

原子核基礎論B

京大基研 大西 明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 核力・特に非中心力や3体力 (1回)
2. 原子核構造を記述するための種々のモデルの最近の進展 (2回)
3. 最近の中性子過剰核の物理の最近の進展 (2回)
4. 原子核構造における異なる状態の混合や競合 (2回) 板垣
5. 高温・高密度核物質概観 (1回) (高エネルギー重イオン衝突、コンパクト天体現象)
→ 前期の Sec. 3 と重なりが大きいのでスキップ
6. 有限温度・密度における場の理論入門 (2回)
7. QCD 有効モデルにおける相転移と相図 (2回)
8. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1回) 大西
9. 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論 (1回)

Field Theory at Finite T & ρ
– Short Course –

■ 量子力学での経路積分 (Path Integral)

- 時刻 t_i に位置 q_i にいた粒子が時刻 t_f に位置 q_f に到着する振幅

$$S_{fi} = \left\langle q_f, t_f \mid e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} \mid q_i, t_i \right\rangle = \int_{q(t_i)=q_i, q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q e^{iS[q]}$$

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}) ,$$

- 特徴

- ◆ 演算子の代わりに通常の数 (c-number) で表せる
- ◆ 作用 S の構成時に正準交換関係を用いることにより「量子論」の性質を取り込む

■ 場の理論 = 各点での場の振幅 $\phi(x,t)$ を座標とする量子力学

$$S_{fi} = \left\langle \Psi_f \mid e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} \mid \Psi_i \right\rangle = \int_{\Psi(t_i)=\Psi_i, \Psi(t_f)=\Psi_f} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}$$

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) .$$

■ 分配関数

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(T) &= \sum_n \exp(-E_n/T) = \sum_n \langle n | e^{-\hat{H}/T} | n \rangle \\ &= \sum_n \langle n | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | n \rangle_{t_f - t_i = -i/T} = \int_{\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}\end{aligned}$$

$$S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau d^3x \mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi)$$

$$\mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi) = -\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \partial_t \phi \rightarrow i\partial_\tau \phi)$$

$$t = -i\tau, \partial_t = i\partial_\tau, \beta = 1/T$$

$$iS = i \int_0^{-i\beta} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x L = -int_0^\beta d\tau d^3x \mathcal{L}_E$$

- 統計力学の分配関数は虚時間発展の振幅の和である。
- 全ての状態について和 $\rightarrow \tau=0, \beta$ で周期境界条件をつけて任意の $\phi(\mathbf{x}, t)$ について足し合わせる。

Example: Scalar Field

■ Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi)$$

Euler-Lagrange equation (principle of least action)

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \text{ (Klein-Gordon eq.)}$$

■ Euclidean Lagrangian

● Euclid 化のルール $t = -i\tau, x_4 = \tau, g_{\mu\nu} = (1, 1, 1, 1), L_E = -L$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + U(\phi)$$

→ 相互作用がない場合に実際に経路積分してみましょう。

Partition Func. of Free Scalar Field

■ 自由スカラー場の分配関数

- 有限のサイズの箱 (体積 V) の中で自由スカラー場 ($U=0$)
- フーリエ変換

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n, \mathbf{k}} \exp(-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{k})$$

Periodic Boundary Condition $\omega_n = 2\pi nT$, $k_i = 2\pi n_i/L$

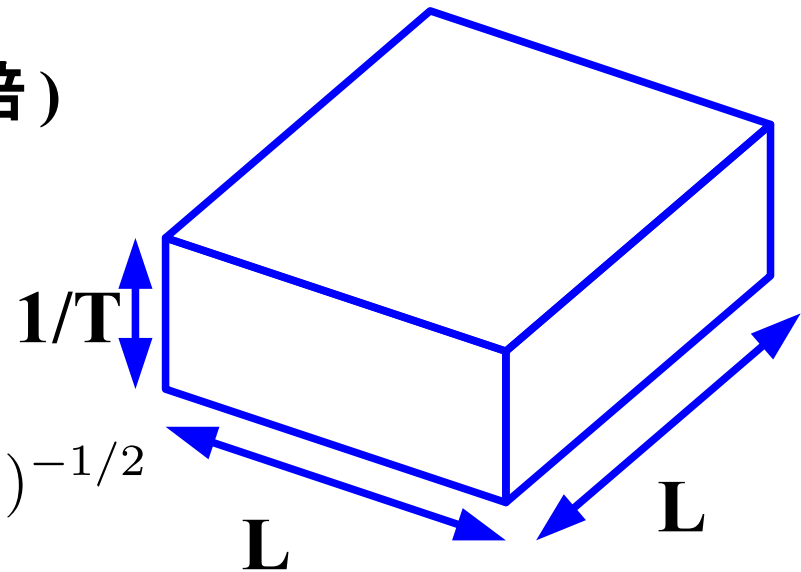
Euclidean action $S_E = \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \phi_n^*(\mathbf{k}) \phi_n(\mathbf{k})$,

- フーリエ変換はユニタリー変換だから、積分の測度が変わらない。(高々定数倍)

$$\mathcal{D}\phi = N \prod_{n, \mathbf{k}} d\phi_n(\mathbf{k})$$

- ガウス積分 $\rightarrow$ 分配関数

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} = N \prod_{n, \mathbf{k}} \sqrt{2\pi} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^{-1/2}$$



■ 自由エネルギー

$$\Omega = -T \log \mathcal{Z} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[T \sum_n \log(\omega_n^2 + \underbrace{\mathbf{k}^2 + m^2}_{E_{\mathbf{k}}^2}) \right] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} I(E_{\mathbf{k}}, T) + \text{const.}$$

■ 松原和 (Matsubara Frequency summation)

$$\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2E} \frac{\cosh(\beta E/2)}{\sinh(\beta E/2)} & (\omega_n = 2\pi n T) \\ \frac{1}{2E} \frac{\sinh(\beta E/2)}{\cosh(\beta E/2)} & (\omega_n = \pi(2n+1)T) \end{cases}$$

$$\frac{\partial I(E, T)}{\partial E} = \sum_n \frac{2ET}{\omega_n^2 + x^2} = \begin{cases} \coth(\beta E/2) & (\omega_n = 2\pi n T) \\ \tanh(\beta E/2) & (\omega_n = \pi(2n+1)T) \end{cases}$$

$$I(E, T) = E + 2T \log(1 - e^{-E/T}) + \text{const.}$$

Partition Func. of Free Scalar Field (cont.)

■ 自由エネルギー (グランド・ポテンシャル)

$$\Omega = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{E_{\mathbf{k}}/T}) \right] + \text{const.}$$

$$\rightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{E_{\mathbf{k}}/T}) \right]$$

ゼロ点エネルギー ($\hbar\omega/2$) 熱的励起

ゼロ点エネルギー部分を無視して部分積分すると、
通常の圧力を得る。

$$P = -\Omega/V = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{3E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/T} - 1}$$

場の理論 $\rightarrow$ Euclid 化 + Imag. Time $\rightarrow$ 統計力学

Matsubara Frequency Summation

■ Contour integral technique

$$S = T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T)$$

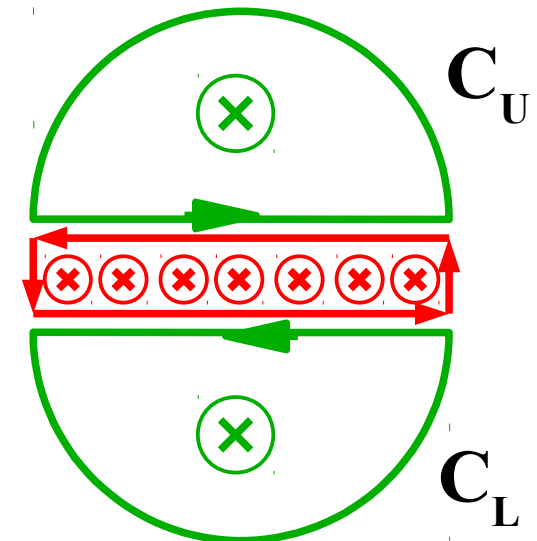
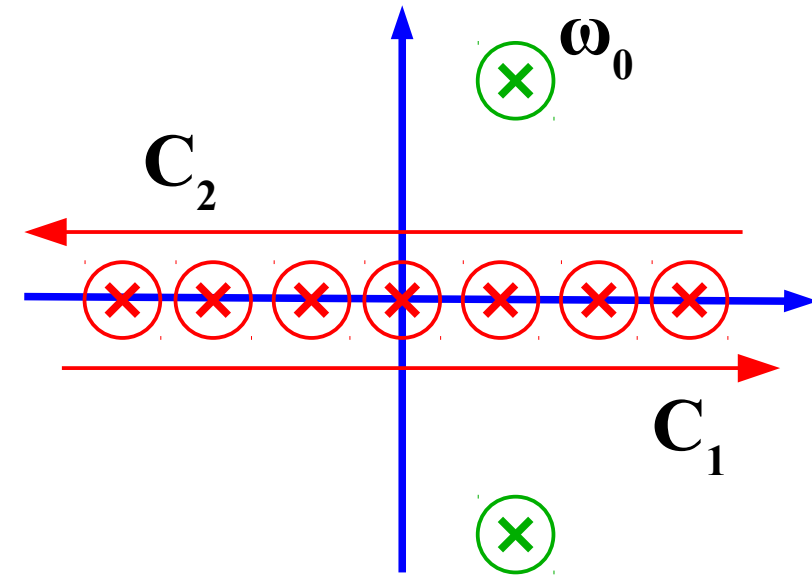
$$= \pm \int_{C_1+C_2} \frac{dz}{2\pi} \frac{g(z)}{e^{i\beta z} \mp 1} = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta \omega_0} \mp 1}$$

(g : meromorphic (有理型),
no pole on real axis,
decreases faster than $1/\omega$ at $\omega \rightarrow \infty$)

- Applicable to more general cases !
- Anti-periodic condition $\rightarrow$ Fermi-Dirac dist.

■ Example: $g(\omega) = 1/(\omega^2 + E^2)$
 $\rightarrow \omega_0 = \pm iE, \text{Res } g = \pm 1/2iE$

$$S = \frac{1}{2E} \frac{e^{\beta E} \pm 1}{e^{\beta E} \mp 1}$$



$$C_1 + C_2 + C_U + C_L = 0$$

■ Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

■ Euclidean action

$$(x_\mu)_E = (\tau = it, \mathbf{x}), (\gamma_\mu)_E = (i\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$$

■ Grassman number

経路積分において、フェルミオンは反可換な Grassmann 数

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. const.} = 0, \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. const.} = 1$$

$$\begin{aligned} \int d\chi d\bar{\chi} \exp[\bar{\chi} A \chi] &= \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!} (\bar{\chi} A \chi)^N = \dots = \det A \\ &= \exp[-(-\log \det A)] \end{aligned}$$

Bi-linear Fermion action leads to $-\log(\det A)$ effective action

■ Example: Relativistic Mean Field (RMF)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma)\psi + \mathcal{L}_{\text{meson}}$$

$$\Sigma = g_\sigma \sigma + \gamma^\mu (g_\omega \omega_\mu + g_\rho \rho_\mu \cdot \boldsymbol{\tau})$$

■ Euclid 化 + 化学ポテンシャルの導入

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp \left[- \int d^4x (L - \mu \psi^\dagger \psi) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp \left[- \int d^4x (\bar{\psi} D \psi + \mathcal{L}_{\text{meson}}) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp [-S_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu)] \end{aligned}$$

$$D = -i\gamma_\mu \partial_\mu - \mu\gamma^0 + m + \Sigma$$

■ 一様平均場近似 (meson field=const.) → 有効作用

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(F)} + S_{\text{meson}} = - \sum_{n, \mathbf{k}} \log \det D_{n, \mathbf{k}} + \int d^4x \mathcal{L}_{\text{meson}}$$

RMF: Uniform Field

- 一様な場を仮定 $\rightarrow$ Fourier 変換により D をブロック対角化

$$D_{n,\mathbf{k}} = \gamma^0(-i\omega_n - (\mu - V^0)) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M + g_\sigma \sigma$$

$$\rightarrow \det D_{n,\mathbf{k}} = [(\omega_n + i\mu^*)^2 + E_{\mathbf{k}}^{*2}]^2$$

$$\mu^* = \mu - g_\omega \omega^0 - g_\rho \rho^0 \tau, \quad E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}, \quad M^* = m + g_\sigma \sigma$$

- 松原振動数和を実行 $\mathcal{F}_{\text{eff}}^{(F)} = \Omega^{(F)} / V$

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}^{(F)} = -d_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E^*}{2} + \frac{T}{2} \log(1 + e^{-(E^* - \mu^*)/T}) + \frac{T}{2} \log(1 + e^{-(E^* + \mu^*)/T}) \right]$$

ゼロ点

粒子 (核子)

反粒子 (反核子)

- 温度 0 の場合

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2} \int^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* + d_N \int^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E^* - \mu^* \rho_B (d_N = d_f/2)$$

ゼロ点エネルギーは核子のループから現れる
(RMF では通常無視)

- 通常の Dirac 方程式 (Minkowski metric) に平面波を代入すると

$$(i\gamma^0\partial_t + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m)\psi = D\psi = 0$$

$$(\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{k} - m)\chi = D_{E,\boldsymbol{k}}\chi = 0$$

解は $E^2 = k^2 + m^2$ を満たすので、行列式が E の 4 次式であることを用いると

$$\det D_{E,\boldsymbol{k}} = (E^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2)^2 \quad (E_{\boldsymbol{k}}^2 = \boldsymbol{k}^2 + m^2)$$

- 中間子場が非一様な場合 (e.g. 原子核) には平面波基底が使えない → 一粒子基底
- 静的な中間子場での Dirac Eq. と一粒子基底

$$\hat{K} = \gamma^0 [-i\gamma \cdot \nabla + M^*(x) + \gamma^0 V_0(x)]$$

$$\hat{K}\psi_k = E\psi_k \text{ (Dirac. Eq., } E_k \in \mathbb{R}\text{)}$$

- 一粒子基底を使って $\gamma^0 D$ は対角化可能

$$\psi_{n,k}(x) = e^{-i\omega_n t} \psi_k(x)$$

$$\gamma^0 D = \hat{K} + \partial_\tau - \mu$$

$$\gamma^0 D \psi_{n,k} = (E_k - \mu - i\omega_n) \psi_{n,k} = (\varepsilon_k - i\omega_n) \psi_{n,k}$$

- 行列式

$$T \log \det D = T \log \det(\gamma^0 D)$$

$$= \sum_k \left[T \sum_n \log(\varepsilon_k - i\omega_n) \right] = \sum_k \left[\frac{T}{2} \sum_n \log(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2) \right]$$

RMF: non-uniform meson field (cont.)

■ 自由エネルギー（フェルミオン部分）

$$\begin{aligned}\Omega_F &= - \sum_k \left[\frac{\varepsilon_k}{2} + T \log(1 + \exp(-\beta \varepsilon_k)) \right] \\ &= - \sum_k \frac{|E_k|}{2} - \underbrace{\sum_{k, E_k > 0} T \log(1 + e^{-\beta(E_k - \mu)})}_{\text{粒子}} - \underbrace{\sum_{k, E_k < 0} T \log(1 + e^{-\beta(|E_k| + \mu)})}_{\text{反粒子}}\end{aligned}$$

■ $T \rightarrow 0$

$$\Omega_F \rightarrow - \sum_k \frac{E_k}{2} + \sum_{k, 0 < E_k < \mu} (E_k - \mu)$$

レポート(1)

- 全部で5-7問程度出します。3問程度以上レポートを出してください。(レポート(1)の〆切は12/11(火)の講義終了時。)
- 松原和を求める際に用いた次の式を導出せよ。(授業の復習となります。)

$$S = T \sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T) = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1}$$

- RMF の平均場近似において、粒子数・エントロピー・エネルギー密度を求める表式を求めよ。(uniform field の場合でよい。)