原子核基礎論B

京大基研　大西　明
Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 核力・特に非中心力や 3 体力 (1 回)
2. 原子核構造を記述するための種々の模型の最近の進展 (2 回)
3. 最近の中性子過剰核の物理の最近の進展 (2 回)
4. 原子核構造における異なる状態の混合や競合 (2 回)

板垣

5. 高温・高密度核物質概観 (1 回) (高エネルギー重イオン衝突、コンパクト天体現象)
   → 前期の Sec. 3 と重なりが大きいのでスキップ
6. 有限温度・密度における場の理論入門 (2 回)
7. QCD 有効模型における相転移と相図 (2 回)
8. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1 回)
9. 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論 (1 回)

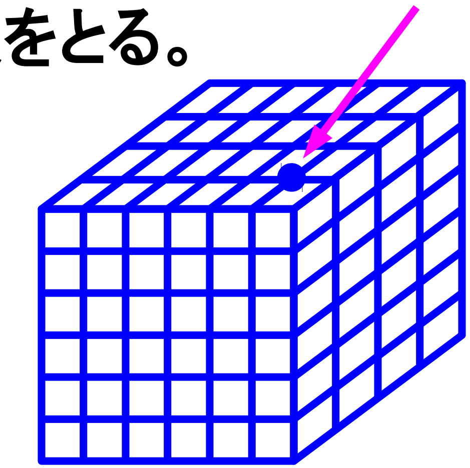
大西

Introduction to Lattice Field Theory

格子上の場の理論

- 場の理論＝無限自由度
  - 解析的・厳密にとくことは一般には困難 → 数値的に解く
  - 求めたいものは非常に複雑な積分
    →「区分求積」＝ 有限の格子上で解き、連続極限をとる。

ϕ



- スカラー場
  - 連続理論 (Euclidean) の作用 (ϕ^4 理論)

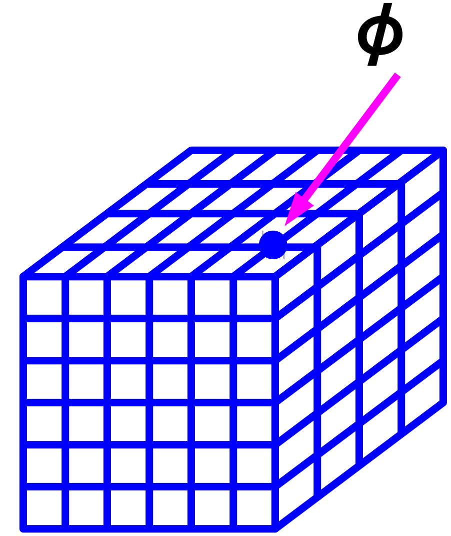
$$S_{\mathrm{cont}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda \phi^4 \right]$$

  - 格子上の作用
    - 連続極限で S_{cont} に一致
    - S_{cont} とできるだけ同じ対称性を持つ

$$S_{\mathrm{lat}} = -\frac{a^4}{2}\sum_{n,\mu} \phi(n) \frac{\phi(n+\hat{\mu}) + \phi(n-\hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(n) \right]$$

格子上の場の理論 (cont.)

- **格子上の作用：スカラー場理論**



$$S_{\mathrm{lat}} = -\frac{a^4}{2}\sum_{n,\mu}\phi(n)\frac{\phi(n+\hat{\mu})+\phi(n-\hat{\mu})-2\phi(n)}{a^2}$$
$$+a^4\sum_{n}\left[\frac{1}{2}m^2\phi^2(n)+\frac{\lambda}{4!}\phi^4(n)\right]$$

$n=(n_x, n_y, n_z)$: spacetime point on the lattice

$\hat{\mu}$: unit vector in the positive μ direction.

- **$\mathbf{a \to 0}$ の極限で、連続理論の作用と一致**

$$S_{\mathrm{lat}} \to a^4\sum_{n}\left[-\frac{1}{2}\phi(n)\sum_{\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu^2}+\frac{m^2}{2}\phi(n)^2+\frac{\lambda}{4!}\phi(n)^4\right]+O(a^6)$$
$$=\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\phi(x)\partial^\mu\partial_\mu\phi(x)+\frac{m^2}{2}\phi(x)^2+\frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4\right]$$

- **$\phi \to -\phi$ 等の対称性を保つ。**

Gauge field

- **Gauge action (Euclidean)**

$$S_G = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu],$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad \left([t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \mathrm{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}\right)$$

(経路積分では変数が c 数なので、$gA \to A$ とスケール)

- **Gauge transformation**

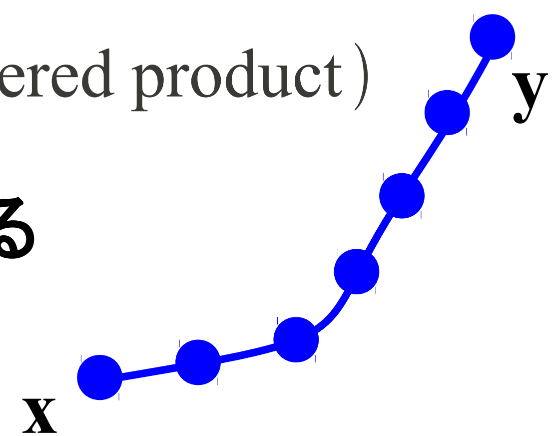
$$A_\mu(x) \to V(x)(A_\mu(x) - i\partial_\mu)V^+(x), \quad F_{\mu\nu}(x) \to V(x)F_{\mu\nu}V^+(x)$$

- **ゲージ不変性をもつ格子上の作用をどのように作るか？**
  → リンク変数

$$U(x,y) \equiv P\exp\left[i\int_x^y dz_\mu A_\mu(z)\right] \quad (P: \text{path ordered product})$$

リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受ける

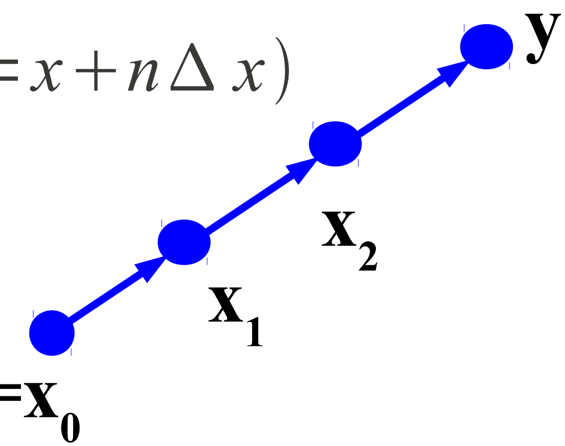
$$U(x,y) \to U'(x,y) = V(x)U(x,y)V^+(y)$$



Appendix: Gauge transformation of U

- **Proof of U(x,y) → V(x)U(x,y)V⁺(y)**

$$U(x,y) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left[1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu\right] \quad (x_n = x + n\Delta x)$$



(multiply (1+i A Δx) to the right !)
By using the gauge transformation of *A*,

$$A_\mu(x) \to V(x)\left(A_\mu(x) - i\partial_\mu\right)V^+(x)$$

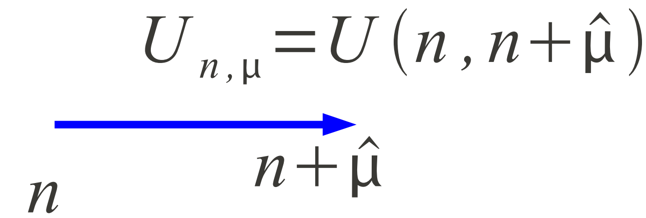
and the unitarity of *V*, *V*(*x*) *V*⁺(*x*)=1, we get

$$\begin{aligned}
&1 + iA'_\mu(x_n)\Delta x_\mu \\
&= 1 + iV(x_n)A_\mu(x_n)V^+(x_n)\Delta x_\mu + V(x_n)\partial_\mu V^+(x_n)\Delta x_\mu \\
&= V(x_n)V^+(x_{n+1}) + iV(x_n)A_\mu(x_n)V^+(x_{n+1})\Delta x_\mu + O((\Delta x)^2) \\
&= V(x_n)\left[1 + iA_\mu(x_n)\Delta x_\mu\right]V^+(x_{n+1}) + O((\Delta x)^2) \\
&\to U'(x,y) = V(x)U(x,y)V^+(y)
\end{aligned}$$

Gauge action

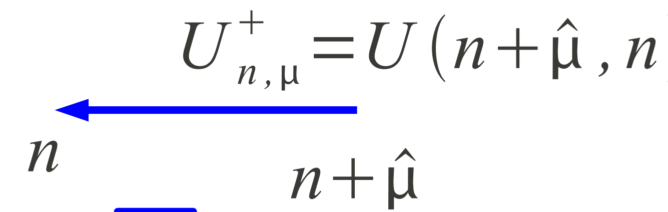
- **リンク変数**

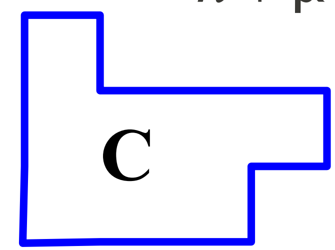
$$U_{n,\mu} \equiv U(n, n+\hat{\mu}) = \exp[ia A_\mu(n)] \in \mathrm{SU(N)}$$



- **リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受けるので、「閉じた経路」にそって積をとると、その trace はゲージ不変。**

$$\prod_{n\in C} U \rightarrow V(n) \left(\prod_{n\in C} U \right) V^{+}(n)$$

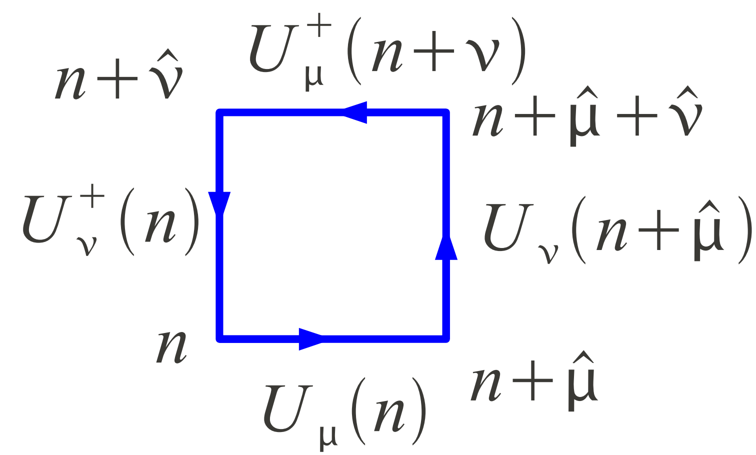




- **Plaquette**
  Lattice 上で最も小さな loop は単位正方形

$$n \rightarrow n+\hat{\mu} \rightarrow n+\hat{\mu}+\hat{\nu} \rightarrow n$$

$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U^{+}_{n+\nu,\mu} U^{+}_{n,\nu}$$

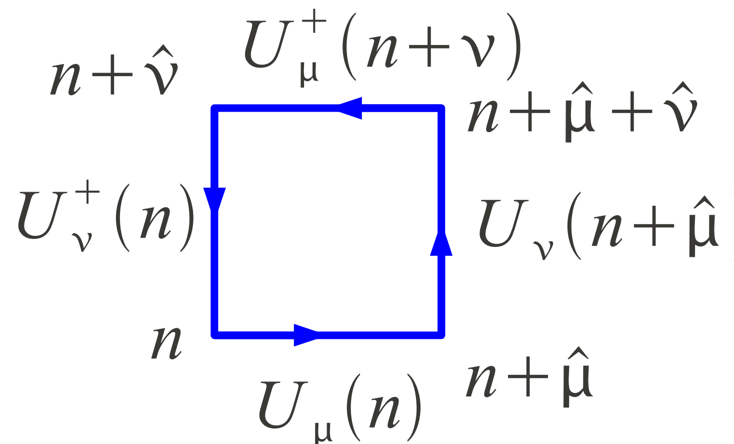


- **Gauge action (plaquette action)**

$$S_G = \beta_g \sum_{plaq.} \left[1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_{\mu\nu}(n) \right] \quad (\beta_g = 2N_c/g^2)$$

Appendix: Plaquette and continuum action

- **ゲージ場の格子作用**



$$S_G=\beta_g\sum_{plaq.}\left[1-\frac{1}{N_c}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_{\mu\nu}(n)\right]$$

- **U(1) (電磁場) の場合： 周積分 =rotation の面積分 → $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$**
- **非可換ゲージ場の場合 : Hausdorff 公式の利用** $e^A e^B=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$

$$\mathrm{tr}\,U_{\mu\nu}(x)=\mathrm{tr}\,e^{ia\{A_\mu(x)+A_\nu(x+\hat{\mu})+ia[A_\mu,A_\nu]/2+\cdots\}}\times e^{-ia\{A_\mu(x+\hat{\nu})+A_\nu(x)-ia[A_\mu,A_\nu]/2+\cdots\}}$$

$$=\mathrm{tr}\,e^{ia[(A_\nu(x+\hat{\mu})-A_\nu(x))-(A_\mu(x+\hat{\nu})-A_\mu(x))+ia[A_\mu,A_\nu]+O(a^3)]}$$

$$=\mathrm{tr}[1+\underbrace{ia^2F_{\mu\nu}+a^4}_{0}X_4-a^4F_{\mu\nu}^2/2+O(a^6)]$$

$$\lim_{a\to 0}S_G=\sum_{n,\mu\neq\nu}\beta_g\,\mathrm{tr}\left[1-\frac{a^4}{2}F_{\mu\nu}^2\right]$$

S. Aoki, Text

Link Integral

- ゲージ場の経路積分

$$Z_G = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \exp(-S_G) = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \exp\left[\beta_g \sum_{P \in \mathrm{plaq.}} \mathrm{tr}(U_P + U_P^+)\right]$$

  - **dU は群上の不変測度（Haar measure）**
    → ゲージ変換

$$U_{n,\mu} \to V(n) U_{n,\mu} V^+(n+\hat{\mu})$$

に対して不変な積分の測度が必要

- リンク積分 SU(N)
  - ゲージ不変性のみで、リンク変数の多項式の積分はほぼ決まる。

$$\int dU\, 1 = 1 \quad (\mathrm{normalization}), \quad \int dU\, U_{ab} = 0$$

$$\int dU\, U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$$

$$\int dU\, U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

Proof of the one-link integral formulae

- $\int dU\, U_{ab} = 0$
  - LHS = R_{ab} とおく。両辺に左から SU(N) 行列 V をかけると

$$\mathrm{LHS} = \int dU\,(VU)_{ab} = \int d(VU)(VU)_{ab} = R_{ab}, \quad \mathrm{RHS} = (VR)_{ab}$$

  V は任意の SU(N) の元だから、$R_{ab}=0$

- $\int dU\, U_{ab} U^{+}_{ij} = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$
  - LHS=T^{aj}_{bi} とおく。U, U^+ が LU, U^+L^+ と変換するよう L, L^+ をかける。

$$\mathrm{LHS} = \int dU\,(LU)_{ab}(LU)^{+}_{ij} = \int d(LU)(LU)_{ab}(LU)^{+}_{ij} = T^{aj}_{bi}$$

$$\mathrm{RHS} = L_{ac} T^{ck}_{bi} L^{+}_{kj} \ \rightarrow\ L T_{bi} = T_{bi} L \ \rightarrow\ T^{aj}_{bi} = S_{bi} \delta^{aj}$$

  任意の SU(N) の元と交換するので上添字について T は単位行列。
  同様に右変換して S も単位行列に比例。
  a=j とおいて和をとると、比例係数が 1/N と分かる。

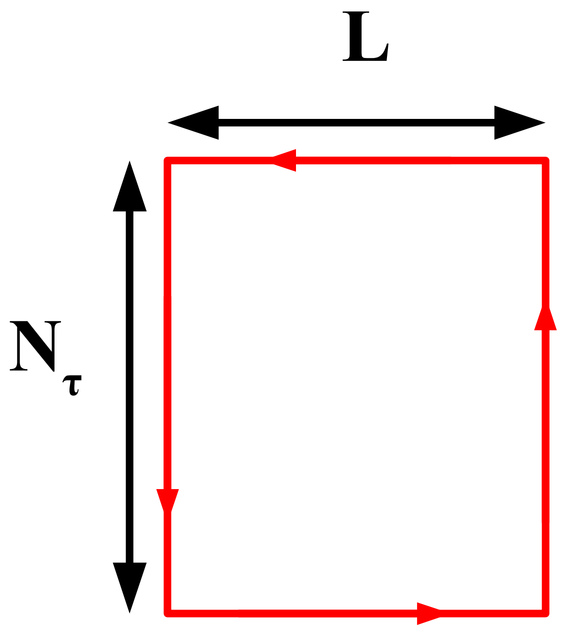
Proof of the one-link integral formulae

- $$\int dU\, U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$
  - **左辺を T^{abc}_{ijk} とおく。U を左変換。**
    $$T^{abc}_{ijk} = L_{ad} L_{be} L_{cf} T^{def}_{ijk}$$
    任意の L に対して不変な 3 階のテンソルは完全反対称テンソルのみ。右変換も同様。
    $$T^{abc}_{ijk} = c\, \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk}$$
  - **両辺に abc をかけて和をとり、det U=1 を使うと c=1/N!**

Wilson Loop

- One link integral formulae の応用として、
  強結合領域での Wilson loop の期待値を求めてみます。
- Wilson loop

$$W(C=L\times N_\tau)=\mathrm{tr}[\prod_{i\in C} U_i]$$



  - 空間方向 L 、時間方向 N_τ のループにそって、リンク変数を掛け合わせたもの。
  - 意味づけ
    ある時刻に両端が重いクォークからなり、
    L だけ伸びたストリングを作る。
    虚時間 Nτ の後に同じ位置で観測する
    確率。

$$\langle O_L(N_\tau) O_L^+(0)\rangle \propto \exp(-V(L)N_\tau) \quad (\text{for large } N_\tau)$$
$$V(L)=\text{Interquark potential}$$

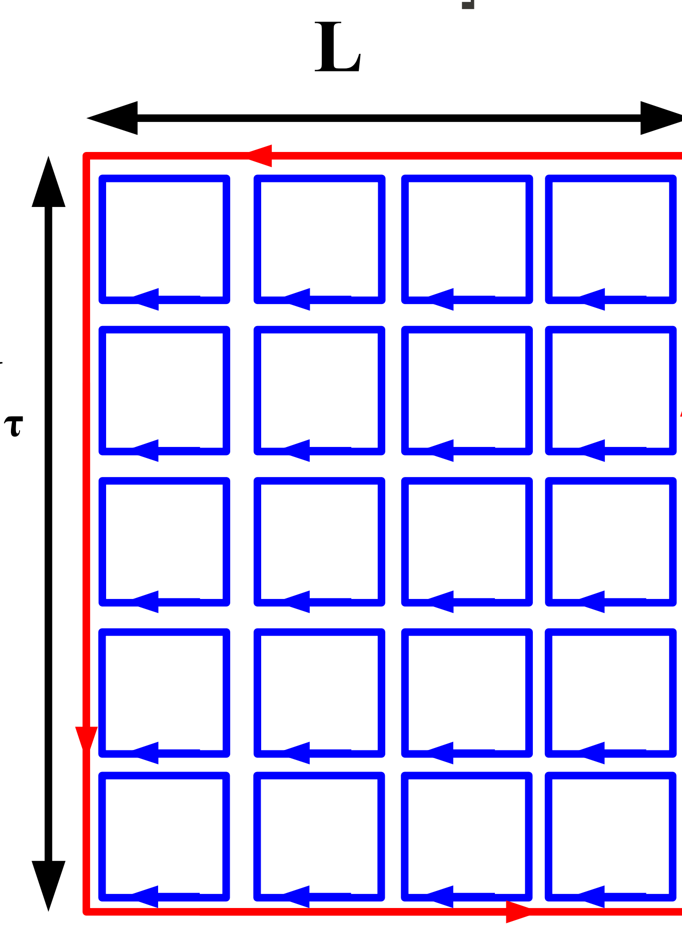
Wilson loop (cont.)

- 強結合極限での評価

$$\langle W(C=L\times N_\tau)\rangle=\int DU\,W(C)\exp\left[\frac{1}{g^2}\sum_P \mathrm{tr}(U_P+U_P^+)\right]$$

- リンク変数が残っていると積分して 0 。
  → Wilson loop に含まれるすべての
  リンクを plaquette からのリンクと
  組み合わせて消す必要がある。
- 結合が強いとき、できるだけ少ない数の
  plaq. で消すには、Wilson loop を
  平面的に plaq. で埋めればよい。

$$\langle W(C)\rangle=N\left(\frac{1}{g^2 N}\right)^{L N_\tau}\to V(L)=L\log(g^2 N)$$



強結合極限では面積則
→ クォークの閉じ込め

K.G.Wilson, PRD10('74),2445

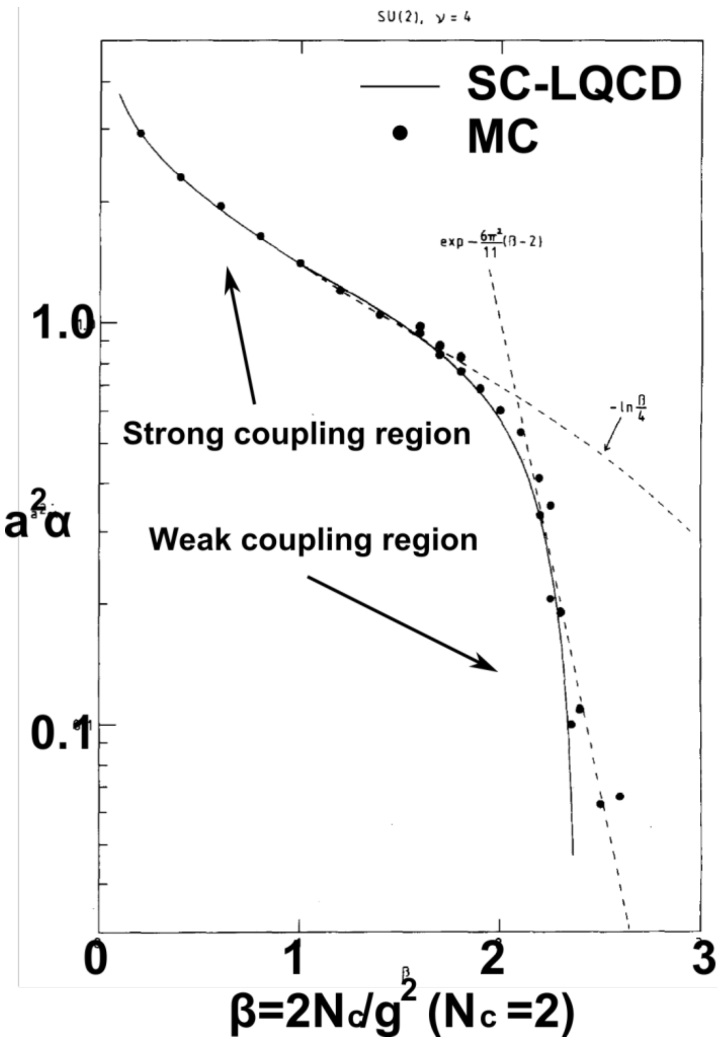
Strong Coupling Lattice QCD: Pure Gauge

- **Quarks are confined in Strong Coupling QCD**
  - **Strong Coupling Limit (SCL)**
    → Fill Wilson Loop with Min. # of Plaquettes
    → Area Law (Wilson, 1974)

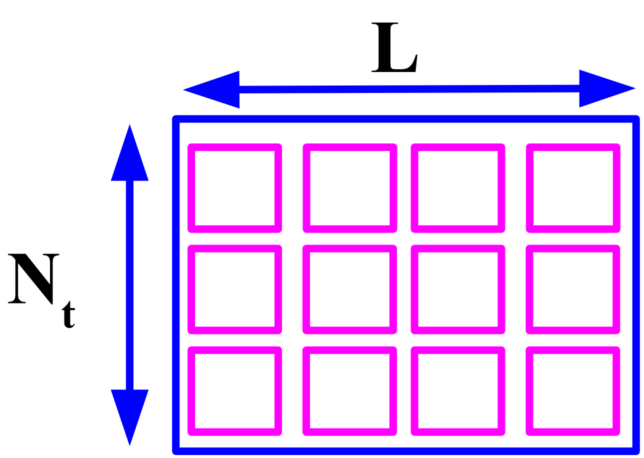
$$S_{\mathrm{LQCD}} = -\frac{1}{g^2}\sum_{\square} \mathrm{tr}\left[U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}\right]$$

  - **Smooth Transition from SCL to pQCD in MC (Creutz, 1980; Munster 1980)**

K. G. Wilson, PRD10(1974),2445
M. Creutz, PRD21(1980), 2308.
G. Munster, (1980, 1981)



Munster, '80



$$\square = 1/N_c\, g^2$$

Fermions on the Lattice

- Fermion action (Euclidean)

$$S_{q,cont} = \int d^4x \, \bar{q}(-i\gamma_\mu D_\mu + m)q, \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$$

- 格子上の action → Link 変数の利用

$$S_{F,\mathrm{lat}} = a^4 \sum_x \left[\sum_\mu \frac{\left(\bar{q}(x)\Gamma_\mu U_{x,\mu} q(x+\hat{\mu}) - \bar{q}(x+\hat{\mu})\Gamma_\mu U^+_{x,\mu} q(x)\right)}{2a} + m\bar{q}(x)q(x) \right]$$

  - q, U の変換性からゲージ不変

$$q(x) \to V(x)q(x), \quad U_{x,\mu} \to V(x)U_{x,\mu}V^+(x+\hat{\mu})$$

  - 連続極限で $S_{q,\,\mathrm{cont}}$ へ

$$U = 1 + iA_\mu a, \quad S_{F,\mathrm{lat}} \to a^4 \sum_x \bar{q}(x)\left[\Gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + iA_\mu q\right) + m\right]q(x)$$

$$\Gamma_\mu = -i\gamma_\mu$$

これ以降、Γ を γ , $x_4 \to x_0$ とします。

Fermions on the Lattice (cont.)

- 一見よさそうだが、問題点が ... → ダブラー
  - 自由場の場合、Fermion の hopping matrix を Fourier 変換すると

$$D = i\Gamma_\mu \frac{\sin(p_\mu a)}{a} \quad (p_\mu = 2\pi n_\mu / La, n_\mu = 0, 1, \ldots, L-1)$$

  - (3+1) 次元格子上で、D は 16 回 0 となる。($p_\mu = 0, \pi/a$)
    → 低エネルギーで現れる Fermion の種類が 16 倍増える。
- Nielsen-Ninomiya の定理

「適当な仮定 (平行移動不変性、カイラル対称性、局所性、エルミート性、双線形性) を満たす格子 Fermion にはダブラーが存在」

- 解決方法
  - Wilson Fermion : a → 0 でダブラーが無限に重くなるように 2 階微分に対応する項を加える。(カイラル対称性がない)
  - Domain wall Fermion, Overlap Fermion, ...
  - Staggered (Kogut-Susskind) Fermion

Staggered Fermion

- **Staggered Fermion: Spinor 構造・γ 行列を数因子η で表せる。**

$$q=\gamma_0^{x_0}\gamma_1^{x_1}\gamma_2^{x_2}\gamma_3^{x_3}\chi$$

$$\rightarrow \bar{q}(x)\gamma_\mu q(x+\hat{\mu})=\bar{\chi}(x)\gamma_3^{x_3}\gamma_2^{x_2}\gamma_1^{x_1}\gamma_0^{x_0}\gamma_\mu\gamma_0^{x_0}\cdots\gamma_\mu^{x_\mu+1}\cdots\gamma_3^{x_3}\chi(x+\hat{\mu})$$

$$=\eta_\mu(x)\bar{\chi}(x)\gamma_3^{x_3}\cdots\gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}}\gamma_\mu^{2x_\mu+2}\gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}}\cdots\gamma_3^{x_3}\chi(x+\hat{\mu})=\eta_\mu(x)\bar{\chi}(x)\chi(x+\hat{\mu})$$

$$\eta_\mu(x)=(-1)^{x_0+x_1+\cdots+x_{\mu-1}}$$

- **Lattice action with staggered Fermion**

$$S_F=\frac{1}{2}\sum_{x,\mu}\eta_\mu(x)\left[\bar{\chi}_x U_{x,\mu}\chi_{x+\hat{\mu}}-\bar{\chi}_{x+\hat{\mu}}U^+_{x,\mu}\chi_x\right]+\sum_x m\bar{\chi}_x\chi_x$$

Fermion の 4 成分が全て等価。1 成分のみを考えてよい。
→ 16 個のダブラーが、(Dirac Fermion で)4 つのダブラーとなる。

- **カイラル変換 : χ, χ^{bar} について同じ、隣り合ったχ で逆の位相**

$$\chi_x\rightarrow\exp(i\theta\varepsilon(x))\chi_x,\quad \bar{\chi}_x\rightarrow\exp(i\theta\varepsilon(x))\bar{\chi}_x,\quad \varepsilon(x)=(-1)^{x_0+x_1+x_2+x_3}$$

→ 厳密なカイラル対称性をもつ

Lattice QCD with staggered Fermion

- Lattice QCD action with (unrooted) staggered Fermion

$$S_{LQCD} = S_F + S_G$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x,\mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U^+_{x,\mu} \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

$$S_G = -\frac{1}{g^2} \sum_{plaq.} \mathrm{tr}\left[U_P + U_P^+ \right]$$

  - Spinor 構造が simple(無い) → 解析的・数値的な計算が簡単
  - *m*=0 (chiral limit) で厳密な chiral 対称性をもつ
→ カイラル相転移の議論が可能
  - 連続領域 (g → 0, a → 0) では N_f=4 だが、有限の *a* ではフレーバー対称性は破れている。
  - Chiral anomaly ($U(1)_A$) については controversial

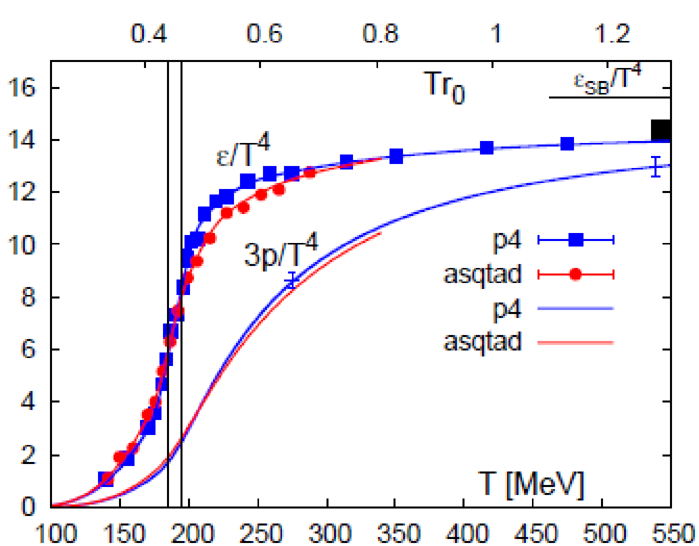
Monte-Carlo simulation in Lattice QCD

- **分配関数 (or 生成汎関数)**

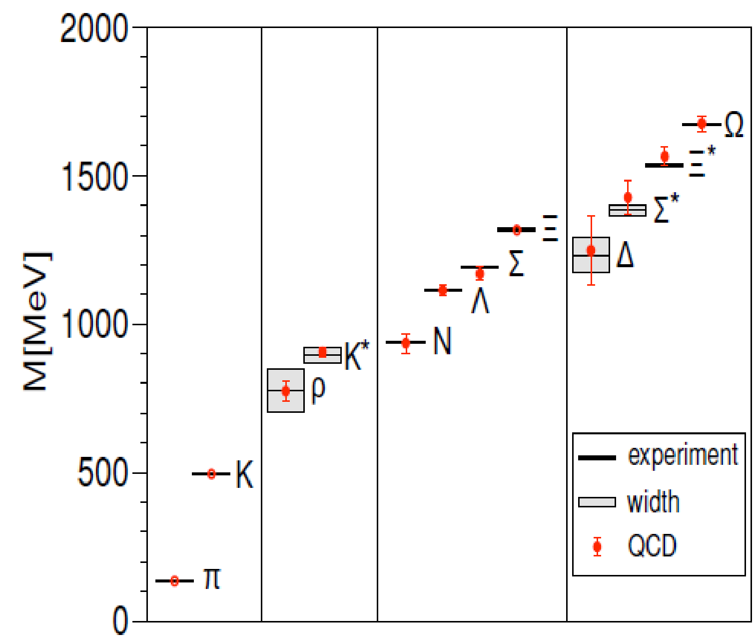
$$S=S_G(U)+\bar{q}\,D\,q\,,\quad Z[J]=\int DU\,\det D(U)\exp[-S_G(U)+J\,\hat{O}]$$

$$\rightarrow\langle O\rangle=\frac{\int DU\,\det D(U)O(U)\exp[-S_G(U)]}{\int DU\,\det D(U)\exp[-S_G(U)]}=\frac{\delta Z[J]}{\delta J}$$

- **Monte-Carlo 法では、通常先に Fermion determinant を評価し、リンク変数の配位を MC 法で求める。クォークを含む演算子の場合には、propagator をあらわに評価。**



Hot QCD (2009)



BMW collaboration, Sceience 322(2008)1224

格子上の場の理論 Short Summary

- 格子 QCD
  - リンク変数の導入により、完全なゲージ対称性を保持。
  - グルーオン作用 : Plaquette (プラケット) 作用 (or its improved ver.)
    → 連続極限 ($a \to 0$) で連続理論のゲージ作用
  - クォーク作用:リンク変数を用いてゲージ対称性を保てる。
- Monte-Carlo simulation
  - 非摂動論的 QCD を厳密に解く第一原理計算。
  - 大きな成功 : カラーの閉じ込め、ハドロン質量、QCD 相転移 (μ=0)
  - カイラル対称性には多少の問題あり
    - Staggered fermion: Fast, but ugly (N_f=4 → quarter root, anomaly, …)
    - Wilson fermion: Explicit chiral symmetry breaking at finite *a*.
    - DW/Overlap fermion: large numerical cost.
- 有限密度での格子 QCD MC simulation は残された大きな問題。
  - 「大学院生や postdoc に与えてはいけないテーマ」(青木さん)

Monte-Carlo Integral: Importance Sampling

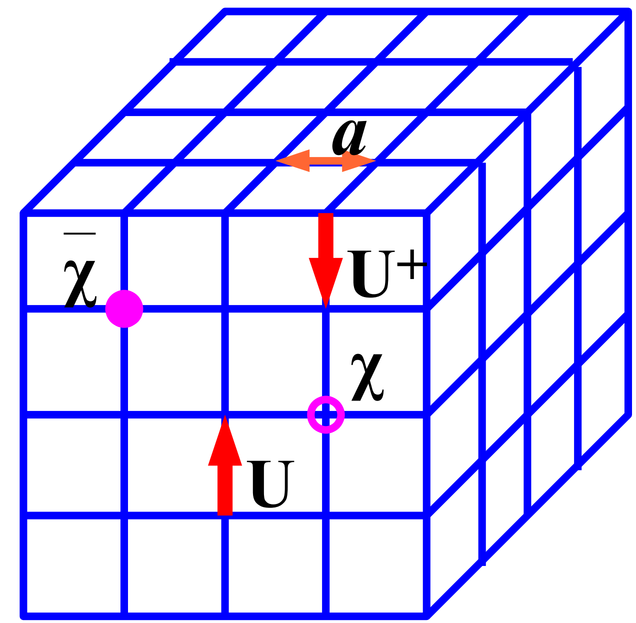
- **Metropolis sampling**
  = One of the typical (popular) method of importance sampling

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Config. A}\\ S_{eff}(A)\end{array}} \arrow[r, shift right, "{P_{A\to B} = \exp[S_{eff}(A)-S_{eff}(B)]}"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Config. B}\\ S_{eff}(B)\end{array}} \arrow[l, shift right, "{P_{B\to A} = 1}"']
\end{tikzcd}
\qquad S_{eff}(A)<S_{eff}(B)
$$

- **Trial prob.: $P^{try}_{A\to B} = P^{try}_{B\to A}$ (detailed balance)**
- **Pickup prob.: According to S_{eff}.**
- **In equilibrium, $P(A)\, P_{A\to B} = P(B)\, P_{B\to A} \to P(A) \propto \exp[-S_{eff}(A)]$**

QCD phase diagram in strong-coupling lattice QCD

Lattice QCD



- **Space-time discretization of fields**
- **Quarks = Grassmann number on sites**

$$\chi_i \chi_j = -\chi_j \chi_i, \quad \int d\chi \, 1 = 0, \quad \int d\chi \, \chi = 1$$

$$\rightarrow \int d\chi_1 d\chi_2 \cdots d\bar{\chi}_1 d\bar{\chi}_2 \cdots \exp(\bar{\chi} D \chi) = det(D)$$

- **Gluons → Link variable**

$$U_\mu(x) = \exp\left[ig \int_x^{x+\hat{\mu}} dx \, A(x) \right] \sim \exp(i g A_\mu)$$

$$\int dU \, U_{ab} = 0, \quad \int dU \, U_{ab} U^{+}_{cd} = \delta_{ad} \delta_{bc} / N_c, \quad \int dU \, U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf} / N_c!$$

- **Gauge transf.**

$$\chi(x) \rightarrow V(x) \chi(x), \quad \bar{\chi}(x) \rightarrow \bar{\chi}(x) V^{+}(x),$$

$$U_\mu(x) \rightarrow V(x) U_\mu(x) V(x+\hat{\mu})$$

$$\bar{\chi}(x) U_\mu(x) \chi(x+\hat{\mu}) = \text{invariant}$$

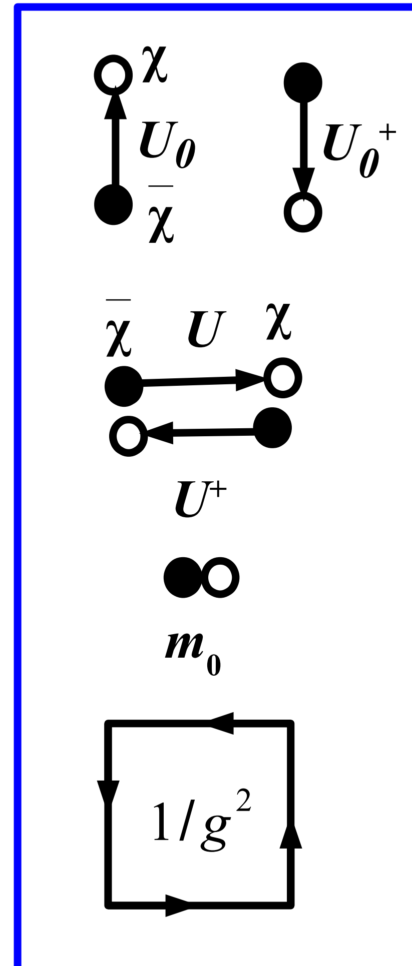
Lattice spacing = a
→ Lattice unit: a=1

Lattice QCD action

- **Lattice QCD action (unrooted staggered fermion)**

$$L=\frac{1}{2}\sum_{x}\left[\bar{\chi}_x U_0(x) e^{\mu}\chi_{x+\hat{0}}-\bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^{+}(x) e^{-\mu}\chi_x\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{x,j}\eta_j(x)\underline{\left[\bar{\chi}_x U_j(x)\chi_{x+\hat{j}}-\bar{\chi}_{x+\hat{j}} U_j^{+}(x)\chi_x\right]}$$
$$\rightarrow \chi\,(\partial + i\,gA)\,\chi$$
$$+m_0\sum_{x}\bar{\chi}_x\chi_x$$
$$+\frac{2N_c}{g^2}\sum_{plaq.}\left[1-\frac{1}{N_c}\mathrm{Re\,tr}\,\underline{U_{\mu\nu}(x)}\right]$$

Stokes theorem → rotation



- **Staggered sign factor (~ γ matrix)**
  $\eta_j(x)=(-1)^{**}(x_0+...+x_{j-1})$
- **Chiral transf.**
  $\chi_x \rightarrow \exp[i\,\theta\varepsilon(x)]\,\chi_x$, $\varepsilon(x)=(-1)^{**}(x_0+x_1+x_2+x_3)$

χ quark (Grassmann #)
U link ~ exp(igA)

Sign problem in lattice QCD

- **Fermion determinant (= stat. weight of MC integral) becomes complex at finite μ in LQCD.**

$$Z=\int D[U,q,\bar{q}]\ \exp\left(-\bar{q}D(\mu,U)q-S_G(U)\right)$$
$$=\int D[U]\ \mathrm{Det}\left(D(\mu,U)\right)\ \exp\left(-S_G(U)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{r}\left[\gamma_5 D(\mu)\gamma_5\right]^{+}=D(-\mu^*)\rightarrow\left[\mathrm{Det}\left(D(\mu)\right)\right]^*=\mathrm{Det}\left(D(-\mu^*)\right)\\ (\gamma_5\ \ \text{hermiticity})\end{array}}$$

  - **Note: Euclidean $D=\gamma_\mu D_\mu+m-\mu\gamma_0$ (γ = Hermite, D_μ= anti-Hermite)**
  - **Fermion det. (Det D) is real for zero μ (and pure imag. μ)**
  - **Fermion det. is complex for finite real μ.**

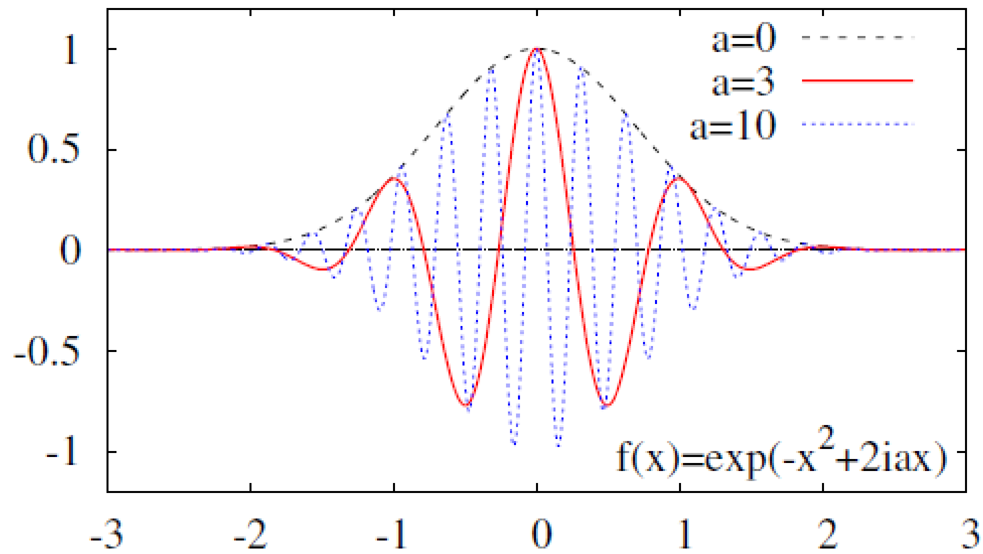
- **Approximate methods:**
  - **Taylor expansion, Imag. μ , Canonical, Re-weighting, Fugacity expansion, Histogram method, Complex Langevin, Strong-coupling lattice QCD**

Sign Problem

- **Monte-Carlo integral of oscillating function**

$$Z=\int dx \exp\left(-x^2+2iax\right)=\sqrt{\pi}\exp\left(-a^2\right)$$

$$\langle O\rangle=\frac{1}{Z}\int dx\, O(x)\, e^{-x^2+2iax}$$



Easy problem for human is not necessarily easy for computers.

- **Complex phase appears from fluctuations of H and N.**
  de Forcrand

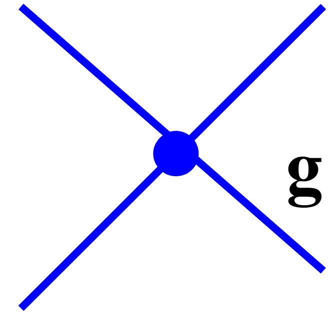
$$Z=\sum\langle\psi|\exp[-(H-\mu N)/T]|\psi\rangle=\sum\prod\langle\psi_\tau|\exp[-(H-\mu N)/(N_\tau T)]|\psi_{\tau+1}\rangle$$

→ **Description based on "Hadronic" (color singlet) action would be helpful to reduce fluctuations.**

→ **Strong coupling lattice QCD**

Sign Problem (cont.)

- **Generic problem in quantum many-body problems**
  - **Example: Euclid action of interacting Fermions**



$$S=\sum_{x,y}\bar{\psi}_x D_{x,y}\psi_y+g\sum_x(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_x$$

  - **Bosonization and MC integral (g>0 → repulsive)**

$$\exp(-g M_x M_x)=\int d\sigma_x \exp(-g\sigma_x^2-2ig\sigma_x M_x) \quad (M_x=(\bar{\psi}\psi)_x)$$

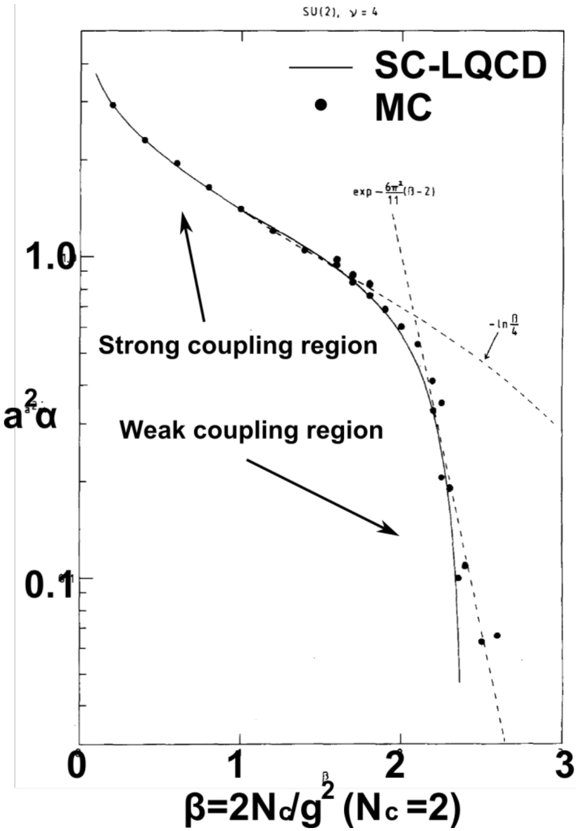
$$Z=\int D[\psi,\bar{\psi},\sigma]\exp\left[-\bar{\psi}(D+2ig\sigma)\psi-g\sum_x\sigma_x^2\right]$$

$$=\int D[\sigma]\ \underline{\mathrm{Det}(D+2ig\sigma)}\exp\left[-g\sum_x\sigma_x^2\right]$$

complex Fermion det.
→ complex stat. weight
→ sign problem

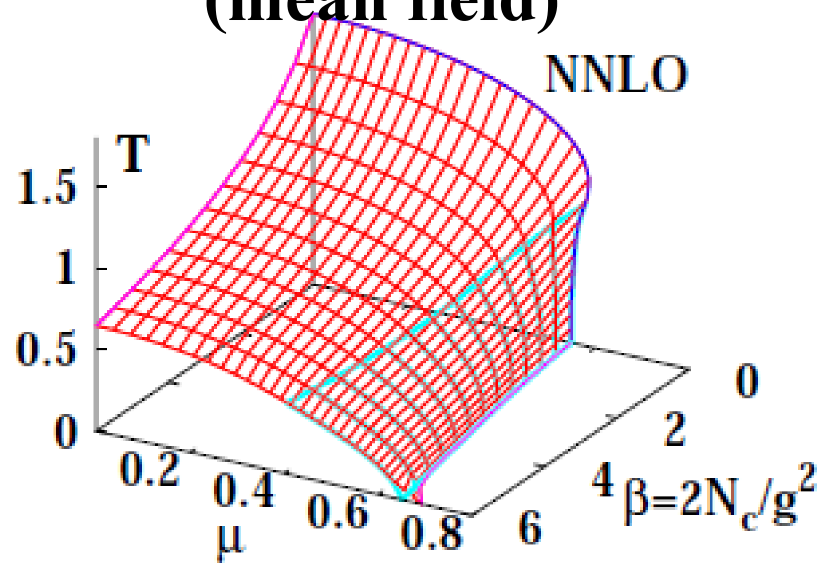
Strong Coupling Lattice QCD

Pure YM



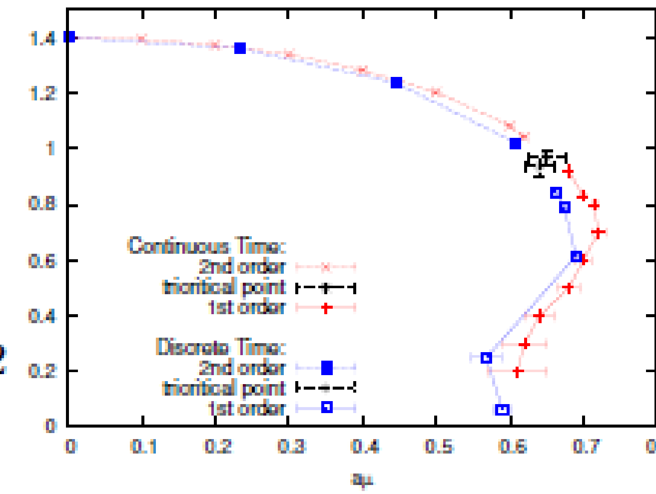
Wilson ('74), Creutz ('80), Munster ('80, '81), Lottini, Philipsen, Langelage's ('11)

Phase diagram (mean field)



Kawamoto ('80), Kawamoto, Smit ('81), Damagaard, Hochberg, Kawamoto ('85), Ilgenfritz, Kripfganz ('85), Bilic, Karsch, Redlich ('92), Fukushima ('03); Nishida ('03), Kawamoto, Miura, AO, Ohnuma ('07). Miura, Nakano, AO, Kawamoto ('09), Nakano, Miura, AO ('10)

Fluctuations



Mutter, Karsch ('89), de Forcrand, Fromm ('10), de Forcrand, Unger ('11), AO, Ichihara, Nakano ('12), Ichihara, Nakano, AO ('14), de Forcrand, Langelage, Philipsen, Unger ('14)

Area Law

Wilson ('74), Creutz ('80), Munster ('80, '81)

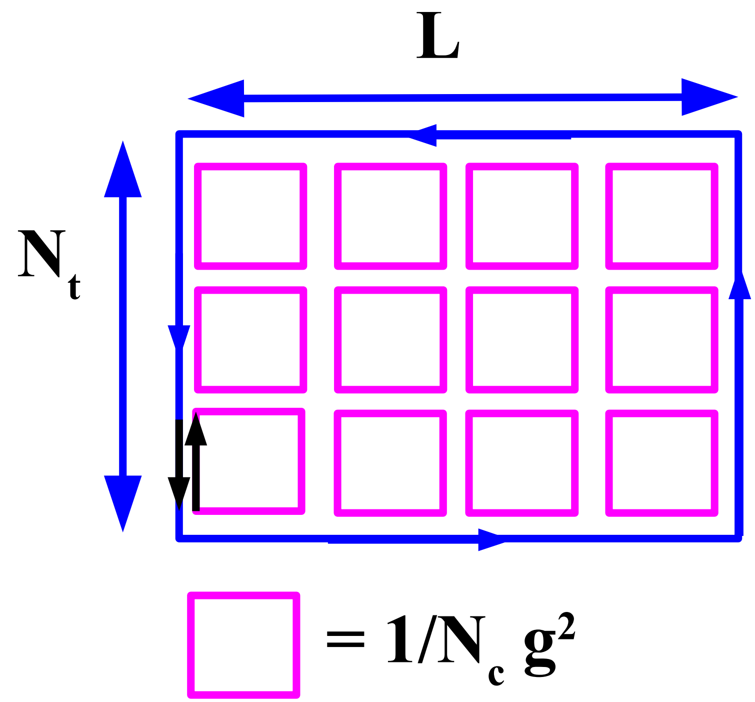
- **Wilson loop in pure Yang-Mills theory**

$$\langle W(C = L \times N_\tau)\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\int DU\, W(C) \exp\left[\frac{1}{g^2}\sum_P \mathrm{tr}\left(U_P + U_P^+\right)\right]$$

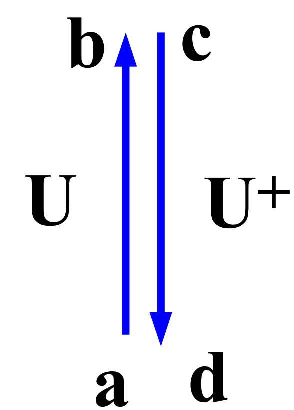
$$= \exp\left(-V(L) N_\tau\right)$$

V(L)= heavy-qq pot.



- **One-link integral**

$$\int dU\, U_{ab} U^+_{cd} = \frac{1}{N_c}\delta_{ad}\delta_{bc}$$



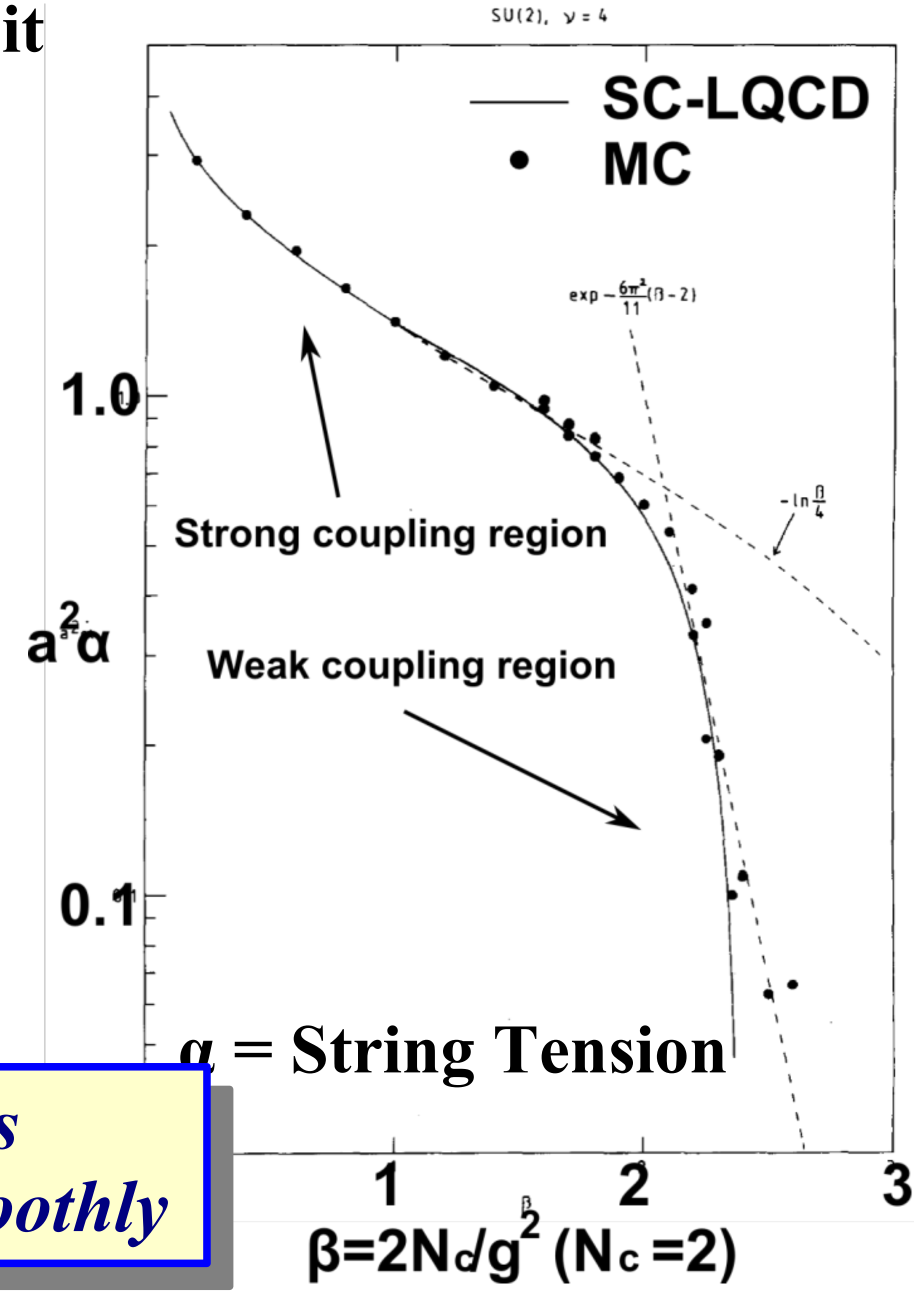
- **In the strong coupling limit**

$$\langle W(C)\rangle = N\left(\frac{1}{g^2 N}\right)^{L N_\tau} \rightarrow V(L) = L \log\left(g^2 N\right)$$

Linear potential between heavy-quarks
→ Confinement (Wilson, 1974)

Area Law

- Area law in the strong coupling limit
  Wilson ('74)
- Verification of the area law
  in Lattice MC simulation
  Creutz ('80)
- Strong coupling expansion
  to higher orders
  Munster ('80, '81),
  Lottini, Philipsen, Langelage ('11)
- Weak coupling region
  $\rightarrow g^2/4\pi = 1 / \beta_0 \log (q^2/\Lambda^2)$
  $\rightarrow a \sim 1/q \sim \exp(2\pi/g^2\beta_0)/\Lambda$



Strong coupling expansion connects SCL and Weak coupling region smoothly

Strong Coupling Lattice QCD

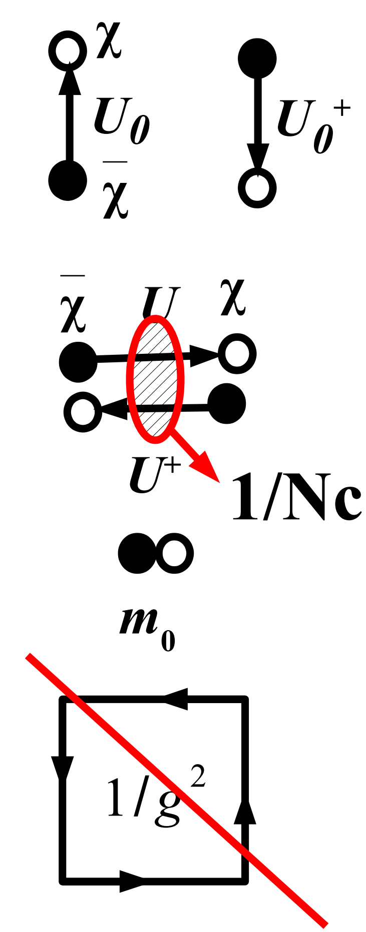
- **Strong coupling limit**
  Damgaard, Kawamoto, Shigemoto ('84)

$$S_{\mathrm{SCL}} = S_F^{(t)} - \frac{1}{4N_c}\sum_{x,j} M_x M_{x+\hat{j}} + m_0 \sum_x M_x$$

$$\left(M_x = \bar{\chi}_x \chi_x\right)$$

  - **Integrate out spatial links using one-link formula, and pick up diagrams with min. quark numbers.**

$$\int dU\, U_{ab} U^{+}_{cd} = \delta_{ad}\delta_{bc}/N_c$$



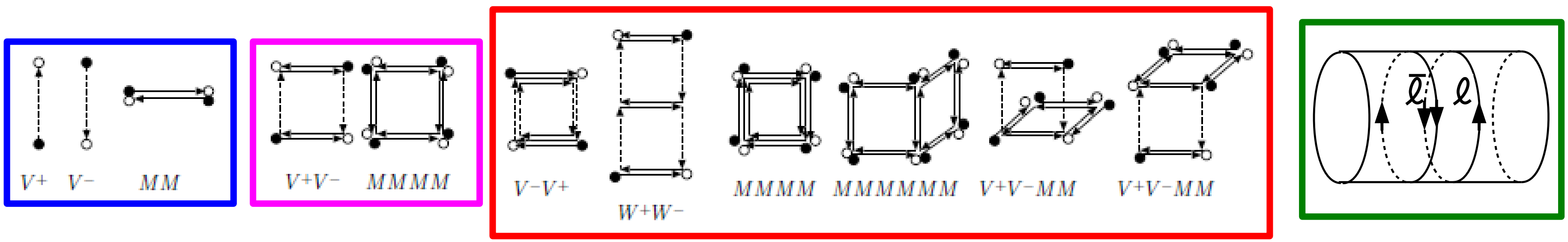
Lattice QCD in SCL
→ Fermion action with nearest neighbor four Fermi interaction

Finite Coupling Effects

- **Effective Action with finite coupling corrections**
  Integral of exp(-S_G) over spatial links with exp(-S_F) weight → $S_{\rm eff}$

$$S_{\rm eff} = S_{\rm SCL} - \log\langle \exp(-S_G)\rangle = S_{\rm SCL} - \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!}\langle S_G^n\rangle_c$$

$\langle S_G^n\rangle_c$=Cumulant (connected diagram contr.) *c.f. R.Kubo('62)*



$$S_{\rm eff} = \frac{1}{2}\sum_x (V_x^+ - V_x^-) - \frac{b_\sigma}{2d}\sum_{x,j>0}[MM]_{j,x}$$

SCL (Kawamoto-Smit, '81)

$$+\frac{1}{2}\frac{\beta_\tau}{2d}\sum_{x,j>0}[V^+V^- + V^-V^+]_{j,x} - \frac{1}{2}\frac{\beta_s}{d(d-1)}\sum_{x,j>0,k>0,k\neq j}[MMMM]_{jk,x}$$

NLO (Faldt-Petersson, '86)

$$-\frac{\beta_{\tau\tau}}{2d}\sum_{x,j>0}[W^+W^- + W^-W^+]_{j,x} - \frac{\beta_{ss}}{4d(d-1)(d-2)}\sum_{\substack{x,j>0,|k|>0,|l|>0\\ |k|\neq j,|l|\neq j,|l|\neq|k|}}[MMMM]_{jk,x}[MM]_{j,x+\hat{l}}$$

$$+\frac{\beta_{\tau s}}{8d(d-1)}\sum_{x,j>0,|k|\neq j}[V^+V^- + V^-V^+]_{j,x}\left([MM]_{j,x+\hat{k}} + [MM]_{j,x+\hat{k}+\hat{0}}\right)$$

NNLO (Nakano, Miura, AO, '09)

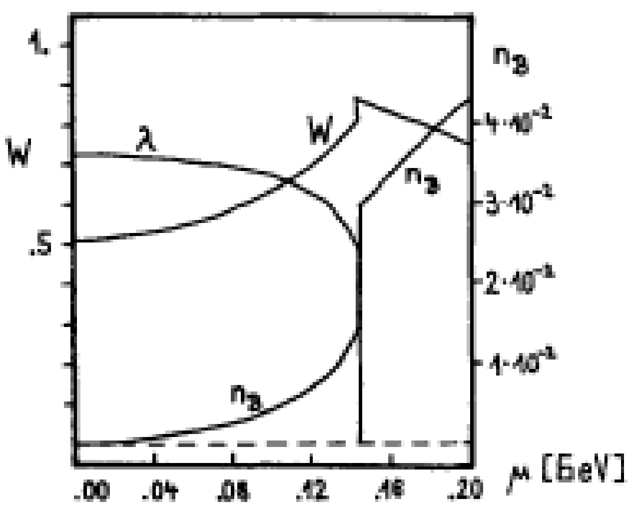
$$-\left(\frac{1}{g^2 N_c}\right)^{N_\tau} N_c^2 \sum_{\mathbf{x},j>0}\left(\bar{P}_{\mathbf{x}} P_{\mathbf{x}+\hat{j}} + h.c.\right)$$

*Polyakov loop (Gocksch, Ogilvie ('85), Fukushima ('04)
Nakano, Miua, AO ('11))*

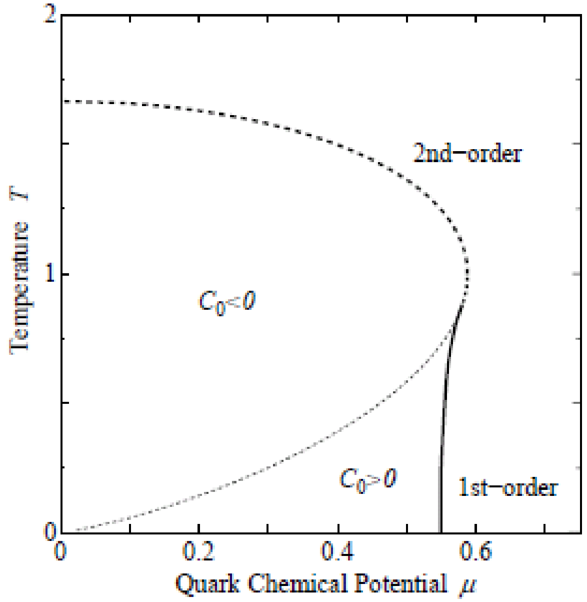
Phase diagram in SC-LQCD (mean field)

- "Standard" simple procedure in Fermion many-body problem
  - Bosonize interaction term (Hubbard-Stratonovich transformation)
  - Mean field approximation (constant auxiliary field)
  - Fermion & temporal link integral

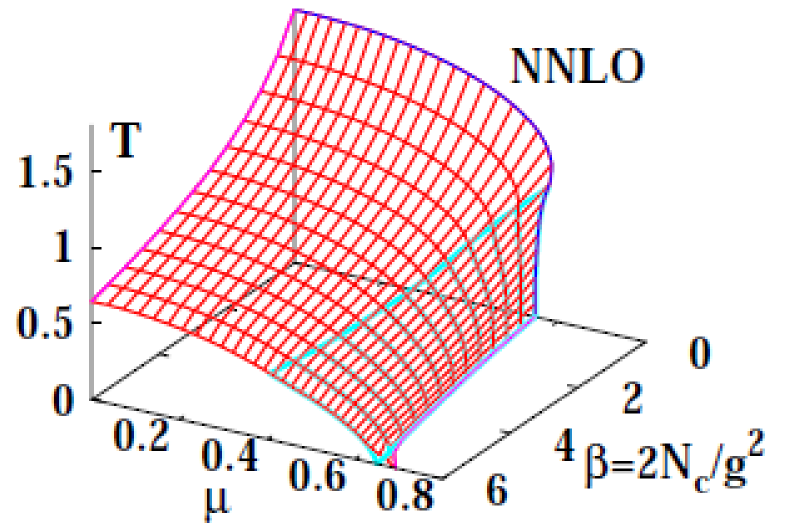
    Damgaard, Kawamoto, Shigemoto ('84); Ilgenfritz, Kripfganz ('85); Faldt, Petersson ('86); Bilic, Karsch, Redlich ('92); Fukushima ('04); Nishida ('04); Miura, Nakano, AO, Kawamoto ('09); Nakano, Miura, AO ('10, '11)



Ilgenfritz, Kripfganz ('85)



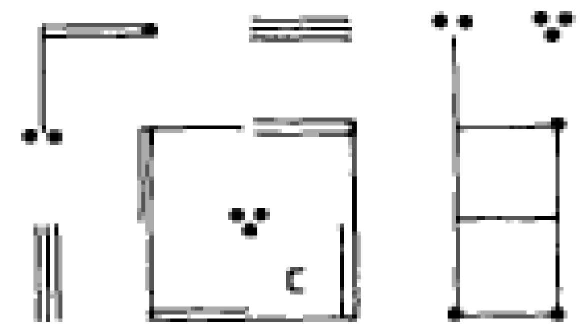
Fukushima ('04)



AO, Miura, Nakano, Kawamoto ('09)

SC-LQCD with Fluctuations

- **Monomer-Dimer-Polymer (MDP) simulation**
  Mutter, Karsch ('89), de Forcrand, Fromm ('10), de Forcrand, Unger ('11)



  - **Integrating out all links**
    → Z= weight sumof monomer,
    dimer, polymer configurations

$$Z(m,\mu)=\sum_{\{n_x,n_b,C_B\}}\prod_b \frac{(N_c-n_b)!}{N_c!\,n_b!}\prod_x \frac{N_c!}{n_x!}(2m)^{n_x}\prod_{C_B} w(C_B) \qquad w(C_B,\pm)=\varepsilon(C_B)\exp(\pm 3\ell L_t \mu)$$

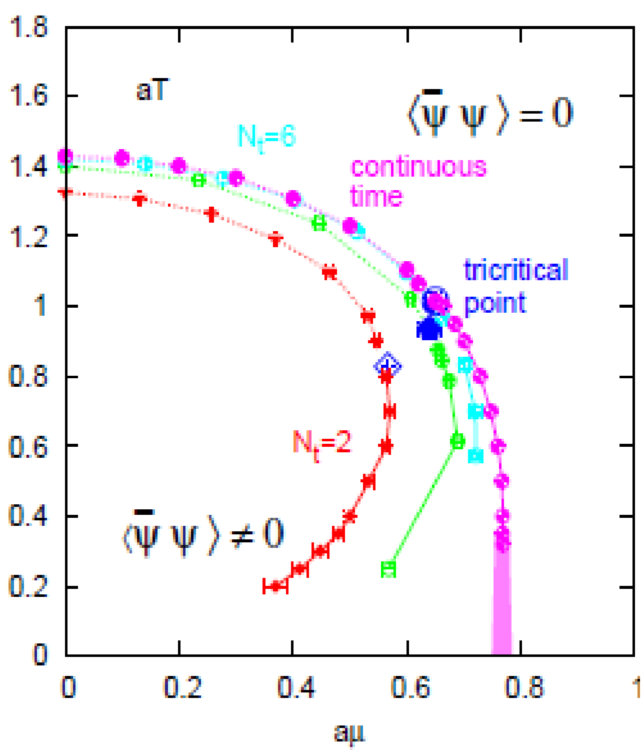
- **Auxiliary Field Monte-Carlo (AFMC) method**
  Ichihara, AO, Nakano ('14)
  - **Bosonize the effective action, and MC integral over aux. field.**

$$S_{\mathrm{eff}}=S_F^{(t)}+\sum_x m_x M_x+\frac{L^3}{4N_c}\sum_{\boldsymbol{k},\tau} f(\boldsymbol{k})\left[|\sigma_{\boldsymbol{k},\tau}|^2+|\pi_{\boldsymbol{k},\tau}|^2\right]$$

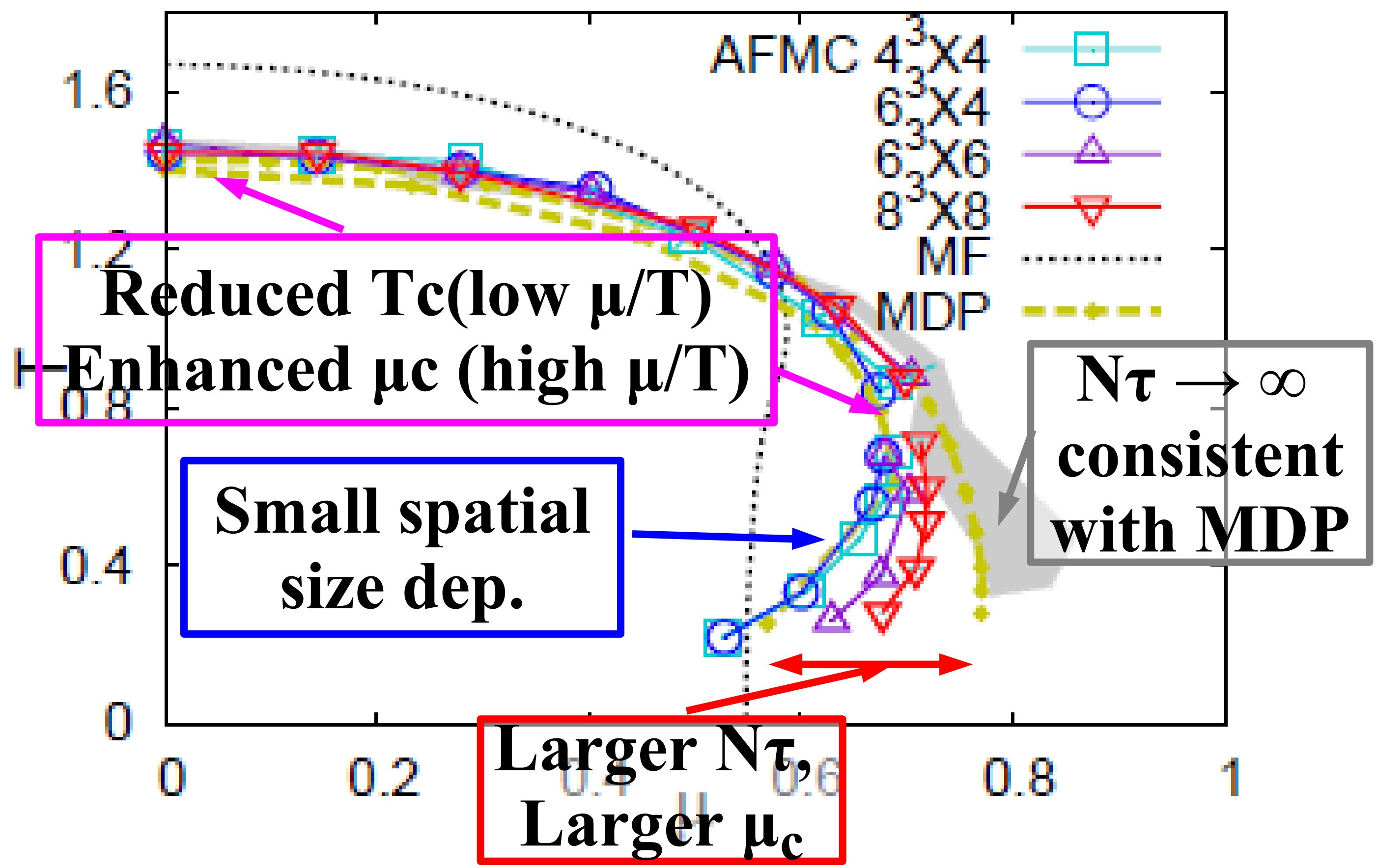
$$m_x=m_0+\frac{1}{4N_c}\sum_j(\sigma+i\varepsilon\pi)_{x\pm\hat{j}},\quad f(\boldsymbol{k})=\sum_j\cos k_j,\quad \varepsilon=(-1)^{x_0+x_1+x_2+x_3}$$

Phase diagram

- **Phase diagrams in two independent methods (MDP & AFMC) agree with each other in the strong coupling limit.**
  → SCL phase diagram is determined !



de Forcrand, Fromm ('10),
de Forcrand, Langelage, Philipsen, Unger ('14)



Ichihara, AO, Nakano ('14)

レポート(3)

- 全部で 5-7 問程度出します。3 問程度以上レポートを出してください。レポート (3) の〆切は ???
(未定、授業中、あるいは更新したメモで伝えます。)

- (Report 4) リンク積分を利用して、Wilson ループの期待値を強結合領域で求めよ。
余裕があれば、強結合極限での結果に加えて、$1/g^2$ 補正がどのように与えられるか評価せよ。
(今回の「余裕があれば」は、割と簡単。無理しなくてよいですが、トライの価値はあります。)