

核多体系物理学

八田佳孝・大西 明

Abstract

核子・ハドロン・クォークからなる多体系の性質を状態方程式と核反応論の観点から議論する。核物質の状態方程式を記述するために必要となる核多体理論(平均場理論、有効相互作用)、ハイパー核生成反応や重イオン反応を理解する上で必要とされる原子核反応理論(直接反応、輸送模型等)、等の理論の枠組について解説すると共に、これらについての最近の研究成果についても紹介する。1. 核物質の状態方程式(核力と位相差、有効相互作用、核物質の状態方程式、平均場理論) 2. 原子核反応理論(ハドロン-原子核反応、ハイパー核・中間子核生成反応、重イオン衝突)

1 核物質の状態方程式

核物質の相図・状態方程式を議論する上で一つの方向は前期に議論したように Nambu, Jona-Lasinio (NJL) 模型等の QCD 有効模型から調べることである。一方で低密度側では物質の構成要素は核子であり、核子と核子間相互作用(核力)により記述することが必要である。ところが核力から出発する核子多体系を議論することは簡単ではない。これは核力が斥力芯(コア)を持ち、またテンソル力を含むため、多体問題を記述する標準的方法である平均場理論——粒子の積波動関数(スレーター行列式)によるハミルトニアンの変分——が直接利用できないためである。このため核力から原子核、あるいは核物質を記述するには近距離相関・テンソル相関を処理した平均場的な波動関数により生の核力と同じ行列要素を示す有効相互作用をまず作り、これを用いて多体問題を解く方法が広く持ちいられている。一方で密度汎関数理論によれば、量子多体系の基底状態エネルギーは密度分布の汎関数で与えられることが示されており、様々な原子核の基底状態エネルギーを再現する相互作用を現象論的に求めることによって汎関数を定めていく方法もありうる。現在、核力から出発する第一原理的な方法による研究、およびこれらの結果を利用して密度汎関数を求める方法などが進んでいる。

ここでは量子力学散乱理論を復習したのち、核力と位相差、有効相互作用について解説し、現象論的な立場から状態方程式について議論する。

1.1 量子力学散乱理論の復習

1.1.1 断面積とボルン近似

核力の性質は核子散乱実験から知ることができる。散乱における観測量は断面積である。Fig. 1 のように、入射流束(強度) $F(s^{-1}m^{-2})$ 、面積 $S(m^2)$ のビームを数密度 $n(m^{-3})$ の物質からできた厚さ $\delta x(m)$ の薄膜に入射し、入射粒子が小さな立体角 $d\Omega$ 内の角度に単位時間あたり dN 個の割合で散乱されたとしよう。散乱数は $F, S, n, \delta x, d\Omega$ に比例し、面積の次元をもつ比例係数を微分散乱断面積 ($d\sigma/d\Omega$)、微分散乱断面積を全立体角で積分した量を全散乱断面積 (σ) とよぶ。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{F S n \delta x d\Omega}, \quad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (1-1)$$

全散乱数は $N = FS \times \sigma \times n \delta x$ で与えられる。 FS は単位時間あたりに入射する粒子数、 $n \delta x$ は単位面積あたりの散乱体の数であるから、散乱確率 (N/FS) は単位面積あたり $n \delta x$ 個の面積 σ の散乱体が占める割合に等しくなる。つまり、断面積 σ は単位入射流束あたりの 1 つの散乱体による散乱確率を表す。

ポテンシャル $V(r)$ (ポテンシャルは遠方でゼロになるとする) 中を運動する質量 m の粒子の波動関数 Ψ が従うシュレディンガー方程式を、入射波数 k で標的に流れ込み、ポテンシャル $V(r)$ により散乱され

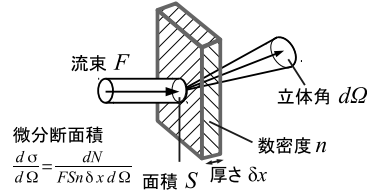


Figure 1: 断面面積

て出ていく境界条件の下で解く。

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1-2)$$

ここで $\mathbf{k}$ は入射波数ベクトル、 k は波数の大きさである。右辺の第一項は入射平面波、第二項はポテンシャルによる散乱波（外向き球面波）を表す。散乱波から得られる外向きの流れの密度は散乱振幅 $f(\theta, \phi)$ を用いて $j_r = \hbar k |f(\theta, \phi)|^2 / mr^2$ と求まるので、散乱断面面積は $d\sigma/d\Omega = |f(\theta, \phi)|^2$ となる。グリーン関数を用いてシュレディンガー方程式を形式的に解くと、

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \quad (1-3)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1-4)$$

となる。¹ ここで $G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$ は $(E - H_0)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を満たすグリーン関数、 $H_0 = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m$ は自由粒子のハミルトニアン、 $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}r/r$ は終状態の波数ベクトルである。式 (1-2) と比較して散乱振幅は $f(\theta, \phi) = -m/2\pi\hbar^2 \times \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle$ と求まる。

ポテンシャルが弱い場合には、入射波と比べて散乱波の振幅が十分小さいとして右辺の波動関数 Ψ を平面波で置き換える近似（ボルン近似）が成立する。

$$f_{\text{Born}}(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \mathbf{k} \rangle, \quad \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (1-5)$$

ボルン近似では散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換 $\tilde{V}$ に比例するため、散乱の角分布からポテンシャルの形が分かることとなる。例えば湯川ポテンシャル $v(r) = C \exp(-\mu r)/r$ の場合には

$$\tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{\mu^2 + q^2}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{v}(\mathbf{q})|^2 = \left(\frac{2mC/\hbar^2}{\mu^2 + q^2} \right)^2 \quad (1-6)$$

ここで $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ は運動量移行である。

1.1.2 部分波展開

核子散乱から核力を引き出すためにはボルン近似は十分でなく、部分波展開によって正確に散乱問題を取り扱う必要がある。平面波の部分波展開は、レイリーの公式で与えられる。

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta), \quad j_\ell(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} = \frac{1}{2ikr} \left(e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right). \quad (1-7)$$

¹シュレディンガー方程式を $(E - H_0)\Psi = V\Psi$ と書きなおしておくと、一般解は両辺に $G = (E - H_0)^{-1}$ をかけて得られる特解と左辺=0の斉次項の和となる。式 (1-3) の第2項は特解、第1項は境界条件を満たすために加えた斉次項と理解できる。求めるべき波動関数 Ψ が右辺に含まれているので問題が解けているとはいえない（形式的にしか解けていない）ことに注意。

内向き球面波は散乱の影響を受けないことに注意して、散乱波動関数を次のように表す。

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} A_{\ell} \frac{u_{\ell}(r)}{kr} P_{\ell} \rightarrow \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} \left(S_{\ell}(k) e^{i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)} \right) P_{\ell}. \quad (1-8)$$

ここで動径波動関数 $u_{\ell}(r)$ の漸近形は位相差 (phase shift) δ_{ℓ} で与えられる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + V_{\ell}(r) \right] u_{\ell}(r) = E u_{\ell}(r), \quad u_{\ell}(r) \rightarrow \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_{\ell}), \quad (1-9)$$

平面波と比較することにより係数が $A_{\ell} e^{-i\delta_{\ell}} = (2\ell+1)i^{\ell}$ と決まり、散乱振幅が位相差で表される。

$$S_{\ell}(k) = e^{2i\delta_{\ell}(k)}, \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell+1) e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1-10)$$

低エネルギーにおける位相差の振る舞いを調べておこう。核力は短距離力であるから、 $r = R$ でポテンシャルの影響がなくなるとする。このとき、低エネルギーが十分に低い場合 ($kR \ll 1$) には、遠心力ポテンシャルのため $\ell \neq 0$ では波動関数は内側に入り込めず、位相差は s -wave ($\ell = 0$) のみで有限の値をとる。さらに $r > R$ では波動関数は漸近形 $u_0(r) = \sin(kr + \delta_0(k))$ と一致し、 $\Psi^{(+)}$ が $k \rightarrow 0$ で発散しないためには $\lim_{k \rightarrow 0} \sin \delta_0(k) = 0$ 、すなわち $\lim_{k \rightarrow 0} \delta_0(k) = n\pi$ (n は整数) となる。

散乱波動関数 u_{ℓ} は $r = R$ における対数微分 W により完全に決まる。十分に低エネルギー ($|E| \ll |V|$, $kR \ll 1$) の場合には、内側の波動関数は k に大きく依存しないので、 W を定数と考えよう。このとき、位相差の k 依存性は次のように求まる。

$$k \cot(kR + \delta_0) = W, \quad k \cot \delta_0 = \frac{k \tan kR}{1 - W \tan kR/k} \simeq -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (1-11)$$

ここで a_0 を散乱長 (scattering length)、 r_{eff} を有効レンジ (effective range) と呼ぶ。 s 波散乱のみを考えてよい場合には、散乱振幅は $f = (k \cot \delta_0 - ik)^{-1}$ と与えられる。非常に低エネルギーにおける位相差 $\delta_0 \simeq -a_0 k$ を用いると、 $\sigma = 4\pi a_0^2$ となり、散乱長が低エネルギーの散乱断面積を与える指標であることが分かる。また波動関数の漸近形は $u_0(r) = \sin(kr + \delta_0) \simeq \sin(k(r - a_0))$ となり、散乱波動関数を r の一次関数で近似すれば、波動関数は $r = a_0$ で節をもつことも分かる。

いくつかの簡単な場合に散乱長の値をみておこう。

- 十分に zero energy に近い束縛状態がある場合には、 $a_0 > 0$ 。

束縛状態の波動関数を $u_{\text{BS}} = A \exp(-\kappa r)$ ($r > R$) とすると、対数微分は $W = -\kappa$ 。このとき

$$-\frac{1}{a_0} = \frac{-\kappa}{1 + \kappa R}, \quad a = \frac{1 + \kappa R}{\kappa} \simeq \frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}} \quad (\varepsilon = \text{束縛エネルギー}), \quad (1-12)$$

となり、散乱長は正である。

- 斥力コア

$V(r) = +\infty, 0(r < r_c, r > r_c)$ の場合、波動関数は $u_0 = \sin(k(r - r_c))$ となり、 $\delta_0 = -kr_c, a_0 = r_c$ 。

- (束縛状態をもたない弱い) 引力が働く場合には、波動関数は内側に引きこまれ、 $a_0 < 0$ となる。

1.2 核力と位相差

Figure 2 に核子核子散乱の位相差を示す [1]。状態は $^{2S+1}L_J$ ($L = S, P, D, F, \dots$) ($S=2$ 核子のスピン、 $J=2$ 核子の角運動量、 L は軌道角運動量) により区別する。核子はフェルミオンであるから、2 核子の入れ替えに対して波動関数は符号を変える。このため、2 核子のスピン・アイソスピンを S, T 、軌道角運動量を L とすると、 $(-1)^{S+T+L} = -1$ となり、 $L+S+T$ は奇数でなくてはならない。

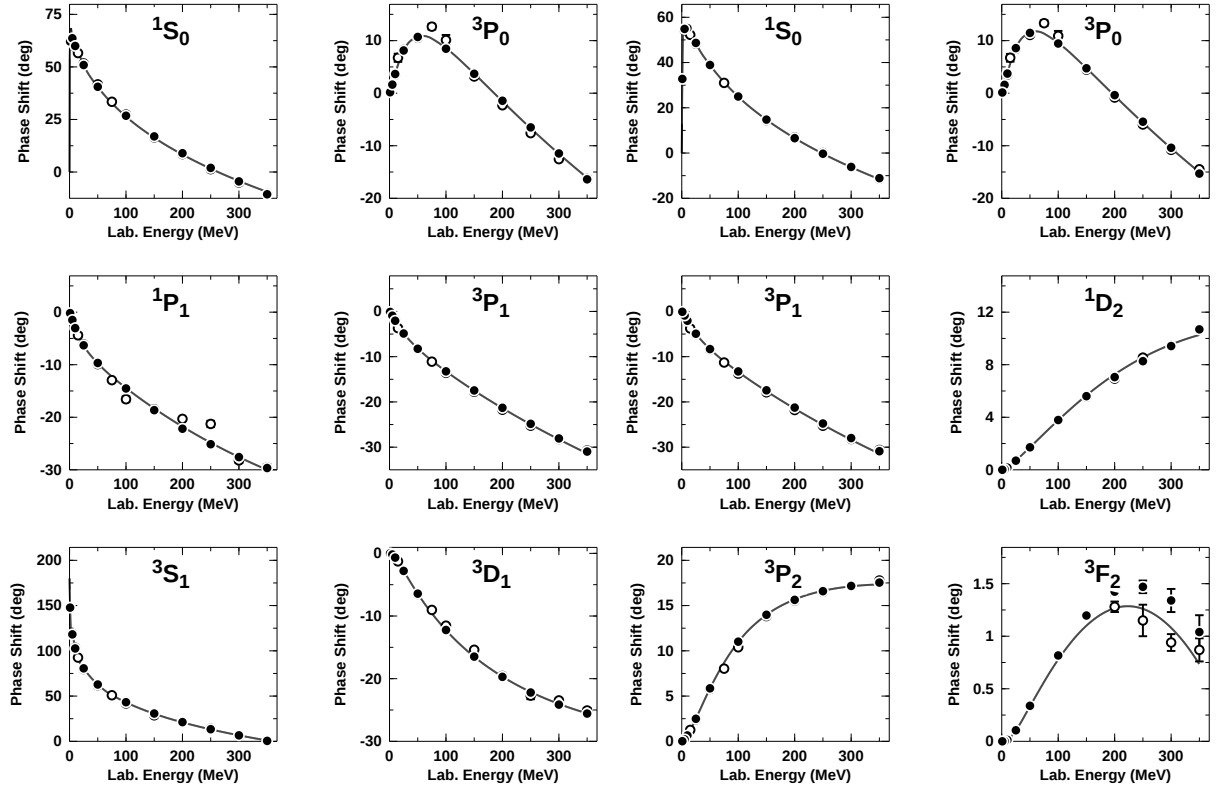


Figure 2: np (左), pp (右) 散乱位相差 [1].

s -wave 位相差の特徴は、(1) 低エネルギーで $\delta > 0$ であり、引力となる。 3S_1 状態 ($T=0$) は重陽子を束縛させ、 1S_0 状態 ($T=1$) は原子核における対相関を生み出す。この違いは核力の状態依存性の例である。(2) 高エネルギーで δ_0 は小さくなり、斥力芯の存在を示唆する。

p -wave でも S, J により大きく振るまいが違っている。 1P_1 では強い斥力の存在を示唆する。 $^3P_2, ^3P_0, ^3P_1$ ではテンソル力、 LS 力が (引力, 引力)、(引力, 斥力)、(斥力, 斥力) と働くため、こうした振る舞いの違いが現れる。

1.3 π 粒子交換力

前節で述べたように、核子散乱実験と位相差解析の結果として、核力の様相が明らかにされてきた。(1) 外側は 1π 交換によってもたらされる引力、(2) 中間レンジでも引力、(3) 芯領域では強い斥力。

ここでは、 π 粒子交換力 (one pion exchange potential; OPEP) を導出しておこう。通常の方法は一方の核子を源とする π 粒子の場を考え、他方の核子が感じる場の強さからポテンシャルを導く。ここでは散乱振幅から求める方法 [2] を紹介しておく。

2 粒子が散乱するときの微分断面積は、

$$d\sigma = \frac{1}{4vE_1E_2} \int_{d\Omega} \left[\prod_i \frac{d^3p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right] (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) |\mathcal{M}|^2, \quad (1-13)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 16(E_1 + E_2)^2}, \quad (1-14)$$

と表せる。2 行目は 2 粒子の弾性散乱の場合を示す。Born 近似の表式と比較して、ポテンシャルのフー

リエ変換が、ファインマン図形から得られる振幅 $\mathcal{M}$ によって表されることが分かる。

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{1}{4(E_1 + E_2)} \mathcal{M} \xrightarrow{\text{Non.Rel.}} \frac{\mathcal{M}}{4m_1 m_2} . \quad (1-15)$$

よって、粒子交換によるポテンシャルを求めるにはファインマン図から $\mathcal{M}$ 行列要素を求めれば良い。
核子と π 粒子のラグランジアンから散乱振幅をもとめる。

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} - g \bar{N} i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} N , \quad (1-16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i g^2 \frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} [\bar{u}(\mathbf{p}'_1, s'_1) \gamma_5 \boldsymbol{\tau}_i u(\mathbf{p}_1, s_1)] [\bar{u}(\mathbf{p}'_2, s'_2) \gamma_5 \boldsymbol{\tau}_i u(\mathbf{p}_2, s_2)] - (\text{exchange term}) \\ &= -g^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2} - (\text{exchange term}) , \end{aligned} \quad (1-17)$$

ここで $u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E + m_N} (1, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} / (E + m_N))^T \chi(s)$ を用いて、 $[\bar{u}_{1'} \gamma_5 \boldsymbol{\tau}_i u_1] = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q} \tau_{1i}$ ($\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{1'}$) となる。
 $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \mathcal{M} / 4m_N^2$ により、ポテンシャルが求まる。さて、直接項のみを考えて空間表示を求めよう。

$$\begin{aligned} V_D(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \left[-\frac{g^2}{4m_N^2} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \right] \\ &= \frac{g^2}{4m_N^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \\ &= \frac{g^2}{4\pi(2m_N)^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \left(\frac{e^{-m_\pi r}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4\pi} \left(\frac{m_\pi}{2m_N} \right)^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + S_{12} \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \right] , \end{aligned} \quad (1-18)$$

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (1-19)$$

角括弧 [] 内の第一項は中心力を表す。

$$(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = (4T(T+1) - 6)/2 = -3, 1 \quad (I = 0, 1) . \quad (1-20)$$

であるから、 $(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ は $(S, T) = (1, 0), (0, 1)$ の場合に負 ($(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = -3$)、 $(S, T) = (0, 0), (1, 1)$ の場合に正 ($(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = 9, 1$)、となる。これは核力の位相差に現れる性質 — $^3, ^1S$ において引力・ 1P において強い斥力 — という性質をよく表している。

角括弧 [] 内の第 2 項はテンソル力である。 $(S, T) = (1, 0), (0, 1)$ には中心力では違いがないが、テンソル力は $S = 1$ 状態のみに働くため $(S, T) = (1, 0)$ 状態により強い引力が働き、重陽子が束縛することとなる。

核力はテール部分 ($r > 2$ fm, π 交換力)、中間領域の引力 ($r \sim 1$ fm)、斥力コア ($r < 0.6$ fm) からなることが知られている。中間領域は π 以外のボソン交換や多 π 粒子交換で表されており、コア領域はベクトル中間子やクォーク効果 (クォーク間のパウリ原理・one gluon exchange) により斥力芯が現れると理解されている。

問題 1: σ 粒子交換によるポテンシャルを求めよ。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - g \bar{N} \sigma N \quad (1-21)$$

で与えられるとする。

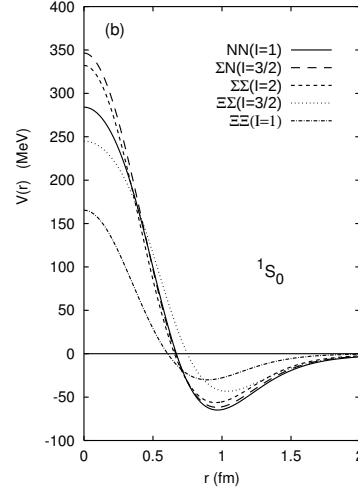


Figure 3: 核力の例 (fss2) [3]

1.4 有効相互作用の基礎: 波動関数の healing

核力は斥力芯をもち、またテンソル力が重要な役割を果たすため、単純なスレーター行列式で原子核内の核子の波動関数を表すことは出来ない。例えば、核力研究の初期によく用いられた hard core (ある距離以内では $+\infty$) のポテンシャル) では、スレーター行列式による行列要素が無限大となる。これを避ける方法は再和 (resummation) である。核力に hard core があっても多重散乱を取り入れた散乱振幅は有限であるため、散乱振幅を核力の代わりに使うことができれば発散を避けることができるのである。この考え方に基づいて多体問題に利用できるようにする方法の一つが Brückner 理論である。

準備段階として T 行列を定義しておこう。前回議論した散乱波動関数の従う方程式を、Lippmann-Schwinger(LS) 方程式の形に書き直す。

$$\Psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + G_0 V \Psi_{\mathbf{k}} \quad (1-22)$$

ここで $G_0 = 1/(E - H_0 + i\epsilon)$ である。 T 行列を

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \equiv \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle \quad (1-23)$$

と定義する。散乱振幅は $f = -m/2\pi\hbar^2 \times T$ と表せるため、 T はほぼ観測量である。式 (1-22) の両辺に $\langle \mathbf{k}' | V$ をかけて整理すると、 T についての LS 方程式が得られる。

$$T = V + V G_0 T \quad (1-24)$$

T は一種の有効相互作用である。 V の行列要素に発散があっても T は有限であり、また多重散乱効果が取り込まれており。さらに散乱振幅は T を相互作用とみなした場合のボルン近似で厳密に表せる。

さて [4] に従って核内での 2 核子散乱に進もう。ここでは、核内 2 核子相対波動関数が自由波動関数からずれるのが短距離の領域に限られることを理解するのが目標である。この場合には、2 核子相対波動関数は次の Bethe-Goldstone (BG) 方程式に従う。

$$\Psi_{\mathbf{P},\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{Q}{E - H_0} V \Psi_{\mathbf{P},\mathbf{k}} \quad (1-25)$$

ここで Q は 2 核子の中間状態での Pauli blocking された状態を取り除く演算子であり、一様物質の場合には 2 核子の運動量がともにフェルミ運動量 (k_F) 以上に制限する。 T 行列の場合と同様に $\langle \mathbf{P}, \mathbf{k}' | g | \mathbf{P}, \mathbf{k} \rangle \equiv \langle \mathbf{P}, \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{P},\mathbf{k}} \rangle$ と G 行列 (g) を定義すると、 g が従う BG 方程式は次のように与えられる。

$$g = V + V \frac{Q}{E - H_0} g \quad (1-26)$$

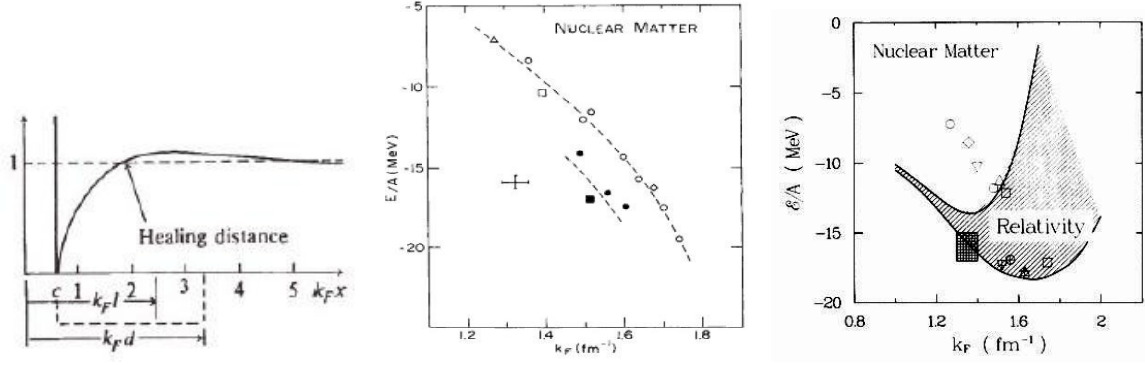


Figure 4: Healing distance(左)、Coester line (中)、 相対論効果 (右)

BG 方程式を具体的に書けば、

$$\Psi_{\mathbf{P},\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int_{\Gamma} \frac{d\mathbf{q}d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{E_{\mathbf{P},\mathbf{k}} - e_{\mathbf{P}/2+\mathbf{q}} - e_{\mathbf{P}/2-\mathbf{q}}} V(\mathbf{y}) \Psi_{\mathbf{P},\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \quad (1-27)$$

ここで Γ は 2 核子の運動量がフェルミ球の外にある領域 $|\mathbf{P}/2 \pm \mathbf{q}| > k_F$ を表し、 e は 1 核子の運動エネルギーである。両辺に $\nabla^2 + k^2$ をかけると、平面波・エネルギー分母は消えて、

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} \frac{d\mathbf{q}d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} v(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \\ &= v(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) - \int_{\bar{\Gamma}} \frac{d\mathbf{q}d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} v(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1-28)$$

ここで $\bar{\Gamma}$ は Γ の補集合、 $v = 2mV/\hbar^2$ である。

簡単のため $\mathbf{P} = 0$ とし、相対の s 波のみを考える。このとき $\bar{\Gamma}: |\mathbf{q}| < k_F$ となる。 $\Psi(\mathbf{y}) = u(y)/y$ おくと u は次の方程式に従う。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)u(x) = v(x)u(x) - \int_0^\infty dy \chi(x,y) v(y) u(y), \quad (1-29)$$

$$\chi(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_F} dq \sin qx \sin qy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k_F(x-y))}{x-y} - \frac{\sin(k_F(x+y))}{x+y} \right] \quad (1-30)$$

Hard core ポテンシャルの場合に具体的に波動関数の振る舞いを見ていこう。 k_F を用いて無次元化を行い ($k_F x \rightarrow x$, $k_F y \rightarrow y$, $v = V/(\hbar^2 k_F^2/2m)$)、 $v(x) = \infty, 0(x < c, x > c)$ なるポテンシャルを考える。このとき、 $v(x)u(x)$ は $x = c$ のみで値をもつので $v(x)u(x) = A\delta(x-c)$ とおく。式 (1-29) に代入して、

$$u'' + k^2 u = A(\delta(x-c) - \chi(x,c)) = F(x), \quad (1-31)$$

$$F(x) = \frac{2A}{\pi} \int_1^\infty dq \sin xq \sin cq, \quad (1-32)$$

$$u(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x-y)) F(y) dy = \frac{\sin kx}{k} \int_0^x \cos ky F(y) dy - \frac{\cos kx}{k} \int_0^x \sin ky F(y) dy \quad (1-33)$$

密度が高い場合、式 (1-33) 第 2 項はゼロに近づく。第 1 項は自由波であるから、高密度では、核内 2 核子相対波動関数は遠方で自由粒子に戻ることが分かる。この戻る距離のことを healing distance とよぶ。hard core ポテンシャルの場合には $k_F \ell \simeq 1.9$ 程度であり、この距離の外側では独立粒子描像が成り立っている、と考えて良い。

問題 2: $\chi(x,y)$ が上記のように求まることを示せ。また $\int_0^\infty \sin ky F(y) dy = 0$ であることを示せ。(ヒント: $\int_0^\infty dq \sin qx \sin qy = \pi[\delta(x-y) - \delta(x+y)]/2$ である。)

G 行列を平均場理論で用いる有効相互作用として採用した枠組みを Brückner-Hartree-Fock (BHF) 理論とよぶ。BHF 理論は核物質の飽和性を定性的に説明し、殻模型 (独立粒子描像) の基礎を与えた。また有効核力の状態依存性を説明するなどの成功を収めている。一方で、飽和点 (飽和密度、飽和エネルギー) の定量的理解は得られておらず、様々な核力を用いても飽和点は empirical な点を通らず、Coester line と呼ばれるずれた線上を動く。相対論補正、あるいは 3 体力が必要である。ダイアグラムで見ると、BHF 理論は ladder diagram を足し合わせたものとなっており、hole line 展開の最初の項を与える。展開の高次項を取り入れると、例えば Continuum choice と呼ばれる処方箋を用いると 3 体クラスター効果は小さいことが知られている。またスピン軌道力が足りないなどの問題も知られている。

1.5 核物質の状態方程式

原子核の質量・半径の測定結果から、原子核の中心付近は密度 ($\rho = \rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$)、核子あたりのエネルギー ($E \simeq -16 \text{ MeV}$) がともに一定の物質 (核物質) からできているとみなせる。この節では核物質の状態方程式 (Equation of State; EOS) を考える。核物質の状態方程式は、原子核の基底状態における密度分布や密度振動 (圧縮・膨張モード) の励起エネルギーを理解する上で役立つだけでなく、短い時間ではあるが高密度物質が生成される原子核衝突のダイナミクス、あるいは核子が一様に分布していると考えられている中性子星の内側の構造を推測する上で重要である。

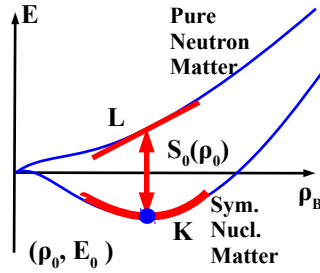


Figure 5: 核物質の状態方程式と核物質パラメータ (概念図)

1.5.1 対称核物質の状態方程式

核子あたりのエネルギー E を密度 (核子数密度) ρ_B の関数として概念的に示したのが Fig. 1.6 である。対称核物質 ($N = Z$) において核子あたりのエネルギーが最小になる密度を飽和密度 (saturation density, ρ_0)²、飽和密度での核子あたりのエネルギーを飽和エネルギー ($E_0 = E(\rho_0)$) と呼ぶ。また $(\rho_0, E(\rho_0))$ を飽和点とよぶ。飽和密度近辺の核物質を特徴づける量の一つが非圧縮率 (incompressibility, K) である。

$$K \equiv k_F^2 \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial k_F^2} \bigg|_{\rho_B=\rho_0} = 9\rho_0^2 \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial \rho_B^2} \bigg|_{\rho_B=\rho_0} \quad (1-34)$$

K が大きい (小さい) と密度が変化したときのエネルギー変化が大きい (小さい) ため、状態方程式は硬い (柔らかい)。

量子多体系のエネルギーは密度の汎関数で与えられることが知られている [5]。ここでは例として、相互作用エネルギーが簡単な密度の関数で与えられる場合を考えてみよう。

$$E(\rho_B) = \frac{3}{5} E_F(\rho_B) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right) + \frac{\beta}{2+\gamma} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^{1+\gamma} \quad (1-35)$$

第 2 項、第 3 項が核子あたりの相互作用エネルギーである。この場合、飽和点とパラメータ γ を与えると他の 2 つの相互作用パラメータ (α, β)、および K は一意に定まる。例えば $E_0 = -16 \text{ MeV}$, $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$

² 飽和密度は原子核の中心密度とほぼ等しいので、ともに ρ_0 で表すこととする。

とすれば、 $\gamma = 1, 1/3, 1/6$ の場合に $(\alpha, \beta, K) = (-123, 70, 377), (-217, 164, 236), (-357, 304, 201)$ (MeV) と定まる。近年の研究から $K \simeq 230$ MeV 程度と考えられており、飽和密度付近では $\gamma \simeq 1/3$ 程度の状態方程式がもっともらしいと分かる。

エネルギー密度は $\rho_B E(\rho_B)$ となるので、相互作用エネルギーは

$$\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[\frac{\alpha}{2\rho_0} + \frac{\beta \rho_B^\gamma ((\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2)}{(2 + \gamma) \rho_0^{1+\gamma}} \right] \rho_B(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}') \quad (1-36)$$

と表せる。第一項は特異性の小さな短距離 2 体核力の平均的效果 (畳み込み) を示すが、これだけでは飽和性を説明することはできない。密度依存力となる第二項が必要であることは、原子核の相互作用エネルギーが単純な 2 体力の畳み込みでは表せず、核子間の相関等の多体効果が必要であることを示唆する³。現実的核力から核物質の飽和点を説明することは、現在でも解かれていない大きな課題である。

1.5.2 対称エネルギー

非対称核物質 ($N \neq Z$) では密度に加えて非対称度 $\delta = (N - Z)/A$ が変数として現れる。クーロンエネルギー以外の強い相互作用については、陽子と中性子の入れ替えに対して不変 (アイソスピン対称性) であるため、非対称度の効果は δ の偶関数として現れる。例えば原子核の質量公式は、核子あたりのエネルギーが δ の 0 次、および 2 次式で表されることを示している。2 次までの近似がよい場合、非対称核物質における核子あたりのエネルギーは

$$E(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, \delta = 0) + S(\rho_B) \delta^2 \quad (1-37)$$

となる。ここで $S(\rho_B)$ を対称エネルギーと呼ぶ。Fig. 1.6 に示すように、飽和密度における対称エネルギーと密度微分 S_0, L で与える。

$$S_0 \equiv S(\rho_0), \quad L \equiv 3\rho_0 \left. \frac{dS(\rho_B)}{d\rho_B} \right|_{\rho_B=\rho_0}. \quad (1-38)$$

対称エネルギーの役割の一つは、非対称核物質における飽和密度を変化させることである。 ρ_0 近辺の非対称核物質における核子あたりのエネルギー

$$E(\rho_B, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{L}{3} x \delta^2 + \frac{K}{18} x^2 \quad (x = (\rho_B - \rho_0)/\rho_0) \quad (1-39)$$

を最小とする密度は非対称度とともに小さくなる。

$$\rho_B^{\text{sat}}(\delta) = \rho_0 \left(1 - \frac{3L\delta^2}{K} \right) \quad (1-40)$$

よって中性子過剰核 (安定核と比べて中性子が多い原子核) の半径は同じ質量の安定核よりも大きいと予想される。実際には中性子過剰核では陽子と中性子が異なる分布をもつため、ここでの一様な非対称度をもつとする近似は荒すぎるが、対称エネルギーは原子核の基底状態・励起状態に様々な影響を与える。

1.5.3 中性子物質の状態方程式

対称エネルギーは中性子星物質の性質にも大きく関わる。中性子星のマントル領域は陽子・中性子・電子の様な物質からなる。温度は十分低く、また電気的中性条件から電子の密度は陽子密度に等しい。まず中性子のみの核物質 (中性子物質) では、 ρ_0 近辺の圧力は対称エネルギーのみによって担われることに注意しよう。式 (1-39) と熱力学関係式を用いると⁴

$$P = \rho_B^2 \frac{\partial E(\rho_B, \delta)}{\partial \rho_B} \simeq \rho_B^2 \left[\frac{L\delta^2}{3\rho_0} + \frac{K(\rho_B - \rho_0)}{9\rho_0^2} \right] \quad (1-41)$$

³原子系の場合には、電子間のクーロン斥力と原子核からのクーロン引力により飽和性が現れる。

⁴有限温度では核子あたりのエネルギー E を核子あたりの自由エネルギー F に置き換える。

となり、 $\rho_B \simeq \rho_0$ では L に比例する項が主要項となる。電子の質量を無視すると、核子数あたりの電子エネルギーは次のように与えられる。

$$E_e = \frac{2}{\rho_B} \int_0^{k_{Fe}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \sqrt{\hbar^2 k^2 + m_e^2} \simeq \frac{\hbar k_{Fe}^4}{4\rho_B \pi^2} = \frac{3}{8} \hbar k_F (1 - \delta)^{4/3} \quad (1-42)$$

電子と陽子のフェルミ波数は等しいため、非対称度により表されることに注意せよ。電子エネルギー、および中性子と陽子の質量差を考慮すると、核子あたりの中性子星物質エネルギーは

$$E_{NSM}(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, 0) + S(\rho_B) \delta^2 + \frac{1}{2} (M_n - M_p) \delta + E_e(\rho_B, \delta) \quad (1-43)$$

と与えられる。

問題 3: 中性子星物質 EOS Eq. (1-43) から β 平衡における非対称度 δ を求める方程式を導け。(3 次方程式に帰着できる。)(電子質量は無視する。)

1.6 核物質状態方程式の第一原理計算

状態方程式を核力から理解することは核物理における大きな課題である。生の核力から出発して、多体問題を解く手法を(核子多体系物理学における)第一原理計算とよぶ。代表的な方法として、積波動関数に 2 粒子相関演算子をかけて変分を行う変分法 [7]、G 行列を有効相互作用とする Hartree-Fock 法 (Brückner-Hartree-Fock(BHF) 法) [8]、変分法と再和を組み合わせた方法 (variational chain summation; VCS) [9]、グリーン関数を用いて虚時間方向への発展をモンテカルロ法により評価する Green's Function Monte Carlo (GFMC) 法 [6]、補助場を導入して Hamiltonian を一体演算子として書き換えて虚時間方向への発展をモンテカルロ法により評価する Auxiliary Field Diffusion Monte Carlo (AFDMC) 法 [6]、等がある。変分法では以下の波動関数を試行関数として、変分を行う。

$$|\Psi\rangle = \left[\mathcal{S} \prod_{i < j} f_{ij} \right] |\Phi\rangle \quad (1-44)$$

ここで Ψ は試行波動関数、 f_{ij} は 2 粒子相関関数、 Φ は積波動関数である。 f_{ij} は 2 粒子間の距離が近いときに波動関数を抑えるとともに、テンソル相関を取り入れる。GFMC は試行関数 Ψ_T から出発し、波動関数の虚時間時間発展を考える。

$$|\Psi_0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(H-E_0)\tau} |\Psi_T\rangle \quad (1-45)$$

短い虚時間発展は Trotter 公式を用いて評価できるので、これを繰り返すことにより虚時間発展を行う。

$$\Psi_0(\mathbf{R}_N) = \prod_{i=0, \dots, N-1} \left[\int d\mathbf{R}_i G(\mathbf{R}_{i+1}, \mathbf{R}_i) \right] \Psi_T(\mathbf{R}_0), \quad G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \mathbf{R} | e^{-H\delta\tau} | \mathbf{R}' \rangle. \quad (1-46)$$

$\mathbf{R}_i$ の積分は多次元積分であるため、Monte Carlo 法を用いる。Hubbard-Stratonovich 変換を用いて Hamiltonian を簡素化する代わりに補助場についても積分を行うのが AFDMC である。

2 体核力のみでの計算では、これらの第一原理計算は核物質の飽和点を再現せず、3 体力 (UIX or Illinois potential, chiral EFT 3N potential [12]) を導入することによって初めて少数系 (^{12}C までの原子核) や核物質の性質を説明できる。例外は DBHF (相対論的 BHF) であり、Bonn-A ポテンシャルを用いて 2 体力のみで飽和点をほぼ再現する。ただし Bonn-A ポテンシャルは十分に精度の高い核力とは考えられていない。3 体力は多くの場合、飽和点、あるいは 3 核子系の束縛エネルギーを再現するように現象論的に導入される。例外は Chiral EFT であり、主に寄与する項は 2 体力と同じ vertex から現れるため、余分な不定性は小さい(兵藤さんのゼミ参照)。ただし Chiral EFT の適用範囲は限られており、EOS 計算では $2\rho_0$ を超える領域への適用には問題がある。QCD に基づく高密度まで利用可能な 3 体力の評価は現代的課題といえる。

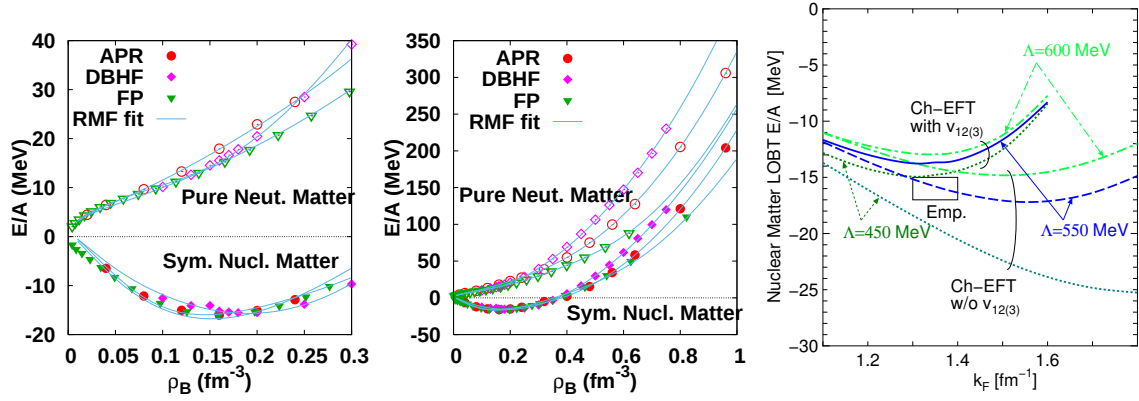


Figure 6: 核物質 EOS の第一原理計算。現象論的に 3 体力を導入した結果 (FP [7], DBHF [8, 11], APR [9]) (左、中)、および chiral EFT [12] に基づく 3 体力を取り入れた結果 [11](右) を示す。

References

- [1] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63** (2001) 024001 [nucl-th/0006014].
- [2] Franz Gross, "Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory" (John Wiley & Sons, New York, 1993).
- [3] Y. Fujiwara, Y. Suzuki and C. Nakamoto, Prog. Part. Nucl. Phys. **58** (2007) 439.
- [4] A. L. Fetter, J. D. Walecka, "Quantum Theory of Many-Particle Systems" (McGraw-Hill, San Francisco, 1971).
- [5] P. Hohenberg, W. Kohn, Phys. Rev. **136** (1964), B864; W. Kohn, L. J. Sham, Phys. Rev. **140** (1965), A1133.
- [6] J. Carlson, S. Gandolfi, F. Pederiva, S. C. Pieper, R. Schiavilla, K. E. Schmidt and R. B. Wiringa, Rev. Mod. Phys. **87** (2015) 1067.
- [7] B. Friedman and V. R. Pandharipande: Nucl. Phys. A **361** (1981) 502.
- [8] R. Brockmann and R. Machleidt, Phys. Rev. C **42** (1990) 1965; G. Q. Li, R. Machleidt and R. Brockmann, Phys. Rev. C **45** (1992) 2782.
- [9] A. Akmal, V. R. Pandharipande and D. G. Ravenhall: Phys. Rev. C **58** (1998) 1804.
- [10] R. Machleidt and D. R. Entem, Phys. Rept. **503** (2011) 1.
- [11] M. Kohno, Phys. Rev. C **88** (2013) 064005.
- [12] E. Epelbaum, H. W. Hammer and U. G. Meissner, Rev. Mod. Phys. **81** (2009) 1773 doi:10.1103/RevModPhys.81.1773 [arXiv:0811.1338 [nucl-th]].
- [13] B. D. Serot, J. D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. **16** (1986), 1.

2 原子核反応論

原子核の構造や励起状態、原子核とハドロンの相互作用、核物質の状態方程式や様々な輸送係数を調べるには、原子核反応データを分析する必要がある。例えばハイペロン-原子核の相互作用を調べるには、核内にハイペロンを生成する反応を利用する。Fig. 7 (左) に示すように原子核を標的とした (π, K) 反応では、素過程反応が $\pi + N \rightarrow K + Y$ であり、原子核内にハイペロンを作る。ハイパー核に束縛状態が存在する場合には、その離散的なエネルギーに対応して放出される K 粒子のエネルギーにピークが現れ、束縛エネルギーが精度よく求められる。束縛状態が無い場合でも、スペクトルの形からポテンシャルについての情報がある程度得られる。また高密度物質の性質を調べるには重イオン衝突が有用である。高エネルギーの重イオン衝突では、Fig. 7 (右) に示すようにいくつかの段階を経て終状態に至る。衝突型加速器 (RHIC, LHC) のエネルギー ($\sqrt{s_{NN}} \geq 200$ GeV) では原子核はグルーオンのかたまりとみなすことができ、衝突時にはグルーオン場が期待値を持つ古典場がエネルギーの大きな部分を担う。このグルーオン場 (Classical Yang-Mills (CYM) field) が崩壊して多くのクォーク・グルーオンを作り、熱化した状態がクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) である。QGP は粘性の小さなほぼ完全な流体で記述できることが知られている。膨張・冷却の後、粒子間の距離が十分に大きくなると相互作用が切れて (freeze-out)、運動量が一定のまま観測される。終状態のハドロンの分布・相関から反応途上の圧力の情報が得られる。

ここではハイパー核生成の分析に有用な直接反応理論、重イオン衝突の分析に有用な輸送理論についての導入を行う。

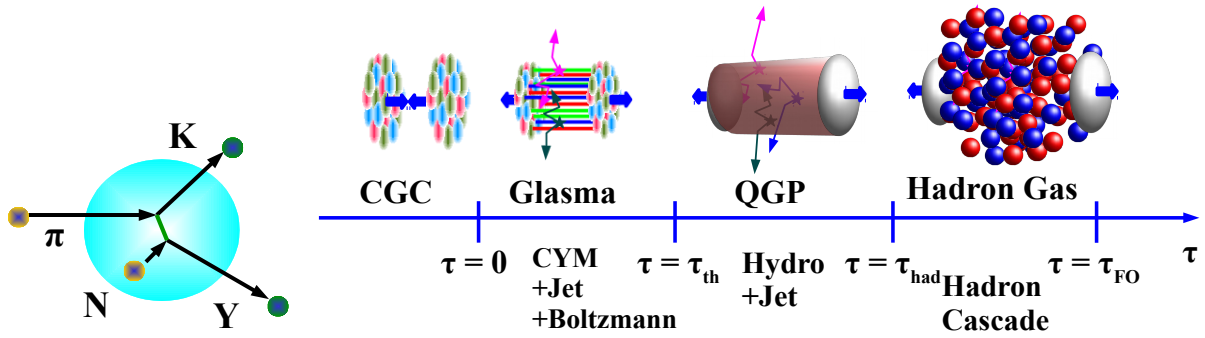


Figure 7: hA 反応と AA 反応 (原子核 - 原子核反応)

2.1 直接反応におけるインパルス近似

ここではハイペロン生成反応を念頭において、直接反応におけるインパルス近似について説明する。

核子 (あるいはハドロン) と原子核の反応 (NA 反応、またはより一般に hA 反応) を考えよう [14]。核子・核子 (NN) 散乱からは核子間の相互作用を知ることができた。 hA 反応ではいくつかの条件の下で原子核の応答関数が分かるのである。ここでは短時間の反応で入射粒子と原子核の反応が原子核内のそれぞれの核子との反応の重ねあわせで記述される場合を考える。この場合には後述のインパルス近似が成立する。

ハドロンと原子核の反応 (例えば ${}^A_Z(\pi^+, K^+) {}^A_Z$) におけるハミルトニアンは、

$$H = \sum_i K_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} = K_r + H_A(\xi) + \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = K_r + H_A(\xi) + \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = H_0 + V \quad (2-1)$$

と表せる。ここで H_A は原子核のハミルトニアン、 ξ は原子核の (スピン・アイソスピンを含む) 内部座標、 K_r はハドロンと原子核の相対運動エネルギー、 v_{ij} は粒子 i と j 間のポテンシャルである。(入射 (・放出) 粒子と原子核の重心の相対距離を $\mathbf{r}$ とする。) 重心運動エネルギーは除かれているとする。このと

き全体の T 行列に対する Lippmann-Schwinger 方程式は

$$T = V + VG_0T, \quad G_0 = (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} = (E - H_A - K + i\varepsilon)^{-1} \quad (2-2)$$

と形式的に解ける。

さて、 T を核内核子との散乱振幅 τ_i で表すことを試みる。最後に核子 i と相互作用した散乱振幅を T_i とすると、

$$\tau_i = v_i + v_i G_0 \tau_i, \quad T_i = v_i + v_i G_0 T_i, \quad T = \sum_i T_i = \sum_i \tau_i + \sum_i \tau_i G_0 \sum_{j \neq i} T_j \quad (2-3)$$

となる。 τ_i は核内 2 体散乱 T 行列である。第 1 式においてグリーン関数が異なるため、素過程での T 行列とは必ずしも同じでない。ここで質量数が大きいとして $\mathcal{O}(1/A)$ を無視する近似をすれば、

$$T \simeq \tilde{T} + \tilde{T} G_0 T \quad (\tilde{T} = \sum_i \tau_i) \quad (2-4)$$

となり、入射粒子と原子核の T 行列はそれぞれの核子との散乱振幅の和 $\tilde{T}$ を「ポテンシャル」として扱う 1 体問題に帰着できる。少し進んだ近似として、核内の核子波動関数は半対称化されていることを用いてどの T_i も同じであると仮定する Kerman-McManus-Thaler の多重散乱理論 [15]、

$$\sum_{j \neq i} T_j \simeq \frac{A-1}{A} T \rightarrow T' = \tilde{T}' + \tilde{T}' G_0 T', \quad (\tilde{T}' = \frac{A-1}{A} \sum_i \tau_i, \quad T' = \frac{A-1}{A} T) \quad (2-5)$$

がある。

インパルス近似ではさらに、1 段階反応であること、および核内 2 体散乱振幅が自由空間の散乱振幅と同じであることを仮定する。素過程での T 行列を t_i とすれば、

$$T \simeq \sum_i \tau_i = \sum_i t_i \quad (2-6)$$

と近似するのである。

さて hA 反応の断面積を求めてみよう。例として、ハイパー核生成反応 $A(\pi^+, K^+)_{\Lambda} A'$ を考える。 $\pi^+, A, K^+, \Lambda A'$ の運動量を p_1, p_2, p_3, p_4 、 $A, \Lambda A'$ の内部状態を i, f としよう。このときフェルミの黄金率から微分断面積は

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle p_3 p_4 f | T | p_1 p_2 i \rangle|^2 \rho_E \quad (2-7)$$

と与えられる。ここで ρ_E は終状態の状態密度である。微分断面積は流束あたりの遷移確率であり、始状態における相対速度を v_i として、

$$d\sigma = \frac{dW}{v_i} = \frac{1}{v_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |T|^2 \frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \quad (2-8)$$

$$\frac{d^2\sigma_{fi}}{dE_3 d\Omega_3} = \frac{p_3 E_3}{(2\pi)^2 v_i} |T|^2 \delta(\omega - E_1 + E_3) \quad (\omega = E_4 - E_2) \quad (2-9)$$

ここで $d^2\sigma/dE_3 d\Omega_3$ は放出粒子の散乱角に加えてエネルギーにも依存しており、2 重微分断面積と呼ばれる。インパルス近似の下では $T \simeq \sum_i t_i$ であり、 $t \simeq \tilde{t}(E, p_1, p_3) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ と t が短距離力で表せるとすれば、有効核子数近似が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{fi}}{dE_3 d\Omega_3} &= \frac{p_3 E_3}{(2\pi)^2 v_i} |\tilde{t}|^2 N_{\text{eff}} \delta(\omega - E_1 + E_3) \\ &\simeq \beta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab.}}^{\text{elem.}} N_{\text{eff}} \delta(\omega - E_1 + E_3) \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \left| \int d\mathbf{r} \chi_3^{(-)*}(\mathbf{r}) \left\langle f \left| \sum_j \mathcal{O}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right| i \right\rangle \chi_1^{(+)}(\mathbf{r}) \right|^2 \quad (2-11)$$

ここで β は実験室系での素過程断面積を t 行列で表す際に現れる運動学因子、 $\mathcal{O}_j$ は j 番目の核子の種類を変える演算子である。 N_{eff} は素過程により遷移した状態と始状態波動関数がどの程度重なりを持つかを示す度合いを表す。

簡単のため、中間子波動関数が平面波であり、終状態 $|f\rangle$ が $1p1h$ 状態であるとしよう。このとき有効核子数は運動量移行 $\mathbf{q}$ を与えた核子 1 粒子波動関数 φ_i とハイペロン 1 粒子波動関数 φ_f の重なり の 2 乗で表されることとなる。

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} |\langle \varphi_f | \mathcal{O} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | \varphi_i \rangle|^2 \quad (2-12)$$

特に運動量移行が小さな場合には、量子数が同じ状態にのみ遷移が起こる。例えば (K^-, π^-) 反応のような発熱反応では運動量移行が小さく、核子が同じ量子数のハイペロン状態に移り変わる反応が起こる。逆に量子数の異なる状態を作りたい場合には有限の運動量移行が必要である。例えば (π^+, K^+) (吸熱反応) では $300 \text{ MeV}/c$ 程度の運動量移行が伴い、量子数が異なる様々な状態を生成できる。

2.2 連続状態遷移 (グリーン関数法)

前節の最後で述べたように、連続状態への遷移ではグリーン関数法が有効である。問題を特定しておくため、ここでは (π, K) 反応において (π, K) 反応により一粒子状態 α にあった核子がハイペロン (一粒子波動関数が φ_Y) に変化する場合を考えよう。この場合、 T 行列要素は

$$T_{fi} = \langle \chi_K(\mathbf{P}_K) \varphi_Y | t | \chi_\pi(\mathbf{P}_\pi) \varphi_\alpha \rangle = \bar{t}(E, p_\pi, p_K) \langle \varphi_Y | F_\alpha \rangle, \quad (2-13)$$

$$F_\alpha(\mathbf{r}) = \chi_K^*(\mathbf{r}; \mathbf{P}_K) \chi_\pi(\mathbf{r}; \mathbf{P}_\pi) \varphi_\alpha(\mathbf{r}), \quad (2-14)$$

となる。終状態について和を取れば、この遷移の強度関数は、

$$\begin{aligned} S(E) &= \sum_{\alpha, Y} \langle F_\alpha | \varphi_Y \rangle \langle \varphi_Y | F_\alpha \rangle \delta(E + E_\alpha - E_Y) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{\alpha, Y} \left\langle F_\alpha \left| \frac{1}{E - E_\alpha - H_Y + i\varepsilon} \right| \varphi_Y \right\rangle \langle \varphi_Y | F_\alpha \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{\alpha} \langle F_\alpha | G_Y(E - E_\alpha) | F_\alpha \rangle \right] = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' F_\alpha(\mathbf{r}) G_Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E - E_\alpha) F_\alpha(\mathbf{r}') \right], \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$G(E) = \frac{1}{E - H_Y + i\varepsilon}, \quad (2-16)$$

とグリーン関数を用いて表せる。

ハイペロンの 1 粒子状態が、一粒子ポテンシャル $U_Y(\mathbf{r})$ の固有状態として与えられる場合には、グリーン関数は

$$G_Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_{\beta=\ell, j, \mu} \mathcal{Y}_{\ell j \mu}^*(\Omega) \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{u_\beta(r_{<}; E) w_\beta(r_{>}; E)}{r r' W(u_\beta, w_\beta)} \mathcal{Y}_{\ell j \mu}(\Omega') \quad (2-17)$$

となる。ここで u は regular solution、 $w \rightarrow e^{ikr} (E < 0), \exp(-\lambda r) (E < 0)$ は outgoing solution、 $W(u, w) = u'w - uw'$ はロンスキアン、 $\mathcal{Y}_{\ell j \mu}$ は spin-spherical harmonics である。

問題 4: Eq. (2-17) が Hyperon のグリーン関数であること、 $(G = (E - H_Y + i\varepsilon)^{-1})$ が成り立つことを示せ。 u, w は動径波動関数である。spin-spherical harmonics が完全性を満たすこと、 $\sum_{\beta} \mathcal{Y}_{\beta}^* \mathcal{Y}_{\beta'} = \delta(\Omega - \Omega') \delta_{\sigma\sigma'}$ (σ, σ' はスピン状態)、は用いてよい。

直接反応理論の適用例についてはスライドにて。

2.3 輸送方程式

前節で議論したように、 hA の短時間の接反応では標的核の密度変化は小さく、与えられたポテンシャル中での 2 体反応が主要な反応機構であり、Impulse 近似が有効である。 hA 反応でも励起エネルギーの大きな領域では、多段階の反応が無視できなくなり、複合核反応 (励起エネルギーが多くの核子に分散された状態) に至る。

原子核 – 原子核反応では密度が大きく変化するとともに多く素過程反応を経て温度が上昇し、高温・高密度物質が生成される。低エネルギーでは複合核が生成される。中間エネルギー・高エネルギーでは反応に関わる核子 (関与者) とかかわらない核子 (傍観者) が分離した participant-spectator reaction が主要となる。関与者部分は複雑な反応を経由するため量子効果は抑制され、その運動は輸送模型により記述される。

密度が低い場合には核子の 2 体衝突により反応が進み、Boltzmann 方程式により系の発展が記述される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = I_{\text{coll}} \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{coll}} &= - \int \frac{d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^9} w(p_2 \rightarrow p_3 p_4) [f f_2 (1 - f_3)(1 - f_4) - f_3 f_4 (1 - f)(1 - f_2)] \\ &= - \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega [f f_2 (1 - f_3)(1 - f_4) - f_3 f_4 (1 - f)(1 - f_2)] \end{aligned} \quad (2-19)$$

f は位相空間分布関数を表し、 $f = f(x, p)$, $f_i = f(x, p_i)$ である。右辺第 1 項は $p_2 \rightarrow p_3 p_4$ なる 2 体衝突により粒子の運動量が変化する過程を示し、第 2 項はその逆反応を表す。 $1 - f$ はパウリ排他率により反応が抑制される効果 (Fermion の場合) を表し、Boson の場合には $1 + f$ が現れる。遷移確率は $w(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) |t|^2$ である。

平衡状態におけるボルツマン方程式の解は

$$f(x, p) = [\exp(\beta(x)(u(x) \cdot p - \mu(x))) + 1]^{-1} \quad (2-20)$$

と与えられる。 $u(x)$ は時空点 x における速度場を表す。一様な系で全体の静止系では上記の分布関数は Fermi-Dirac 分布となる。

$$f(x, p) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) + 1} \quad (2-21)$$

低エネルギー領域ではパウリ原理のため 2 核子の衝突は抑制され、分布関数は近似的に無衝突の輸送方程式 (Vlasov 方程式) に従う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \nabla U \cdot \nabla_p f = 0. \quad (2-22)$$

ここで U は一体ポテンシャルである。

Vlasov 方程式は Time-dependent Hartree-Fock (TDHF) 方程式の古典近似である。TDHF では核子の 1 粒子波動関数が従う方程式が

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} = h \varphi_\alpha, \quad h = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U, \quad (2-23)$$

と表される。 h は 1 粒子 Hamiltonian、 U は 1 粒子 (平均場) ポテンシャルである。密度行列

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \sum_\alpha w_\alpha \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) \varphi_\alpha^*(\mathbf{x}', t) \quad (2-24)$$

(w_α は状態 α の存在確率) を用いて TDHF 方程式を表せば、

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [h, \rho] \quad (2-25)$$

である。

古典近似を Wigner 変換により導入しよう。

$$A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{s} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} / \hbar} \langle \mathbf{x} + \mathbf{s}/2 | A | \mathbf{x} - \mathbf{s}/2 \rangle \quad (2-26)$$

密度行列の Wigner 変換は Wigner 関数と呼ばれ、位相空間分布関数の意味をもつ。積の Wigner 変換は

$$(AB)_W = A_W \exp(i\hbar\Lambda/2) B_W, \quad \Lambda = \overleftarrow{\nabla}_p \cdot \overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}_p \quad (2-27)$$

となることを利用して TDHF 方程式を書き換えよう。両辺を Wigner 変換し、積の Wigner 変換公式を用いると、Vlasov 方程式が得られることが分かる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{h_W, \rho_W\}_{PB} = \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f - \nabla U_W \cdot \nabla_p f \quad (2-28)$$

1 体ポテンシャルが非局所的である場合には、Wigner 変換は運動量にも依存するので、右辺第 1 項にもポテンシャルが現れる。

Boltzmann 方程式と Vlasov 方程式を組み合わせたハドロン輸送方程式 [17] は RHIC 以下のエネルギーにおける重イオン衝突をよく説明できる。ところが RHIC エネルギーではハドロン輸送方程式は実験データ、特に楕円フロー v_2 の大きさを説明することが出来ない。 v_2 は熱平衡に達した場合に大きくなるので、ハドロン輸送モデルでは相互作用の強さが足りないことが示唆される。

輸送理論の適用例についてはスライドにて。

References

- [14] 原田融、比連崎悟、山縣-関原淳子、原子核研究 Vol. 53 Suppl. 2, p 3-49.
- [15] A. K. Kerman, H. McManus and R. M. Thaler, Annals Phys. **8** (1959) 551 [Annals Phys. **281** (2000) 853].
- [16] O. Morimatsu and K. Yazaki, Nucl. Phys. A **435** (1985) 727.
- [17] G. F. Bertsch and S. Das Gupta, Phys. Rept. **160** (1988) 189. doi:10.1016/0370-1573(88)90170-6