松原和) は、前節で用いたように有用な技術である。虚時間について周期境界条件 (反周期境界条件) が課されるボーズ (フェルミ) 粒子について、

$$S = T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \omega_n = (2n+1)\pi T) = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1}, \quad (11-15)$$

が成り立つ。

これらの公式は ω_n を周回積分の形で表すことによって得られる。

$$\begin{aligned} S &= T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \omega_n = (2n+1)\pi T) = \pm \oint_{C_1+C_2} \frac{dz}{2\pi} \frac{g(z)}{e^{i\beta z} \mp 1} = \mp \oint_{C_U+C_L} \frac{dz}{2\pi} \frac{g(z)}{e^{i\beta z} \mp 1} \\ &= \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1}. \end{aligned} \quad (11-16)$$

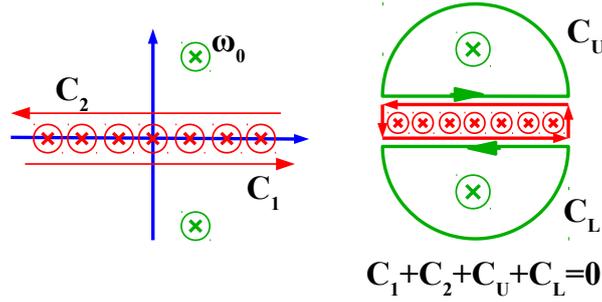


Figure 10: 松原和で用いる積分経路

図 10 に示す積分経路 $C_1 + C_2$ での周回積分は、大きな z で $1/|z|$ よりも速く 0 となる有理型 (meromorphic) 関数については上半平面と下半平面での周回積分 $C_U + C_L$ に置き換えることができる (1 行目)。 $C_U + C_L$ での積分は留数定理により $2\pi i \times$ 留数で置き換えることができる (2 行目) のである。

特に $g(\omega) = 1/(\omega^2 + E^2)$ の場合が有用である。このとき、留数は $\omega_0 = \pm iE$ となり、留数は $\text{Res } g = 1/2\omega_0$ となるので、次の松原和を得る。

$$S = \frac{1}{2E} \frac{e^{\beta E} \pm 1}{e^{\beta E} \mp 1} = \frac{1}{2E} \begin{cases} \coth(\beta E/2) = \frac{\cosh(\beta E/2)}{\sinh(\beta E/2)} & (\text{Bosons}), \\ \tanh(\beta E/2) = \frac{\sinh(\beta E/2)}{\cosh(\beta E/2)} & (\text{Fermions}). \end{cases} \quad (11-17)$$

周期境界条件、あるいは反周期境界条件からボーズ分布関数、フェルミ分布関数が出てくるのは面白い結果と思う。

11.4 フェルミオン

さて、フェルミオンの場合について考えよう。例として relativistic mean field (RMF) を取り上げる。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma)\psi + \mathcal{L}_{\text{meson}}(\Phi) \quad (\Phi = \sigma, \omega, \rho), \quad (11-18)$$

$$\Sigma = g_\sigma \sigma + \gamma^0 (g_\omega \omega_0 + g_\rho \rho_0 \boldsymbol{\tau}). \quad (11-19)$$

$t = -i\tau$, $\gamma^0 = -i\gamma_\tau$ としてユークリッド化を行い、化学ポテンシャルを導入する。

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m + \Sigma)\psi + \mathcal{L}_{E,\text{meson}}(\Phi), \quad (11-20)$$

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp \left[- \int d^4x (\mathcal{L}_E - \mu \psi^\dagger \psi) \right] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp \left[- \int d^4x (\bar{\psi} D \psi + \mathcal{L}_{E,\text{meson}}) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp [-S_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu)], \end{aligned} \quad (11-21)$$

$$D = -i\gamma_\mu \partial_\mu - \mu \gamma^0 + m + \Sigma. \quad (11-22)$$

有効作用 S_{eff} はフェルミオン積分を含む。

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(F)} + S_{\text{meson}} = - \sum_{n, \mathbf{k}} \log \det D_{n, \mathbf{k}} + \int d^4x \mathcal{L}_{E,\text{meson}}. \quad (11-23)$$

ここで中間子場は一様と仮定し、Fourier 変換により Fermi 行列をブロック対角化している。

$$D_{n, \mathbf{k}} = \gamma^0 (-i\omega_n - (\mu - V^0)) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M + g_\sigma \sigma, \quad (11-24)$$

$$\det D_{n, \mathbf{k}} = [(\omega_n - i\mu^*)^2 + E_{\mathbf{k}}^{*2}]^2, \quad (11-25)$$

$$\mu^* = \mu - g_\omega \omega^0 - g_\rho \rho^0 \boldsymbol{\tau}, \quad E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}, \quad M^* = m + g_\sigma \sigma. \quad (11-26)$$

松原和を実行し、次のフェルミオン部分の自由エネルギー密度を得る。

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}^{(F)} = \frac{\Omega^{(F)}}{V} = -d_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E^*}{2} + \frac{T}{2} \log(1 + e^{-(E^* - mu^*)/T}) + \frac{T}{2} \log(1 + e^{-(E^* + mu^*)/T}) \right] \quad (11-27)$$

スカラー場の場合と同様に第1項はゼロ点エネルギーである。第2項、第3項は粒子、反粒子からの圧力を表す。

11.5 QCD 有効模型における相転移と相図

QCD 相転移はカイラル相転移・非閉じ込め相転移の2つの側面をもつ。格子 QCD の結果は2つの相転移が同様の温度で起こることを示している。⁵ ここではカイラル相転移の側面を中心に解説しよう。⁶

カイラル対称性はクォーク質量がゼロの場合に QCD が持つ対称性である。QCD のラグランジアンを左巻き・右巻きクォークで書きなおしてみよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{q}_L(i\gamma^\mu D_\mu)q_L + \bar{q}_R(i\gamma^\mu D_\mu)q_R - (\bar{q}_L m q_R + \bar{q}_R m q_L) - \frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (11-28)$$

ここで $q_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)q/2$ は左巻き・右巻きクォークであり、 $F_{\mu\nu}$ はグルーオンテンソルである。クォーク質量がゼロの場合 ($m=0$)、 \mathcal{L}_{QCD} はフレーバー空間における q_L と q_R の独立な回転、 $q_{L,R} \rightarrow q'_{L,R} = U_{L,R} q_{L,R}$ 、に対して不変である。ここで $U_{L,R}$ は $SU(N_f)$ 行列である。

カイラル変換はハドロン自由度ではスカラー中間子 $\sigma = \bar{q}q$ と擬スカラー中間子 $\pi^a = \bar{q}i\gamma_5\tau^a q$ を混ぜる変換となる。真空がカイラル変換で不変であるならば π と同じ質量をもつスカラー中間子が存在する必要があるが、現実には π 中間子ほど軽いスカラー中間子は存在しない。この矛盾は、真空でのカイラル凝縮は有限であり ($\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$)、真空はカイラル変換において不変ではなく、(質量ゼロでの)QCD 作用の対称性であるカイラル対称性が自発的に破れている [3]、

$$SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1)_B \otimes SU(N_c) \rightarrow SU(N_f)_V \otimes U(1)_B \otimes SU(N_c) \quad (11-29)$$

と考えることで解決できる。⁷ 有限のクォーク質量による陽な破れに加え、カイラル対称性の自発的破れにより σ モードのエネルギーと π 中間子の質量に違いが生まれる。

一方で高温・高密度状態ではカイラル対称性は回復するであろう。つまりカイラル相転移が起こると考えられる。カイラル相転移は Nambu, Jona-Lasinio (NJL) 模型 [3]、Quark Meson (QM) 模型 [46]、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型 [47]、Polyakov loop extended Quark Meson (PQM) 模型 [48] などのカイラル有効模型により精力的に研究が行われてきた。これらの模型はカイラル対称性をもつ。QCD において高運動量成分を何らかの方法で積分できれば、QCD の対称性をもち低運動量自由度で記述されるこれらの有効模型が導出されると期待される。ここでは NJL 模型のラグランジアンを考えよう。⁸

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 + \gamma_0 \mu)q + \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2], \quad (11-30)$$

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{(E)} = \bar{q}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m_0 - \gamma_0 \mu)q - \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2]. \quad (11-31)$$

2行目ではユークリッド化されたラグランジアン $\mathcal{L}^{(E)} = -\mathcal{L}(t = -i\tau, \gamma^0 = -i\gamma_4, A^0 = -iA_4)$ を示している。前節で示したように、ユークリッド座標と γ 行列はそれぞれ $(x_\mu)_E = (\tau = it, \mathbf{x})$ 、 $(\gamma_\mu)_E = (i\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ とする。フレーバーは $N_f = 2$ の場合を考えている。

⁵一方で最近の計算はカイラル相転移の側面が強い(閉じ込め相転移はなだらかに起こる)ことを示しているように見える [42, 43]。

⁶この節の内容は2015年のサマースクール Dense Matter 2015 での講義内容に基づく [44]。

⁷ $U(1)_A$ 対称性は量子異常(anomaly)によって破れている。

⁸表記法は参考文献 [49] に従う。

NJL 模型での分配関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z_{\text{NJL}} &= \int \mathcal{D}[q, \bar{q}] e^{-\int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{(E)}} = \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}] e^{-\int d^4x \left\{ \bar{q} D q + \frac{\Lambda^2}{2} (\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \right\}} \\ &= \int \mathcal{D}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}] \exp[-S_{\text{eff}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}; T)] , \end{aligned} \quad (11-32)$$

$$D = -i\gamma\partial + m_0 - \gamma_0\mu + G(\boldsymbol{\sigma} + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) ,$$

$$S_{\text{eff}} = -\log \det D + \int d^4x \frac{\Lambda^2}{2} [\boldsymbol{\sigma}^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)] . \quad (11-33)$$

1 行目では補助場 $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi})$ を導入して 4-Fermi 相互作用を Hubbard-Stratonovich 変換している。

分配関数 (および自由エネルギー) を計算するには、与えられた補助場 $(\boldsymbol{\sigma}(x), \boldsymbol{\pi}(x))$ の下で時間座標について反周期境界条件 $q(1/T) = -q(0)$ を課してフェルミオン行列 D の行列式を求め、補助場についての積分を行うことが必要である。ここでは簡単のため、平均場近似を用いて計算してみよう。平均場近似では補助場を $(\boldsymbol{\sigma}(x), \boldsymbol{\pi}(x)) \rightarrow (\boldsymbol{\sigma}, 0)$ と定数に置き換えて行列式を求め、 $\boldsymbol{\sigma}$ は作用 S_{eff} が最小になるように定める。この場合にはフェルミオン行列は質量がずれた Dirac 演算子 $D = -i\gamma\partial - \gamma_0\mu + m$ ($m = m_0 + G\boldsymbol{\sigma}$) となる。 D は平面波基底を用いて $D = -\gamma_0(i\omega + \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + m$ と対角化でき、その行列式は $\det D = \prod_{n, \mathbf{k}} ((\omega_n - i\mu)^2 + E_k^2)^{d_f/2}$ ($E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) と求められる。⁹ ここで $d_f = 4N_c N_f$ はフェルミオン自由度の数、 $\omega_n = \pi T(2n - 1)$ は松原振動数である。よって自由エネルギー密度が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{eff}} &= -\frac{T}{V} \log Z = \frac{\Lambda^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{T}{V} \sum_{n, \mathbf{k}} \log ((\omega_n - i\mu)^2 + E_k^2)^{d_f/2} \\ &= \frac{\Lambda^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^2 - d_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + \frac{k^2}{3E_k} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{(E_k - \mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(E_k + \mu)/T} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{\Lambda^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{d_f}{2} \Lambda^4 I\left(\frac{m}{\Lambda}\right) - P^{(F)} , \end{aligned} \quad (11-34)$$

$$I(x) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\sqrt{1+x^2}(2+x^2) - x^4 \log \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right] \simeq \frac{1+x^2 + \frac{x^4}{8} (1+4\log \frac{x}{2}) + \mathcal{O}(x^6)}{8\pi^2} \quad (11-35)$$

式 (11-34) の 1 行目から 2 行目へは松原振動数を用いた。式 (11-34) の最初の項は Hubbard-Stratonovich 変換におけるボソン化から現れる。第 2 項、第 3 項はフェルミオン行列式から現れる項であり、それぞれゼロ点エネルギーと有限温度・密度における粒子からの圧力を示す。

カイラル対称性の自発的破れは自由エネルギー密度 $\mathcal{F}_{\text{eff}}(\boldsymbol{\sigma})$ の形から理解できる。カイラル極限、かつ真空 ($m = 0, T = 0$ and $\mu = 0$) の場合を考えよう。このとき粒子の熱・密度による寄与 $P^{(F)}$ は無視できるので、

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}/\Lambda^4 = -\frac{d_f}{16\pi^2} + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \right] + \mathcal{O}(x^4 \log x) \quad (x = m/\Lambda, G_c^2 = 8\pi^2/d_f) . \quad (11-36)$$

と求まる。相互作用が $G > G_c$ と強い場合には x^2 の係数は負となる (図 11(左) の $T < T_c$ の場合に対応) ので、 \mathcal{F}_{eff} は有限の x で最小となる。すなわちカイラル凝縮 $\sigma(\propto -\langle \bar{q} q \rangle)$ は真空で有限の値を持ち、構成クォーク質量 $m = G\sigma$ が生成される。

次に有限温度・密度でのカイラル相転移について考えよう。この場合にはゼロ点エネルギー部分だけ

⁹通常の (Minkowski 座標での) Dirac 方程式の解が $E = \pm E_k$ であることを思い出し、行列の次元を考えると、行列式は $\det D^{(M)} = \prod (E^2 - E_k^2)^{d_f/2}$ であることが分かる。 $E \rightarrow i\omega + \mu$ と置き換えて $\det D$ が得られる。

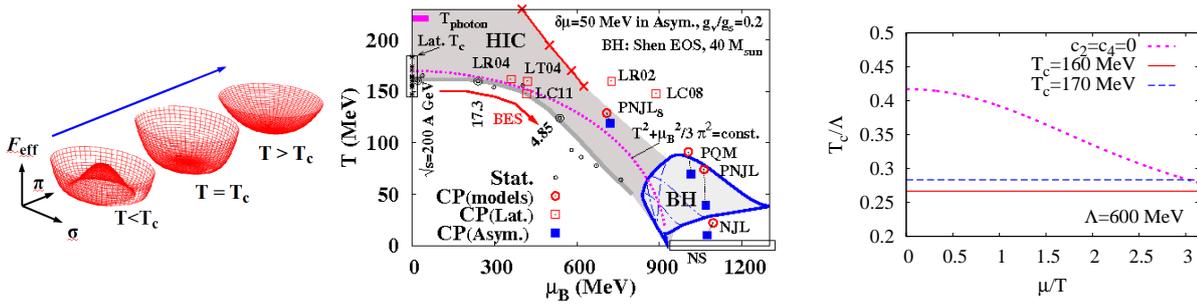


Figure 11: (左): カイラル相転移の模式図。(中): 臨界点の予言値と観測された化学凍結点 [45]。(右): 3重臨界点条件。

でなく、温度・密度による粒子からの圧力寄与も考える必要がある。

$$P^{(F)}/d_f = \frac{7\pi^2}{890}T^4 + \frac{\mu^2}{24}T^2 + \frac{\mu^4}{48\pi^2} - \frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{3}T^2 + \mu^2 \right] - \frac{m^4}{32\pi^2} \left[\log\left(\frac{m}{\pi T}\right) - \frac{3}{4} + \gamma_E - H^v\left(\frac{\mu}{T}\right) \right] + \mathcal{O}(m^6), \quad (11-37)$$

$$H^v(v) = \left(\frac{v}{\pi}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{(2l-1)[(2l-1)^2 + (v/\pi)^2]} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{v}{\pi}\right)^{2k} \left(2 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \zeta(2k+1), \quad (11-38)$$

ここで $\gamma_E = 0.5772156649\dots$ はオイラーの定数である。式 (11-37) の最初の3項は質量ゼロのクォークでも残る寄与 (Stefan-Boltzmann law) であり、残りの項は有限質量効果から現れる [50, 44]。興味深いのは $m^4 \log m$ に比例する項であろう。この項はゼロ点エネルギーで現れる項とちょうど打ち消しあい、 \mathcal{F}_{eff} の m でのテイラー展開が可能となる。

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}(m; T, \mu) = \mathcal{F}_{\text{eff}}(0; T, \mu) + \frac{c_2(T, \mu)}{2} m^2 + \frac{c_4(T, \mu)}{24} m^4 + \mathcal{O}(m^6), \quad (11-39)$$

$$c_2(T, \mu) = \frac{d_f}{24} \left[T^2 + \frac{3}{\pi^2} \mu^2 - T_c^2 \right] \left(T_c^2 = \frac{3\Lambda^2}{\pi^2} \left[1 - \frac{G_c^2}{G^2} \right] \right), \quad (11-40)$$

$$c_4(T, \mu) = \frac{3d_f}{4\pi^2} \left[\gamma_E - 1 - \log\left(\frac{\pi T}{2\Lambda}\right) - H^v\left(\frac{\mu}{T}\right) \right]. \quad (11-41)$$

相互作用が十分に強く、真空ではカイラル対称性が自発的に破れるとしよう。この場合、ゼロ密度 $\mu = 0$ では $T = T_c > 0$ において c_2 の符号が変わり、高温側 ($T > T_c$) でカイラル対称性が回復した状態 ($m = G\sigma = 0$) が平衡状態で現れる。¹⁰

有限密度では $T^2 + 3\mu^2/\pi^2 = T_c^2$ のときに $c_2 = 0$ となり、($c_4 > 0$ が満たされていれば)2次相転移が起こる。よって μ/T が与えられている場合、有限密度での相転移温度は

$$T_c(v = \mu/T) = T_c \left[1 + \frac{3v^2}{\pi^2} \right]^{-1/2} \quad (11-42)$$

と推定できる。図 11(中) に示すように、この相図における楕円形の相境界が実験で得られている化学凍結点の密度依存性をほぼ説明していることは興味深い。さらに $c_4 > 0$ の条件が $T = 0$ まで満たされているならば臨界バリオン化学ポテンシャルは $N_c \mu_c = \pi N_c T_c / \sqrt{3}$ と推定される。 $T_c \sim 170$ MeV とすれば $N_c \mu_c \simeq 925$ MeV と核子質量に近い化学ポテンシャルで相転移が起こると期待される。

¹⁰ $T_c < \sqrt{3}\Lambda/\pi$ であり、カットオフ Λ よりも低い温度でカイラル相転移が起こることは、模型の中での無矛盾性からも好ましい。

μ/T が大きな領域で $c_2 = 0$ と $c_4 = 0$ が同時に満たされる点 (3 重臨界点; TCP) があれば、2 次相転移は TCP で終わる。自由エネルギー密度の表式 (11-39) から TCP の条件は次のように与えられる。

$$\frac{T_c}{\Lambda} = \frac{2\sqrt{1+3v^2/\pi^2}}{\pi} e^{\gamma_E - 1 - H^v(v)} \quad (v = \mu/T). \quad (11-43)$$

図 11(右) に TCP 条件を示す。点線は式 (11-43) の右辺、実線・破線はそれぞれ $T_c = 160$ MeV and 170 MeV ととった場合における T_c/Λ を示す ($\Lambda = 600$ MeV とする。)。 $T_c = 170$ MeV の場合には高温展開の収束半径 ($|\mu/T| = \pi$) 内において TCP 条件が満たされることが分かる。

クォーク質量が有限の場合、小さな μ における相転移はクロスオーバーとなり、また 3 重臨界点は (通常の) 臨界点 (Critical Point; CP) となる [14]。CP の位置は模型の詳細による。例として NJL 模型にここでの単純な取り扱いを適用すると $\mu/T \gtrsim \pi$ という大きめの μ/T 領域で臨界点があることが分かる。閉じ込めや 8-Fermi 相互作用の効果 [51] を取り入れると CP の温度は高くなる。CP、あるいは一次相転移を議論するには実験データ、あるいは有限密度格子 QCD における大きな発展が必要といえる。

References

- [41] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** (1955), 351.
- [42] S. Borsanyi *et al.* [Wuppertal-Budapest Collaboration], JHEP **1009** (2010) 073.
- [43] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **85** (2012) 054503 doi:10.1103/PhysRevD.85.054503 [arXiv:1111.1710 [hep-lat]].
- [44] A. Ohnishi, J. Phys. Conf. Ser. **668** (2016), 012004 [arXiv:1512.08468 [nucl-th]].
- [45] A. Ohnishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **193** (2012) 1.
- [46] D. U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. D **53** (1996) 5142.
- [47] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591** (2004) 277.
- [48] B. J. Schaefer, J. M. Pawłowski and J. Wambach, Phys. Rev. D **76** (2007) 074023; V. Skokov, B. Friman, E. Nakano, K. Redlich and B.-J. Schaefer, Phys. Rev. D **82** (2010) 034029.
- [49] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, *Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang* (Cambridge, Cambridge University Press, 2015) [Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **23** (2005) 1].
- [50] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications* (Cambridge, Cambridge University Press, 2006).
- [51] T. Sasaki, Y. Sakai, H. Kouno and M. Yahiro, Phys. Rev. D **82** (2010) 116004.

11.6 有限温度の場の理論における摂動論入門

ここまでは平均場理論に基づいて自由エネルギー密度について議論してきた。ここでは J.-P. Blaizot 氏の講義ノート [52] に基づいて、有限温度の場の理論における摂動論について入門的な部分の解説を行う。

量子力学においてハミルトニアンが自由部分 (H_0) と相互作用部分 (H_1) の和で表される部分の和で表されるとしよう。

$$H = H_0 + H_1 . \quad (11-44)$$

このとき虚時間時間発展演算子を自由部分と相互作用部分に分けて考えよう。

$$U(\tau) = \exp(-\tau H) = U_0(\tau)U_I(\tau) , \quad (11-45)$$

$$U_0(\tau) = \exp(-\tau H_0) , \quad (11-46)$$

$$U_I(\tau) = \exp(\tau H_0) \exp(-\tau H) . \quad (11-47)$$

相互作用ハミルトニアンの相互作用表示 $H_1(\tau)$ を用いると、 U_I は次の微分方程式を満たすことが分かる。

$$\frac{dU_I(\tau)}{d\tau} = -H_1(\tau)U_I(\tau) , \quad (11-48)$$

$$H_1(\tau) = e^{\tau H_0} H_1 e^{-\tau H_0} . \quad (11-49)$$

分配関数は次のように求められる。

$$e^{-\beta H} = e^{-\beta H_0} T \exp \left[- \int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right] \quad (11-50)$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right] \right\rangle_0 \quad (11-51)$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_0 \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \text{Tr} \left[e^{-\beta H_0} \mathcal{O} \right] \quad (11-52)$$

T は虚時間の順序積を表す。これらの関係式は真空における場の理論において $t \rightarrow -it$ と置き換えたもの (ほぼ) 同じであり、ダイアグラムの足しあわせにより分配関数、あるいは自由エネルギーが求められることを意味する。

ダイアグラム計算を行う上で、自由な propagator (Green's function) を求めておこう。自由ハミルトニアンを

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) , \quad (11-53)$$

とする。時間依存の生成・消滅演算子は次のように与えられる。

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger(\tau) \equiv e^{\tau H_0} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-\tau H_0} = e^{\varepsilon_{\mathbf{p}} \tau} a_{\mathbf{p}}^\dagger , \quad (11-54)$$

$$a_{\mathbf{p}}(\tau) \equiv e^{\tau H_0} a_{\mathbf{p}} e^{-\tau H_0} = e^{-\varepsilon_{\mathbf{p}} \tau} a_{\mathbf{p}} . \quad (11-55)$$

グリーン関数は次のように求まる。

$$G_{\mathbf{p}}(\tau_1 - \tau_2) \equiv \langle T a_{\mathbf{p}}(\tau_1) a_{\mathbf{p}}^\dagger(\tau_2) \rangle = e^{-\varepsilon_{\mathbf{p}} \tau_1} [\theta(\tau_1 - \tau_2) (1 \pm n_{\mathbf{p}}) \pm \theta(\tau_2 - \tau_1) n_{\mathbf{p}}] , \quad (11-56)$$

$$n_{\mathbf{p}} \equiv \langle a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}) \mp 1} . \quad (11-57)$$

ここで複号はボソン・フェルミオンを示す。また、 $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq \beta$ である。

この虚時間グリーン関数はボソン (フェルミオン) について (反) 周期境界条件を満たす。

$$G_p(\tau - \beta) = \pm G_p(\tau) . \quad (11-58)$$

この境界条件は分布関数 n_p の性質を用いて示すことができる。

$$e^{\beta p} n_p = 1 \pm n_p . \quad (11-59)$$

さてこの準備に基づいて、 ϕ^4 理論での有限温度での自由エネルギーを議論しよう。 ϕ^4 理論の Lagrangian と Euclidean Lagrangian を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) , \quad (11-60)$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) , \quad (11-61)$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 , \quad (11-62)$$

とする。自由エネルギーの展開

$$\Omega = \Omega_0 + \lambda \Omega_1 + \lambda^2 \Omega_2 + \dots \quad (11-63)$$

における自由部分 (Ω_0) は前節までで松原和を用いて求めた自由エネルギーに一致する。

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon_p + T \sum_p \log(1 - \exp(-\beta \varepsilon_p)) \quad (11-64)$$

Ω_1 以降の項は、真空での場の理論と同様に connected diagram の和で求められる。

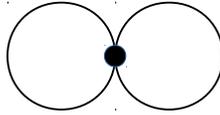


Figure 12: λ^1 で現れる diagram

摂動の 1 次の補正を評価してみよう。Fig. 12 の diagram の寄与は、

$$\beta \Omega_1 / V = \frac{\lambda}{4!} \langle \phi^4 \rangle_0 = \frac{\lambda}{8} \langle \phi^2 \rangle_0^2 = \frac{\lambda}{8} (\Delta(\tau = 0, x = 0))^2 , \quad (11-65)$$

である。boson のグリーン関数

$$\Delta_p(\tau) \equiv \langle T \phi_p(\tau) \phi_p(0) \rangle = \frac{1}{2\varepsilon_p} \left[(1 + n_p) e^{-\varepsilon_p |\tau|} + n_p e^{\varepsilon_p |\tau|} \right] , \quad (11-66)$$

$$\Delta(\tau = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_p}{2\varepsilon_p} \quad (11-67)$$

を用いると、 $\beta \Omega_1$ は

$$\frac{\lambda}{8} \left[\sum_p \frac{1 + 2n_p}{2\varepsilon_p} \right]^2 = \frac{\lambda}{8} \left[\left(\sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p} \right)^2 + \left(\sum_p \frac{n_p}{\varepsilon_p} \right)^2 + 2 \left(\sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p} \right) \left(\sum_p \frac{n_p}{\varepsilon_p} \right) \right] \quad (11-68)$$

と与えられる。第 1 項は温度に依存せず発散するため、単純に無視することとしよう。第 2 項は有限である。第 3 項は温度に依存する発散項であり、取り扱いが面倒であるが、真空において繰り込みすれば

発散は消える。Lagrangian に counter term として $\delta m^2 \phi^2/2$ を加え、真空において発散が消えるように調整したとしよう。

$$\delta m^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} = 0. \quad (11-69)$$

この質量の繰り込みにより第 3 項の発散は消えることが分かる。特に $m = 0$ の場合、相互作用の 1 次の寄与を含む圧力は

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{\lambda T^4}{1152} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (11-70)$$

となる。

References

[52] Jean-Paul Blaizot, 素粒子論研究・電子版 Vol 8 (2011), 3 [arXiv:1108.3482 [hep-ph]].

12 有限密度格子 QCD と符号問題

QCD を非摂動的に解く第一原理計算手法であり、ハドロン質量、ハドロン間相互作用、QCD 熱力学、標準模型の行列要素等、ゼロ密度での様々な物理量の計算が行われてきた。ところが有限密度ではフェルミオン行列式が複素数となるためモンテカルロ計算の基礎となる確率解釈ができなくなる。フェルミオン行列式の位相を別に取り扱うことにより、物理量の計算は原理的に可能であるが、分母・分子ともにゼロに近づいて精度の高い計算が困難となる。この問題を「符号問題」と呼ぶ。

符号問題乗り越えるため、ゼロ密度での微分を用いた方法、虚数化学ポテンシャルからの解析接続など、符号問題のない領域から有限密度領域の情報を得る様々な方法がこれまでに提案されている。また有限密度領域を直接取り扱う方法として、強結合領域でグルーオン積分を先に行う強結合格子 QCD、積分変数を複素数に拡張して積分経路をうまく選ぶことにより符号問題を抑える Lefschetz thimble 上での積分、複素変数での確率的方程式を解くことによって配位を採択する複素ランジュバン方程式の方法等がある。

この節では有限密度格子 QCD のいくつかの側面について紹介する。

12.1 格子 QCD

カラー $SU(N_c)$ における格子 QCD 作用を考えよう。

$$S_{\text{LQCD}} = \bar{q}Dq + S_G. \quad (12-1)$$

$d(=3)+1$ 次元のユークリッド時空において、時空は a を格子間隔として $(\tau, x, y, z) = (ai_\tau, ai_x, ai_y, ai_z) (i_\mu \in \mathbb{Z})$ と離散化する (ここでは lattice unit ($a = 1$) を用いる)。グルーオンは格子点 $(x, x + \hat{\mu})$ を結ぶ $N_c \times N_c$ 行列のリンク変数 $U_\mu(x) = P \exp \left[ig \int_x^{x+\hat{\mu}} dx A_\mu(x) \right]$ で表す。リンク変数のゲージ変換は $U_\mu(x) \rightarrow V_x U_\mu(x) V_{x+\hat{\mu}}$ で与えられる。ブラケット

$$U_{\mu\nu}(x) \equiv U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x + \hat{\nu}) = P \exp \left[ig \oint_{\square} dx A(x) \right] \quad (12-2)$$

のトレースはゲージ不変であり、作用としての候補となる。実際、 $U(1)$ ゲージの場合には周積分 $\oint dx A$ はストークスの定理から回転 $F_{\mu\nu}$ となる。 $SU(3)$ の場合でも、係数を調整すればグルーオンの作用 (Plaquette action) が得られる。

$$S_G = \frac{2N_c}{g^2} \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr} U_{\mu\nu}(x) \right]. \quad (12-3)$$

クォークのゲージ変換は $q_x \rightarrow V_x q_x, \bar{q}_x \rightarrow \bar{q}_x V_x$, で与えられ、 $\bar{q}_x U_\mu(x) q_{x+\hat{\mu}}$ はゲージ不変である。クォークを含む作用は

$$\bar{q}Dq = \frac{1}{2} \sum_{x,\nu} \left[\bar{q}_x U_\nu(x) \Gamma_\nu e^{\mu\delta_{\nu,0}} q_{x+\hat{\nu}} - \bar{q}_{x+\hat{\nu}} U_\nu^\dagger(x) \Gamma_\nu e^{-\mu\delta_{\nu,0}} q_x \right] + m_0 \sum_x \bar{q}_x q_x \quad (12-4)$$

となる。ここで Γ_μ はユークリッド化した γ 行列であり、エルミートとする。

格子 QCD では、クォークは格子点での反可換なグラスマン数で表現する。グラスマン数の自乗はゼロなので全ての関数はそれぞれのグラスマン数の 1 次関数となり、 $\int d\chi = 0$ (全てと反可換な定数) と $\int \chi d\chi = 1$ (全てと可換な定数と規格化の定義) を与えれば汎関数積分は定まる。これらの定義から

$$\int \exp(\bar{q}Aq) d\bar{q}dq = \det A = \exp(-\log \det A) \quad (12-5)$$

である。QCD の分配関数は

$$Z_{\text{LQCD}} = \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, U] e^{-\bar{q}Dq - S_G} = \int \mathcal{D}[U] \det D e^{-S_G}. \quad (12-6)$$

フェルミオン行列 D は γ_5 エルミート性

$$[\gamma_5 D(\mu) \gamma_5]^\dagger = D(-\mu^*), \quad [\det D(\mu)]^* = \det [D(-\mu^*)]. \quad (12-7)$$

を持つので、行列式は $\mu = 0$ において実数であり、 N_f が偶数の場合には $\det D$ は正の実数となる。このとき分配関数の被積分関数 $\det D \exp(-S_G)$ はリンク変数 U の配位についての統計重率とみなせるため、モンテカルロ積分が可能となる。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, U] O e^{-S} = \frac{\int \mathcal{D}[U] \det D O(U) e^{-S_G}}{\int \mathcal{D}[U] \det D e^{-S_G}} = \frac{1}{N_{\text{sample}}} \sum_i O(U_i). \quad (12-8)$$

ここで N_{sample} はモンテカルロ計算のサンプル数、 U_i は $\det D e^{-S_G}$ の確率で発生させるグルーオンの配位、 $O(U)$ はリンク変数 U で表現した観測量である。

有限密度 (有限クォーク化学ポテンシャル $\mu \neq 0$) においては $\det D$ は一般には複素数となり、通常のモンテカルロ積分はできなくなる。 $\det D = |\det D| \exp(i\theta)$ と絶対値と位相を分けて考えると、位相を無視して生成した配位を用いて計算した平均位相因子 (average phase factor) $\langle e^{i\theta} \rangle$ を用いて

$$\langle O \rangle = \frac{\langle O e^{i\theta} \rangle_{\text{pq}}}{\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{pq}}}, \quad \langle X \rangle_{\text{pq}} = \frac{\int \mathcal{D}[U] |\det D| X(U) e^{-S_G}}{\int \mathcal{D}[U] |\det D| e^{-S_G}}, \quad (12-9)$$

と観測量が求められる。ただし符号問題が厳しい場合には大きな体積で平均位相因子が 0 となり、観測量が正確に求められなくなる。これが「符号問題」と呼ばれる問題である。

符号問題を避ける方法の一つは、符号問題のない $\mu = 0$ において μ 微分を計算し、テイラー展開で物理量を推定する方法である。また符号問題のない虚数化学ポテンシャル $\mu = i\mu_I$ ($\mu_I \in \mathbb{R}$) においてモンテカルロ計算を行い、解析接続を行う、あるいは粒子数の定まった状態での期待値を求める方法 (カノニカル分布) 等が提案されている。低密度領域 $|\mu/T| < 1$ においては様々な手法の結果が一致しているが、テイラー展開が破綻すべき臨界点、あるいは 1 次相転移が期待される領域での結果は得られていない。

12.2 Strong-coupling lattice QCD

大きな化学ポテンシャルの領域で有用な方法の一つが強結合格子 QCD である。強結合格子 QCD は分配関数の $1/g^2$ 展開に基づく手法であり、長い歴史をもつ。式 (12-1) においてブラケット項は $1/g^2$ に比例しており、(強結合領域では $1/g^2$ について) 摂動論的に扱えるでしょう。特に強結合極限ではグルーオン作用を無視することができ、リンク変数をそれぞれのリンクで独立に積分可能である。それぞれのリンクにおける積分公式 (One link integral) は、

$$\int dU U_{ab} = 0, \quad \int dU U_{ab} U_{cd}^\dagger = \frac{1}{N_c} \delta_{ad} \delta_{bc}, \quad \int dU U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \frac{1}{N_c!} \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf}, \quad \dots \quad (12-10)$$

と与えられる。1974 年に Wilson は格子 QCD を提案し、強結合極限において Wilson loop が面積則に従うことを示した [2]。

$$\langle W(C = L \times N_\tau) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] W(C) e^{-S_G} \rightarrow N_c \left(\frac{1}{g^2 N_c} \right)^{LN_\tau} \quad (g^2 \rightarrow \infty). \quad (12-11)$$

ここで LN_τ は Wilson loop の面積である (Fig. 13 左)。1 つのリンク変数の期待値はゼロであるから、Wilson loop の期待値に有限な寄与を持つには少なくとも LN_τ の plaquettes が必要である。それぞれの plaquette が $1/N_c g^2$ の因子を与えて「面積則」が現れることが分かる。Wilson loop $W(C) = \text{tr} P \exp(i \oint_C A_\mu dx_\mu)$ は重いクォーク間のポテンシャル $\langle W(C) \rangle = \exp(-V(L)N_\tau)$ を与えるので、面積則は距離に比例した閉じ込めポテンシャル $V(L) = L \log(g^2 N_c)$ が強結合極限で現れることを示す。この閉じ込めの性質は、Creutz による最初の格子 QCD モンテカルロ・シミュレーションによって確かめられた [53]。モンテカルロ・シミュレーションの結果は、強結合領域から摂動論的領域までがスムーズにつながっていることを示して

おり、カラーの閉じ込めが数値的に証明された。高次項を含む強結合展開は Münster [54] によって行われ、モンテカルロ計算の結果がうまく再現できている。

クォークを含む強結合格子 QCD は河本・Smit らにより提案された [56]。クォークとしてスピノール構造のない種類のスタaggerドフェルミオン (one species of unrooted staggered fermion) を採用すると、クォークを含む作用は

$$\bar{\chi} D \chi = S_F^{(t)} + \frac{1}{2} \sum_{x,j} \eta_j(x) \left[\bar{\chi}_x U_j(x) e^\mu \chi_{x+\hat{j}} - \bar{\chi}_{x+\hat{j}} U_j^\dagger(x) e^{-\mu} \chi_x \right] + m_0 \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x, \quad (12-12)$$

$$S_F^{(t)} = \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{\chi}_x U_0(x) e^\mu \chi_{x+\hat{0}} - \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^\dagger(x) e^{-\mu} \chi_x \right] \quad (12-13)$$

と表される。ここでスタaggerド因子 $\eta_j(x) = (-1)^{x_0 + \dots + x_{j-1}}$ は γ を表す。空間方向のリンク変数について One link integral を用いると、クォークと時間方向のリンク変数についての有効作用が得られる。

$$S_{\text{eff}}^{(\text{SCL})} = S_F^{(t)} - \frac{1}{4N_c} \sum_{x,j} M_x M_{x+\hat{j}} + m_0 \sum_x M_x \quad (M_x = \bar{\chi}_x \chi_x), \quad (12-14)$$

第2項は最近接 site クォーク間の 4-Fermi 相互作用を表す。¹¹

強結合展開では $1/g^2$ の次数を決めてリンク変数を先に積分することにより、符号問題が抑制される。有効作用 Eq. (12-14) において相互作用項をボソン化して得られるフェルミ行列の行列式は解析的に得ることができ [56, 57]、平均場近似のもとでは符号問題は現れない。ボソン化で導入した補助場を積分する場合には符号問題は現れるが、小さな格子の場合にはモンテカルロ計算が可能である [58, 59]。

強結合極限においてカイラル対称性が自発的に破れることがゼロ温度 [56, 61]、有限温度・有限密度 [57, 62, 63, 64, 59, 60, 58, 66, 65] において示されている。強結合極限では QCD 相図も平均場近似 [62, 63]、モンテカルロ計算 [60, 58] において議論されている。相図への強結合展開の高次項の影響は [64, 66, 65] で調べられた。

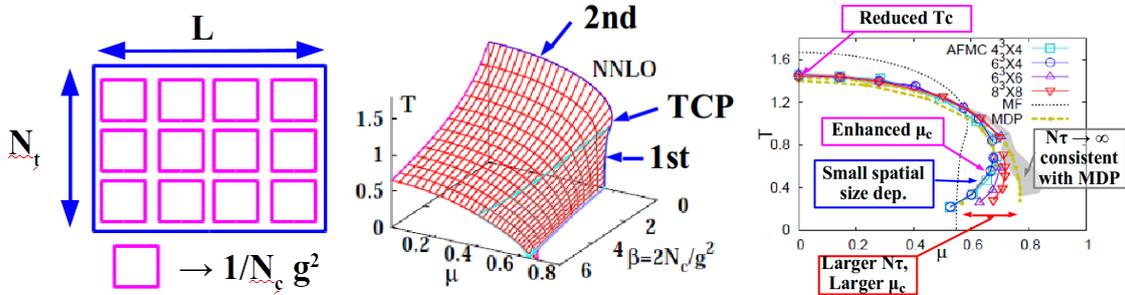


Figure 13: (左) ウィルソンループ、(中) QCD 相図の結合定数 ($\beta_g = 2N_c/g^2$) 依存性 (平均場近似) [64]、(右) モンテカルロ計算による強結合極限の QCD 相図 [58]。

References

[53] M. Creutz, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2308.

[54] G. Munster, *Nucl. Phys. B* **180** (1981) 23.

¹¹空間リンク変数の積分を完全に行うと $1/d$ 展開 (d は空間次元) の高次項である 6-Fermi (baryon hopping term)、8-Fermi (meson-meson interaction) などの相互作用も現れる [55]。次元数が大きい場合に 4-Fermi 相互作用項が有限に残るとすると、クォーク場は $\chi \propto d^{-1/4}$ とスケールする。このとき、6-Fermi、8-Fermi 項は $N_c = 3$ において $\theta(d^{-1/2})$ 、 $\theta(d^{-1})$ と振る舞う。

- [55] H. Kluberg-Stern, A. Morel, B. Petersson, *Nucl. Phys. B* **215** [FS7] (1983) 527.
- [56] N. Kawamoto, *Nucl. Phys. B* **190** [FS3] (1981) 617; N. Kawamoto, J. Smit, *Nucl. Phys. B* **192** (1981) 100.
- [57] G. Faldt, B. Petersson, *Nucl. Phys. B* **265** (1986) 197.
- [58] T. Ichihara, A. Ohnishi, T. Z. Nakano, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2014** (2014) 123D02.
- [59] F. Karsch, K. H. Mutter, *Nucl. Phys. B* **313** (1989) 541.
- [60] P. de Forcrand, M. Fromm, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 112005.
- [61] S. Aoki, *Phys. Rev. D* **30** (1984) 2653.
- [62] P. H. Damgaard, N. Kawamoto, K. Shigemoto, *Phys. Lett. B* **114** (1984) 152;
- [63] E. M. Ilgenfritz, J. Kripfganz, *Z. Phys. C* **29** (1985) 79; N. Bilic, F. Karsch, K. Redlich, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 3228; K. Fukushima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **153** (2004) 204; Y. Nishida, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 094501; N. Kawamoto, K. Miura, A. Ohnishi, T. Ohnuma, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 014502.
- [64] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 1045; K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, N. Kawamoto, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 074034; T. Z. Nakano, K. Miura, A. Ohnishi, *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010) 825; T. Z. Nakano, K. Miura, A. Ohnishi, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 016014; A. Ohnishi, K. Miura, T. Z. Nakano, N. Kawamoto, *PoS LATTICE 2009* (2009) 160.
- [65] T. Ichihara, A. Ohnishi, *PoS LATTICE2014* (2014) 188.
- [66] P. de Forcrand P, J. Langelage, O. Philipsen, W. Unger, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 152002.

12.3 Complex Langevin method

符号問題はフェルミオンを含む理論において広く見られる問題である。近年、Lefschetz thimble method (LTM) [67]、Complex Langevin method (CLM) [68, 69]、generalized Lefschetz thimble method (GLTM) [70]、などの変数を複素化する手法が注目されている。ここでは主として Ref. [68] に基づいて、Complex Langevin 法について解説する。

まず準備段階として、揺動散逸を含む確率分布の方程式である Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \partial_x [\{N\partial_x - K(x)\}P(x,t)] , \quad (12-15)$$

と、ゆらぎ (white noise) を含む運動方程式である Langevin 方程式

$$\frac{dx}{dt} = K(x) + \sqrt{N}\xi(t) , \quad \langle \xi(t) \rangle = 0 , \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t-t') , \quad (12-16)$$

($K(x)$ は x の関数、 N は定数) が同等であることを示そう。2 階微分可能な x の関数 $f(x)$ について、まず Langevin 方程式を用いて

$$\langle f(x(t+\Delta t)) - f(x(t)) \rangle = \left\langle K \frac{\partial f}{\partial x} + N \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\rangle \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) , \quad (12-17)$$

となる。ここで $\langle \dots \rangle$ は white noise ξ についての平均である。次に Fokker-Planck 方程式に従う x の分布関数 $P(x,t)$ を用いると $f(x)$ の期待値の時間発展が

$$\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int dx f(x) P(x,t) = \int dx \left[K \frac{\partial f}{\partial x} + N \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] P(x,t) , \quad (12-18)$$

と求まる。ただし大きな $|x|$ において $P(x,t)$ は十分速くゼロになるとする。2 つの式の比較から、 $f(x)$ 期待値の時間発展が等しいことが分かり、Langevin 方程式と Fokker-Planck 方程式の等価性が示せたこととなる。また $K = -N\partial_x S$ とおけば、平衡分布は $P \propto \exp(-S)$ となる。

さて Complex Langevin 方程式 (CLE) に議論を進めよう。CLE は実変数 x を複素数に拡張した $z = x + iy$ を基本変数とした Langevin 方程式、

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial z} + \sqrt{N_R}\xi_R(t) + i\sqrt{N_I}\xi_I(t) \quad (12-19)$$

である。ここで $\langle \xi_R(t)\xi_R(t') \rangle = 2\delta(t-t')$ 、 $\langle \xi_I(t)\xi_I(t') \rangle = 2\delta(t-t')$ であり、 $N_I = N_R - 1 \geq 0$ とする。このとき、物理量 $f(x,y)$ の期待値は次の方程式に従う。

$$\frac{d\langle f(x(t),y(t)) \rangle}{dt} = \langle Lf(x(t),y(t)) \rangle , \quad L = (N_R\nabla_x + K_x)\nabla_x + (N_I\nabla_y + K_y)\nabla_y . \quad (12-20)$$

($K_x = -\text{Re}\nabla_x S$, $K_y = -\text{Im}\nabla_x S$) (x,y) の確率分布が $P(x,y;t)$ で与えられるとすると、 P は Fokker-Planck 方程式に従う。

$$\frac{\partial P(x,y;t)}{\partial t} = L^T P(x,y;t) , \quad (12-21)$$

$f(x,y;t)$, $P(x,y;t)$ は形式的に次のように求まる。

$$f(x,y;t) = \exp(tL)f(x,y;0) , \quad P(x,y;t) = \exp(tL^T)P(x,y;0) . \quad (12-22)$$

このとき、次の関数 $F(t, \tau)$ は τ に依存しないことが分かる。

$$F(t, \tau) = \int P(x, y; t - \tau) f(x, y; \tau) dx dy, \quad (12-23)$$

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = - \int dx dy (L^T P(x, y; t - \tau)) f(x + iy; \tau) + \int dx dy P(x, y; t - \tau) (L f(x + iy; \tau)) = 0. \quad (12-24)$$

解析関数に作用する場合には $\nabla_y = i\nabla_x$ が成り立つので、 L を

$$\tilde{L} = [\nabla_z - (\nabla_z S(z))] \nabla_z, \quad L_0 = [\nabla_x - (\nabla_x S(x))] \nabla_x, \quad (12-25)$$

に置き換えて良い (y_0 は任意の実数)。時刻 $t = 0$ において P が $y = 0$ のみにおいて値を持つ [$P(x, y; 0) = \rho(x; 0) \delta(y)$] としよう。このとき $F(t, t)$ は

$$\begin{aligned} F(t, t) &= \int dx dy P(x, y; 0) \exp(tL) f(x, y; 0) = \int dx \rho(x; 0) \exp(tL_0) f(x, 0; 0) \\ &= \int dx f(x, 0; 0) \exp(tL_0^T) \rho(x; 0) = \int dx f(x, 0; 0) \rho(x; t) = \langle f \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (12-26)$$

最後の行で $\rho(x; t)$ は Fokker-Planck 方程式 $\partial \rho / \partial t = L_0^T \rho$ に従う複素密度分布関数であることを用いた。 $F(t, t) = \langle f \rangle_P$ であることを合わせて考えると、

$$\langle f \rangle_P = \langle f \rangle_\rho, \quad (12-27)$$

が示されたこととなる。 $\rho(x; t)$ は

$$\frac{\partial \rho(x; t)}{\partial t} = L_0^T \rho(x; t) \quad (12-28)$$

に従い、平衡状態では $\rho(x; \infty) \propto \exp(-S)$ に従う。よって複素分布関数 $\exp(-S)$ での期待値と、2変数分布関数 $P(x, y; t)$ による期待値が等しいことが示された。ただし、部分積分が無制限回可能であることを用いているため、成立には多少厳しい条件、ドリフト項 (K_x, K_y) の分布が $|K|$ の大きな領域で指数関数またはそれ以上に速くゼロとなる、が必要となる [69]。

References

- [67] E. Witten, AMS/IP Stud. Adv. Math. **50** (2011) 347; M. Cristoforetti, F. Di Renzo, L. Scorzato (Aurora-Science Collab.), Phys. Rev. D **86** (2012) 074506; H. Fujii, D. Honda, M. Kato, Y. Kikukawa, S. Komatsu and T. Sano, JHEP **1310** (2013) 147.
- [68] G. Aarts, E. Seiler, I.-O. Stamatescu, Phys. Rev. D **81** (2010) 054508;
- [69] K. Nagata, J. Nishimura and S. Shimasaki, Phys. Rev. D **94** (2016) no.11, 114515
- [70] A. Alexandru, G. Basar and P. Bedaque, Phys. Rev. D **93** (2016) no.1, 014504; A. Alexandru, G. Basar, P. F. Bedaque, G. W. Ridgway and N. C. Warrington, JHEP **1605** (2016) 053.

レポート(核物質基礎論, 2016 年度前期・大西担当分)

次の問題から少なくとも2問、できれば4問を解いて提出せよ。〆切は7/31。基研の大西部屋(K407)のレポート提出袋まで。(講義を休んだ人への連絡が遅くなったので、8/10まで受け付けます。)

1. 松原和の方法を用いて、自由スカラー場(温度 T)、または自由フェルミオン場(温度 T 、化学ポテンシャル μ)における自由エネルギーの表式(11-14)、および(11-27)を導出せよ。(Sec. 11.2, 11.4より)
2. 平均場近似を用いてNJL模型のゼロ温度($T=0$)における自由エネルギー密度の表式(11-34)を導出せよ(関数 I の展開を求めることに対応する)。また自由粒子の圧力について m での展開を $\mathcal{O}(m^2)$ まで(式(11-37)の一行目に対応)求めよ。(Sec. 11.5より)
3. Boson の温度グリーン関数 $\Delta_p(\tau)$ を求めよ(式(11-66)を導出せよ)。(Sec. 11.6より)
4. ユークリッド化された格子QCD作用において、Dirac 演算子は

$$D_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_{\hat{v}} \left[U_{\hat{v}}(x) \Gamma_{\hat{v}} e^{\mu \delta_{\hat{v},0}} \delta_{y, x+\hat{v}} - U_{\hat{v}}^{\dagger}(y) \Gamma_{\hat{v}} e^{-\mu \delta_{\hat{v},0}} \delta_{x, y+\hat{v}} \right] + m_0 \delta_{x,y}$$

と表せる。ここで $U_{\hat{v}}(x)$ はリンク変数、 $\Gamma_{\hat{v}}$ はユークリッド空間における(エルミートな)ガンマ行列ある。 $(D$ のスピノール、およびカラーの添字は省略してある。) D の γ_5 エルミート性

$$[\gamma_5 D(\mu) \gamma_5]^{\dagger} = D(-\mu^*), \quad [\det D(\mu)]^* = \det [D(-\mu^*)] \quad (13-7)$$

を示せ。(Sec. 12.1より)

5. 強結合極限において Wilson loop が面積則に従うことを示せ。(式(12-11)を導出せよ。) また $1/g^2$ について面積則からの1次の補正を求めよ。(Sec. 12.2より)
6. Langevin 方程式

$$\frac{dx}{dt} = K(x) + \sqrt{N} \xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\delta(t-t'),$$

($K(x)$ は x の関数、 N は定数) に従う x の分布関数 $P(x,t)$ は、Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \partial_x [N \partial_x - K(x)] P(x,t),$$

に従うことを示せ。(式の間を適切に埋めよ。Sec. 12.3より)