

原子核基礎論A (シラバス)

■ 担当：大西 (基研)、板垣 (基研)

■ 授業の概要・目的

- まず原子核の基本的性質、およびスピン・アイソスピン依存性や斥力芯の存在などの核力の基本的性質について概観し、中間子交換や強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) に基いてそれらの起源について議論する。また、密度や温度を変化させたときの核物質の性質・状態方程式について概観する。
- 次に、原子核の性質を理解することを目的に、核子の多体として見た場合に核構造を記述するためにどのような描像があり得るのか、基本的な模型から現代的なアプローチまでを概観し、多様な現象のいくつかを解説する。

■ 到達目標

- 半径や質量、殻効果などの原子核の基本的性質、スピン・アイソスピン依存性や内部斥力芯の存在など核力の現象論的特徴を把握し、これらがどのような観測データから導かれるかを理解する。また核子・中間子自由度、および QCD に基づく核力の起源、核力から原子核を記述する理論的枠組み、核物質の相図と状態方程式について、その概要を把握する。
- 核力の理解を基礎に、核構造を記述する基本的な模型から平均場理論やクラスター理論など現代的なアプローチの基本概念とその手法について理解する。宇宙での元素合成を含む多様な核現象を基礎理論に関連付けて理解する。

原子核基礎論A (シラバス, cont.)

■ 授業計画と内容

核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

- 1. はじめに(原子核の基本的性質) (2コマ)
- 2. 核力とその起源 (3コマ)
- 3. 核物質の相図と状態方程式 (2コマ)
- 4. 核力再説 (1コマ)
- 5. 液滴模型と核物質 (1コマ)
- 6. シェル模型と平均場模型 (2コマ)
- 7. クラスタ模型と第一原理計算 (1コマ)
- 8. 最近の話題(講義の途中でもとりあげる) (1コマ)
不安定核の構造、宇宙の元素合成

■ 成績評価の方法・観点及び達成度

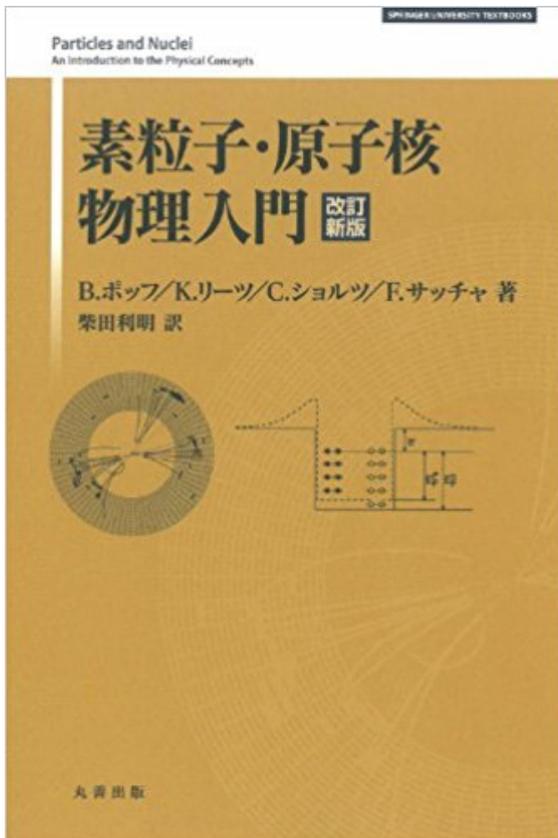
- レポート試験の成績(80%) 平常点評価(20%)
平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。

核力とその起源

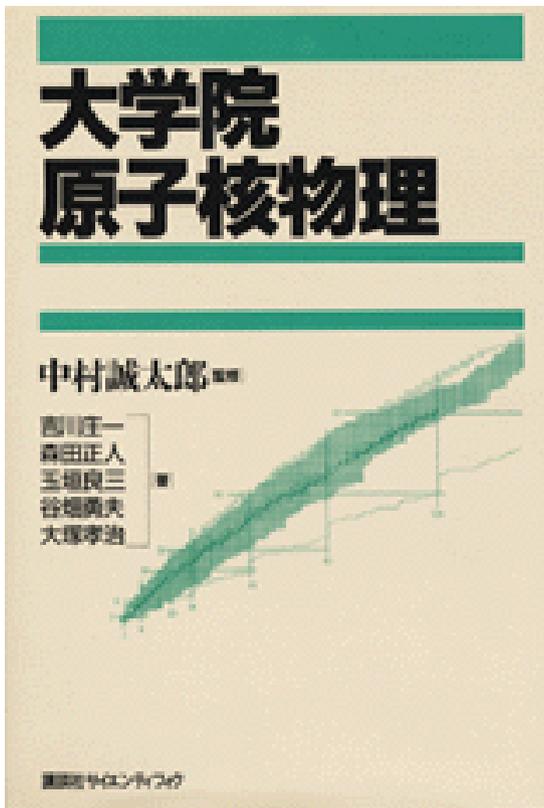
- 核力の概要
- 核力と位相差
 - 部分波展開、低エネルギー散乱、NN 散乱の位相差
- π 粒子交換ポテンシャル
 - Feynman 振幅とポテンシャル、 πN 結合、one pion exchange potential (OPEP)、(場の理論と Feynman 則)
- 斥力芯の起源
 - ベクトル中間子交換による斥力、クォーク模型、構造的斥力芯、格子 QCD 核力

参考書

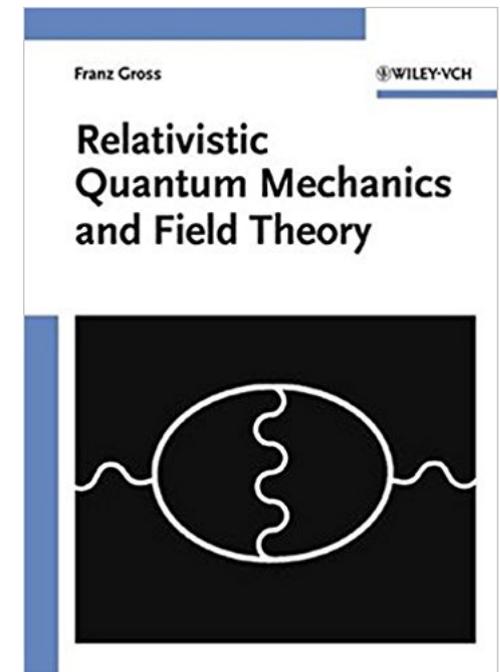
- Sec. 2 ではポッフ・リーツ・ショルツ・サッチャの教科書とともに、玉垣さんが執筆された大学院原子核物理（第4章、核力の多様性）等を参考にしています



5616 円



5340 円 (在庫なし)



10779 円 ~

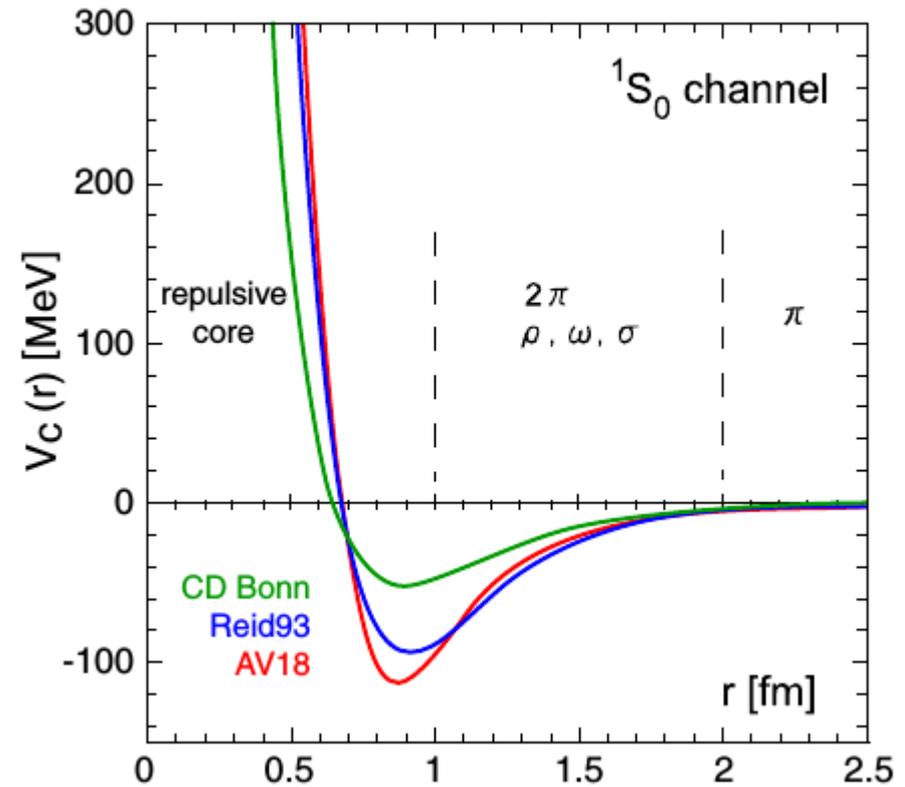
核力の概観

■ 核力の3領域

- 遠方 ($r > 2$ fm) \rightarrow 1π 交換力
Yukawa ('35)
- 中距離 \rightarrow ボソン交換 ($2\pi, \rho, \omega, \sigma, \dots$)
E.g. Machida, Toyoda ('56)
- 短距離 \rightarrow 斥力芯
Jastrow ('51)

■ 強いスピン・アイソスピン依存性

- 中心力、スピン軌道力、
テンソル力、...
- アイソスピン対称性
T=1 状態 ($pp, nn, (pn+np)/\sqrt{2}$)
T=0 状態 ($(pn-np)/\sqrt{2}$)



Aoki, Hatsuda, Ishii ('07)

核力と位相差

核力と位相差

■ Schrödinger Equation (spherical potential)

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

■ Partial wave expansion of the plane wave

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell \left(e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right) P_\ell$$

$$j_\ell(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} = \frac{1}{2ikr} \left(e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right)$$

核力と位相差 (cont.)

■ Radial wave function

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + V_\ell(r) \right] u_\ell(r) = E u_\ell(r)$$

$$u_\ell(r) \rightarrow \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)} \right)$$

■ Boundary condition

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^\ell \frac{A_\ell u_\ell(r)}{kr} P_\ell$$

$$\rightarrow \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^\ell \left(S_\ell(k) e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right) P_\ell$$

$$A_\ell = e^{i\delta_\ell}, \quad S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}, \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

Scattering amplitude \rightarrow Phase shifts

低エネルギー散乱 (*s-wave*)

- 低エネルギー散乱 → $L=0$ が主要

$$f \rightarrow \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 = (k \cot \delta_0 - ik)^{-1}$$

$k \rightarrow 0$ で散乱振幅が発散しない条件 = $\lim_{k \rightarrow 0} \sin \delta_0 = 0$

$$(\delta_0(k \rightarrow 0) = n\pi)$$

- 短距離力 $V(r)=0$ ($r>R$)、
低エネルギー $E < |V(r)|_{\max}$ ($r<R$) では、
 $r=R$ での対数微分で内側の wf が決まる

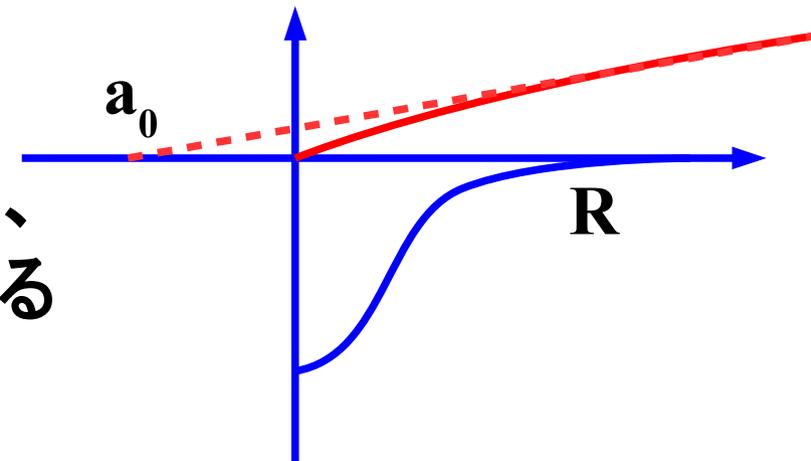
a_0 : scattering length (散乱長)

r_{eff} : effective range (有効レンジ)

$$k \cot(kR + \delta_0) = W, \quad k \cot \delta_0 = \frac{W + k \tan kR}{1 - W \tan kR/k} \simeq -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2$$

$r>R, k \rightarrow 0$ において動径波動関数は $u(r=a_0)=0$ となる1次関数

$$\delta_0 \simeq -a_0 k \rightarrow u_0(r) \simeq \sin(k(r - a_0))$$



低エネルギー散乱 (*s-wave*)(*cont.*)

- 十分に zero energy に近い束縛状態がある場合 $a_0 > 0$

$$u_{\text{BS}}(r) = A \exp(-\kappa r) (r > R) \rightarrow W = -\kappa$$

$$-\frac{1}{a_0} = \frac{-\kappa}{1 + \kappa R} \rightarrow a_0 \simeq \frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}} \quad (\varepsilon = \text{binding energy})$$

散乱状態 wf は $r \sim a_0$ で節 \rightarrow 構造的斥力芯

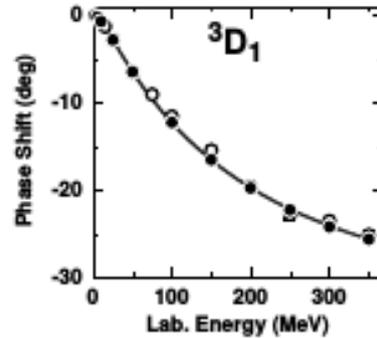
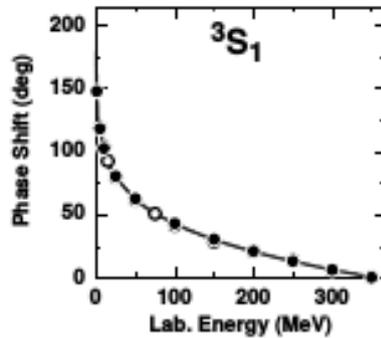
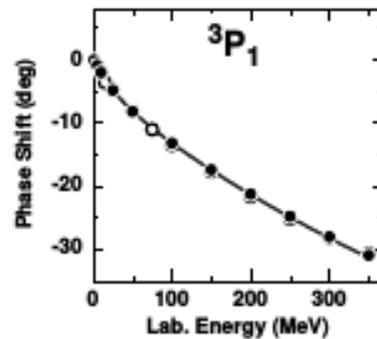
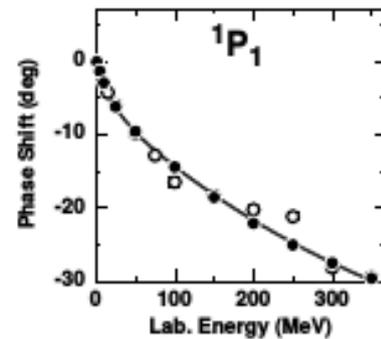
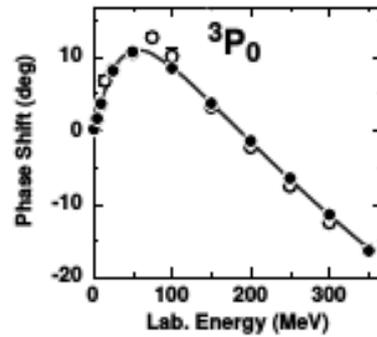
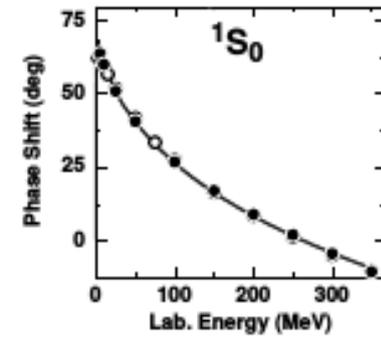
- 斥力コアポテンシャル ($V(r) = +\infty$ ($r < r_c$), $V(r) = 0$ ($r > r_c$)) $\rightarrow a_0 = r_c$

$$u_0(r) = \sin(k(r - r_c)), \quad \delta_0(k) = -kr_c$$

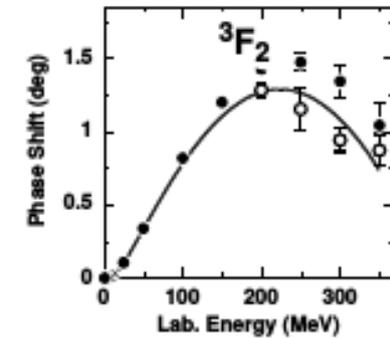
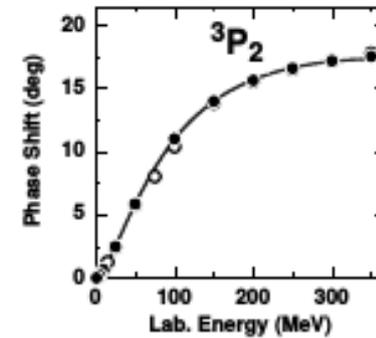
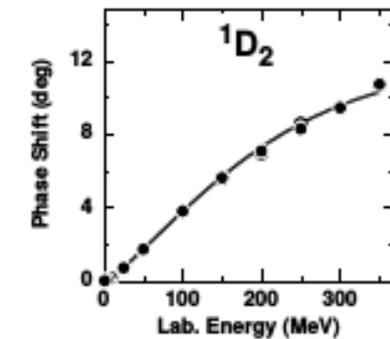
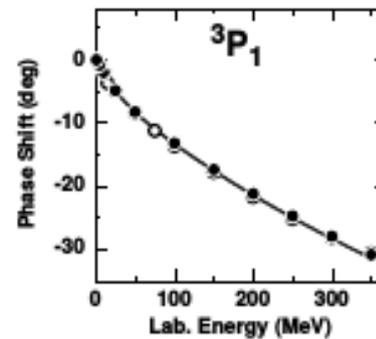
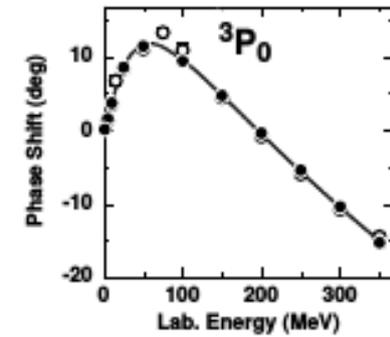
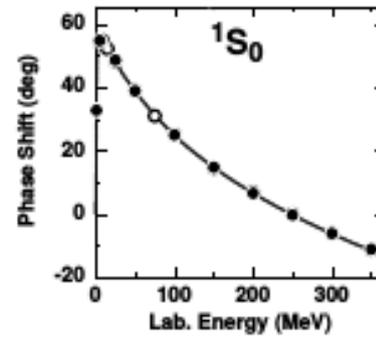
- 束縛状態を持たない引力 $\rightarrow a_0 < 0$

NN scattering phase shifts (1)

np scattering



pp scattering



R. Machleidt, Phys. Rev. C 63 (2001) 024001 [nucl-th/0006014].

NN scattering phase shifts (2)

■ 分光学表示

- (合成) スピン S 、軌道角運動量 L 、全角運動量 J
($L=0, 1, 2, \dots$ には S, P, D, \dots の文字)

$$2S+1 L_J$$

■ パウリ原理

- 核子はフェルミオン $\rightarrow S + T + L = \text{odd}$

■ アイソスピン対称性

- (S, T, L, J) が同じなら、 np, pp 散乱での phase shift は同じ

$S \backslash T$	0	1
0	1O	1E
1	3E	3O

NN scattering phase shifts (3)

■ s-wave: 外側の引力と斥力芯

- 低エネルギーで正 → 引力

- 3S_1 (T=0): 重陽子を束縛させる核力

$\delta_0(k \rightarrow 0) = \pi$ から始まり、エネルギーとともに下がる

- 1S_0 (T=1): 対エネルギーを生み出す

$\delta_0(k \rightarrow 0) = 0$ から始まり、 $E \sim 1$ MeV で 60° 程度に達し、
エネルギーとともに下がる

■ p-wave: スピン依存性

- 1P_1 (T=0): 強い斥力

- 3P (T=1): J に依存 (テンソル力、LS 力)

Pion Exchange Potential

ファインマン振幅とポテンシャル

■ ファインマン振幅と断面積

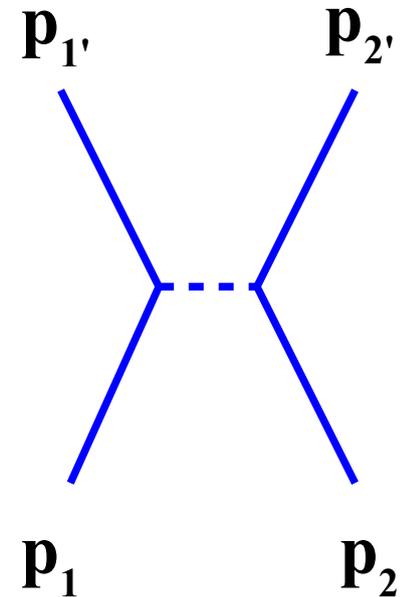
参考: *F. Gross (John-Wiley & Sons., '93)*

$$d\sigma = \frac{1}{4vE_1E_2} \int_{d\Omega} \left[\prod_i \frac{d^3p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right] (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) |\mathcal{M}|^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 16(E_1 + E_2)^2} \quad (v = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 / E_1 E_2})$$

■ ボルン近似と比較

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{m_1 m_2}{2\pi(m_1 + m_2)} \right]^2 |\langle f | V | i \rangle|^2$$



→ ポテンシャルのフーリエ変換
 \propto ファインマン振幅

$$\tilde{V}(q) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{1}{4(E_1 + E_2)} \mathcal{M} \xrightarrow{\text{Non.Rel.}} \frac{\mathcal{M}}{4m_1 m_2}$$

■ Example: Lagrangian of $N\pi$ system

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - \frac{1}{2}m_\pi^2 \pi \cdot \pi - g\bar{N}i\gamma_5 \tau \cdot \pi N$$

■ Feynman Rules

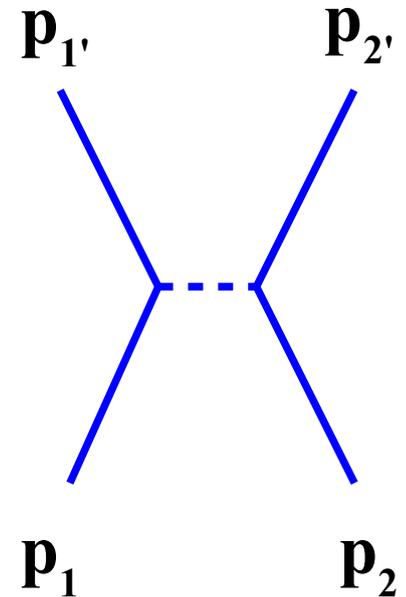
- overall i ($\leftarrow S \sim (1 - i M)$)
- coupling constant $\times i$ ($\leftarrow \exp(i L)$)
- boson propagator for internal lines

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- external fermions

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/(E + m) \end{pmatrix} \chi(s)$$

- fermion propagators, external bosons, internal momentum integral, symmetry factors, ...

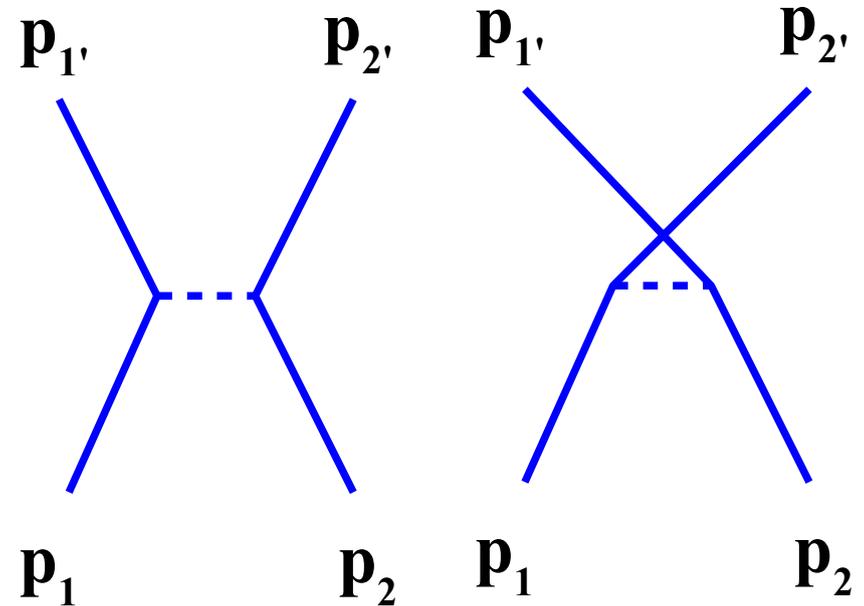


フインマン振幅 (one pion exchange)

■ Feynman amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i g^2 \frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \\ &\times [\bar{u}(\mathbf{p}'_1, s'_1) \gamma_5 \tau_i u(\mathbf{p}_1, s_1)] [\bar{u}(\mathbf{p}'_2, s'_2) \gamma_5 \tau_i u(\mathbf{p}_2, s_2)] \\ &- (\text{exchange term}) \\ &= -g^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 + \mathbf{q}^2} - (\text{exchange term}) \end{aligned}$$

$$[\bar{u}_{1'} \gamma_5 \tau_i u_1] = \boldsymbol{\sigma}_1 \tau_{1i} \cdot \mathbf{q} \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{1'})$$



One Pion Exchange Potential

One Pion Exchange Potential (OPEP) (direct term)

$$\begin{aligned}
 V_D(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \left[-\frac{g^2}{4m_N^2} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 + q^2} \right] \\
 &= \frac{g^2}{4m_N^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{m_\pi^2 + q^2} \\
 &= \frac{g^2}{4\pi(2m_N)^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \left(\frac{e^{-m_\pi r}}{r} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4\pi} \left(\frac{m_\pi}{2m_N} \right)^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + S_{12} \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \right], \\
 S_{12} &= \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2
 \end{aligned}$$

$S \backslash T$	0	1
0	9	-3
1	-3	1

特徴

● 中心力 $(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow$ 核力の特徴

$$(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = (4T(T+1) - 6)/2 = -3, 1 \quad (I = 0, 1)$$

● テンソル力 \rightarrow S=1 チャンネルでの引力 (重陽子が束縛)

■ 相互作用描像

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\Psi(t)\rangle_S = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I$$

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}$$

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_{\text{int}}(t) U(t, t_0) \quad (H_{\text{int}}(t) = e^{iH_0 t} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t})$$

$$\rightarrow U(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t') \right]$$

■ S 行列

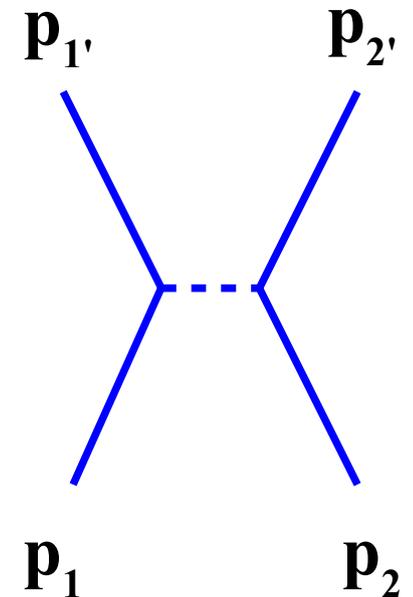
$$S = U(+\infty, -\infty) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_{\text{int}}(t') \right]$$

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$$

S-matrix element in one pion exchange

■ Leading order = g^2

$$\begin{aligned}
 \langle p_1' p_2' | S^{(2)} | p_1 p_2 \rangle &= \frac{(-i)^2}{2} \int dt_1 dt_2 \langle p_1' p_2' | T [H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2)] | p_1 p_2 \rangle \\
 &\quad \Delta(q) \\
 &= \frac{(-ig)^2}{2} \int dx_1 dx_2 \langle p_1' p_2' | T [(\bar{N} i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} N)_{x_1} (\bar{N} i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} N)_{x_2}] | p_1 p_2 \rangle
 \end{aligned}$$



レポート問題 (Sec. 2)

- σ 粒子交換によるポテンシャルを求めよ。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - g\bar{N}\sigma N$$

と与えられるとする。

- 井戸型ポテンシャル $V_I(r)$, $V_{II}(r)$ における位相差を入射エネルギーの関数として求めよ。2核子の換算質量を $\mu(=M_N/2)$ とする。また V_0 の大きさは束縛状態を作らない程度に小さいとする。

$$V_I(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases} \quad V_{II} = \begin{cases} +\infty & r < r_c \\ -V_0 & r_c < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

余裕があれば、次の問にも答えよ。

$V_I(r)$, $R=1$ fm の場合、重陽子の束縛エネルギー (2.2 MeV) を説明するには、どの程度のポテンシャルの深さが必要か？

斥力芯の起源

核力の模型 (1)

- 1π 交換ポテンシャル (OPEP) が主となる $r > 2$ fm 以外の領域は近似理論・模型による記述が必要。
- ボソン交換に基づく模型 → 中間レンジ引力と斥力の一部
One Boson Exchange Potential (OBEP)

- ω 交換による斥力

E.g. Y. Nambu, Phys. Rev. 106 ('57) 1366. (ω の発見 ('76) 前 !)

- Nijmegen potential

E.g. T.A. Rijken, V.G.J. Stoks, Y. Yamamoto, PRC59('99),21.

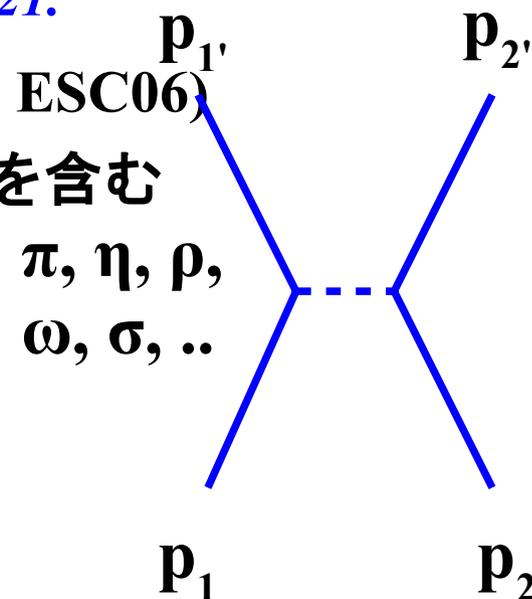
- ◆ Hard core (ND, NF), Soft core (NSC97, ESC04, ESC06)

- ◆ Pomeron exchange, meson-pair exchange などを含む

- Bonn potential → Julich potential

E.g. R. Machleidt, PRC63('01)024001

- ◆ OBEP を追求 ($\pi, \eta, \rho, \omega, \sigma$)



核力の模型 (2)

■ カイラル有効場理論

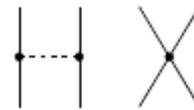
Chiral Effective Field Theory (Chiral EFT)

E.g. E. Epelbaum, H.-W. Hammer,

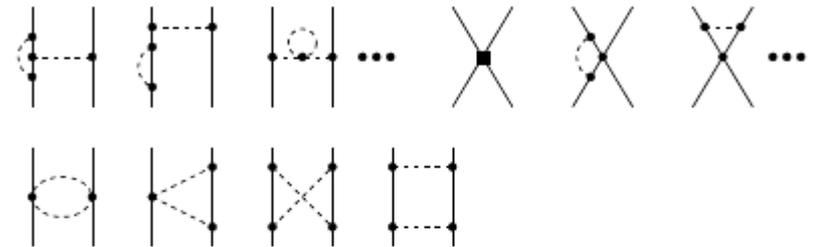
U.-G. Meissner, Rev. Mod. Phys. 81 ('09) 1773.

- Chiral sym. に基づく有効
ラグランジアンから核力を導出
- $m_q \rightarrow 0$ での低エネルギー自由度は
 π のみ。
- $m_\pi/\Lambda, p/\Lambda$ によって展開し、
高エネルギー自由度は contact 項へ

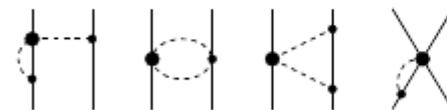
Leading order



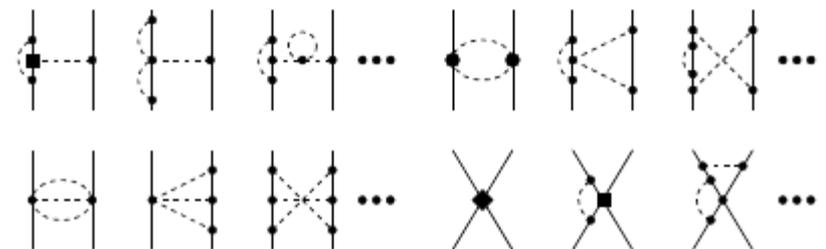
Next-to-leading order



Next-to-next-to-leading order



Next-to-next-to-next-to-leading order



核力の模型 (3)

■ クォーク模型

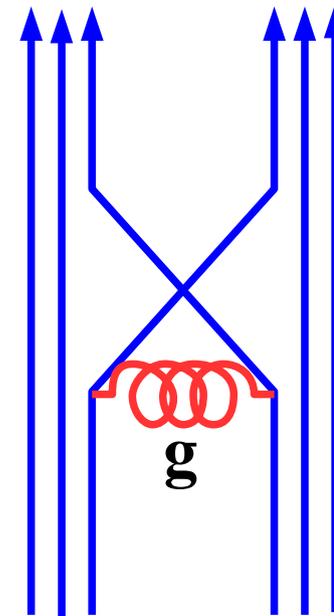
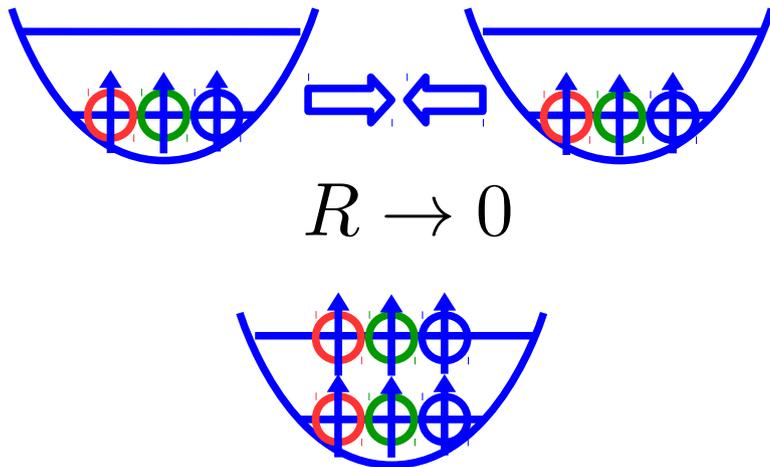
Y. Fujiwara, Y. Suzuki, C. Nakamoto, Prog. Part. Nucl. Phys. 58 ('07) 439.

M. Oka, K. Yazaki, Prog.Theor.Phys. 66 (1981) 556.

V.G. Neudachin, Yu.F. Smirnov, R. Tamagaki, Prog.Theor.Phys. 58 ('77) 1072.

- 核子間の短距離斥力は、クォーク間のパウリ排他律とグルーオン交換により現れる。

E.g. $\Delta^{++} \Delta^{++} (J = 3)$



格子 QCD による核力 (1)

- 格子 QCD における (Nambu-)Bethe-Salpeter amplitude

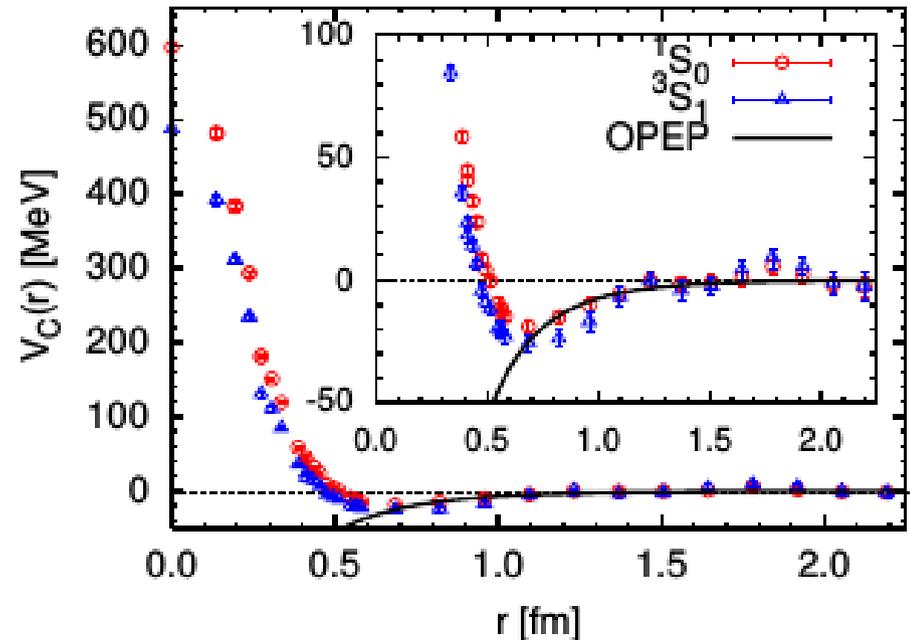
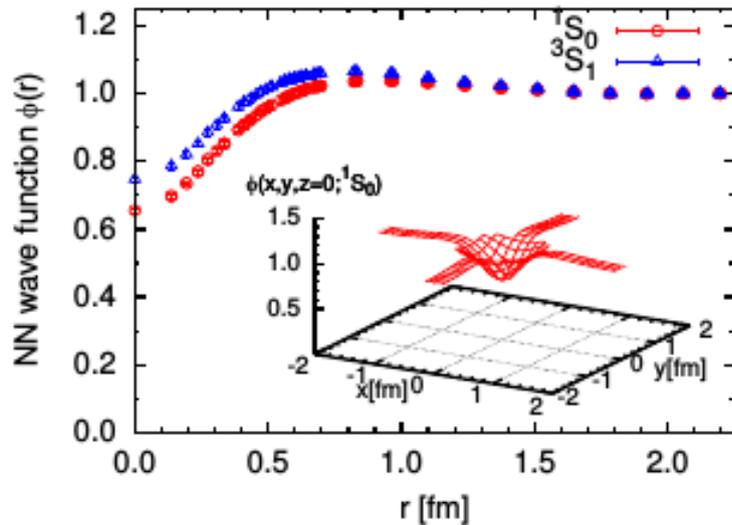
$$F_{\text{NN}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; t_0) \equiv \langle 0 | N_{\alpha}^i(\mathbf{x}, t) N_{\beta}^j(\mathbf{y}, t) \overline{\mathcal{J}}_{\text{NN}}(t_0) | 0 \rangle$$

は低エネルギーにおいて Schrodinger equation に従う

$$-\frac{1}{2\mu} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') = E \phi(\mathbf{r})$$

局所ポテンシャルを仮定すると、核力が求まる。

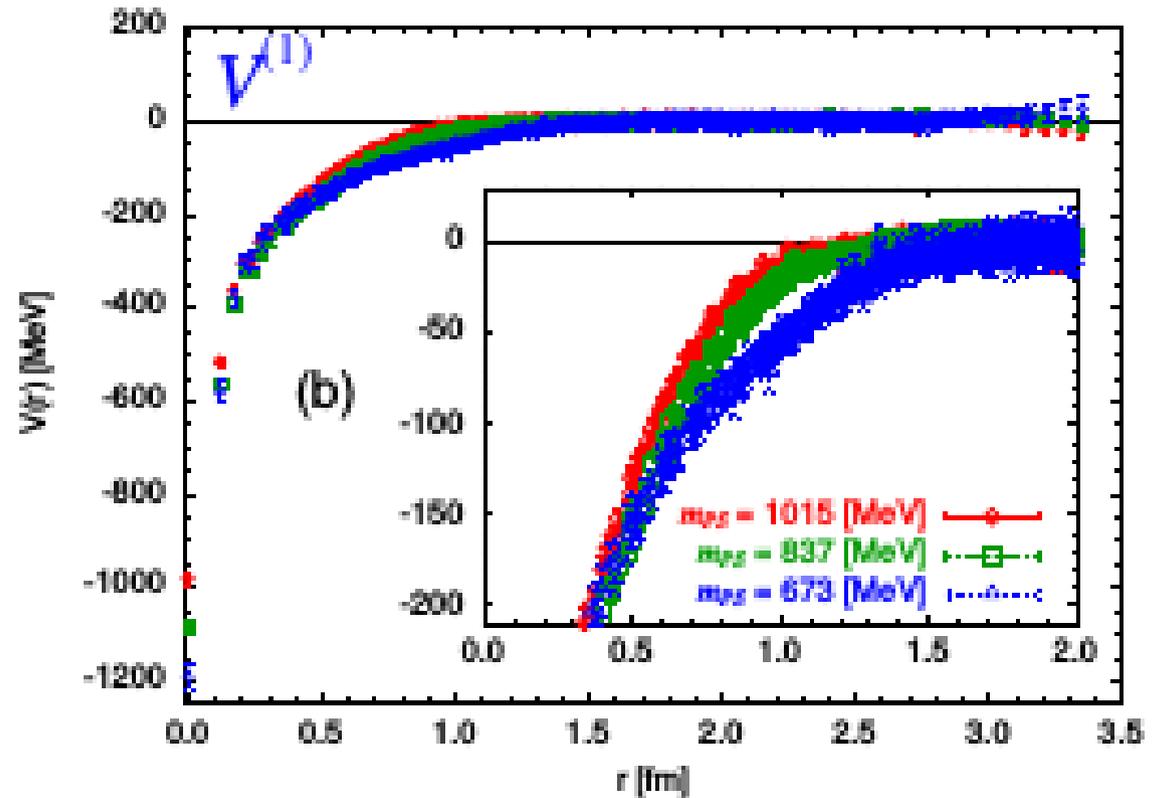
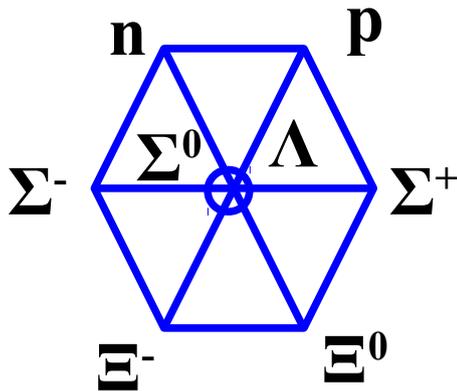
$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq V(\mathbf{r}, \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



N. Ishii, S. Aoki, T. Hatsuda, PRL99('07)022001.

格子 QCD による核力 (2)

- 斥力芯はバリオンの組み合わせについて共通か？
 → No. フレーバー-1重項チャンネルでは斥力は現れない。
 (フレーバー-1重項 : $n\Xi^0$ - $p\Xi^-$ - $\Sigma^+\Sigma^-$ - $\Sigma^0\Sigma^0$ - $\Sigma^-\Sigma^+$ - $\Lambda\Lambda$ の重ねあわせ)
- クォークのパウリ排他律からの予測と無矛盾
- ω 中間子交換が斥力芯の主要な起源ではない。



T. Inoue et al. (HAL QCD Collab.), PRL106('11)162002.