原子核基礎論A（火2, 大西・萩野）

- **授業計画と内容**
  核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

1. はじめに（原子核の基本的性質）（1コマ → 2コマ）
2. 核力とその起源（3コマ）
3. クォークとハドロン (1コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式（2コマ）

大西

5. 殻模型と魔法数（1コマ）
6. 平均場理論と核変形（3コマ）
7. 中性子過剰核の物理（2コマ）
8. 非束縛核と共鳴散乱理論（1コマ）

萩野

- **成績評価の方法・観点及び達成度**
  - レポート試験の成績（80 %） 平常点評価（20 %）
    平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。
  - 前半 (大西担当分) では 10-15 問程度レポートを出します。
    半分程度以上解いて PandA から提出して下さい。

量子色力学とクォーク

量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD)

- **QCD= 強い相互作用の基礎理論**

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}$$

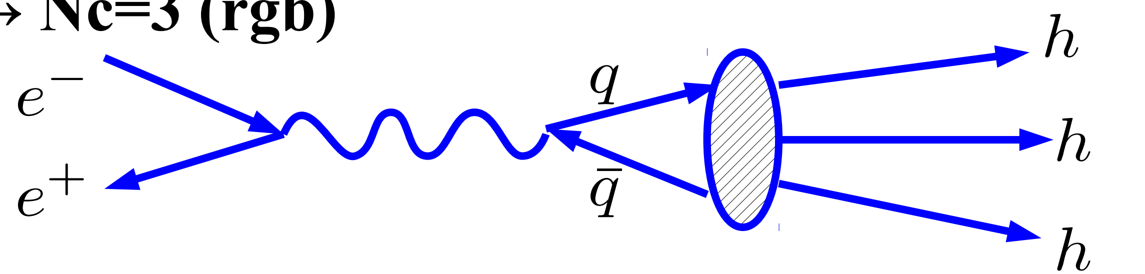
$$A_\mu = A^a_\mu T_a,\ D_\mu = \partial_\mu \pm igA_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\pm ig}[D_\mu,\ D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \pm ig[A_\mu,\ A_\nu]$$

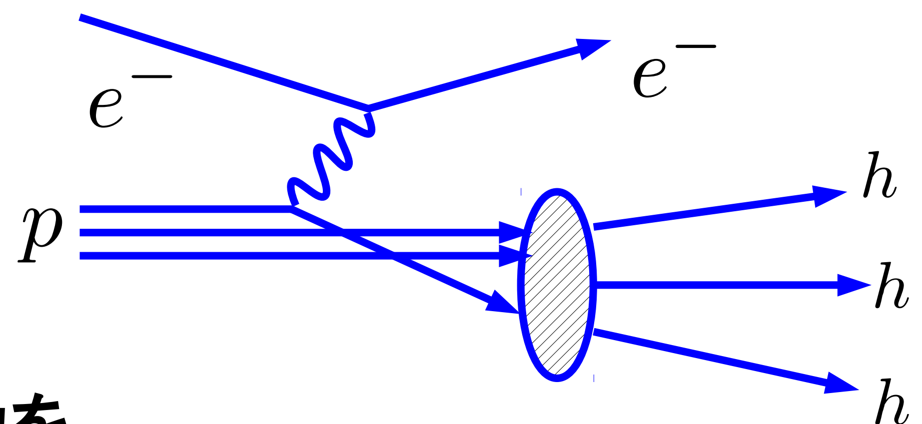
  - **クォークとグルーオンのダイナミクスを記述する**
    非可換 (SU(3)) ゲージ理論
    Yang, Mills ('54), Color DOF: Greensite ('64), Han, Nambu ('65)
  - **大きなエネルギースケールでは結合が弱くなる (漸近的自由性)**
    Gross, Wilczek ('73), Politzer ('73) [Nobel prize in Phys. ('04)]
  - **小さなエネルギースケールでは非摂動論的**
    → カラーの閉じ込め、カイラル対称性の自発的破れ
    Wilson ('74) [Nobel prize in Phys. ('82), Critical phenomena]
    Nambu, Jona-Lasino [Nobel prize in Phys. ('08) to Nambu]

QCD = 強い相互作用の基礎理論

- クォークはスピン (4 spinor)・フレーバー (u, d, s, ...)・時空の自由度に加えて、カラーの自由度を持っている。
  - Δ^{++}(Jz=3/2) = u↑u↑u↑ 、u↑ は全て 0s 状態 → 新たな自由度が必要
  - $\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) \propto$ Nc → Nc=3 (rgb)



- QCD の漸近的自由性は核子を標的とした深非弾性散乱 (レプトンとの高運動量移行反応) 実験により確認されている。



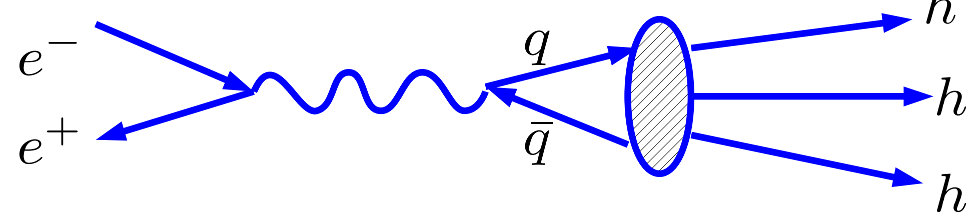
- 低運動量領域における QCD の非摂動論的性質は、格子 QCD 計算により調べられており、ハドロンスペクトルなどで大きな成功を収めている。

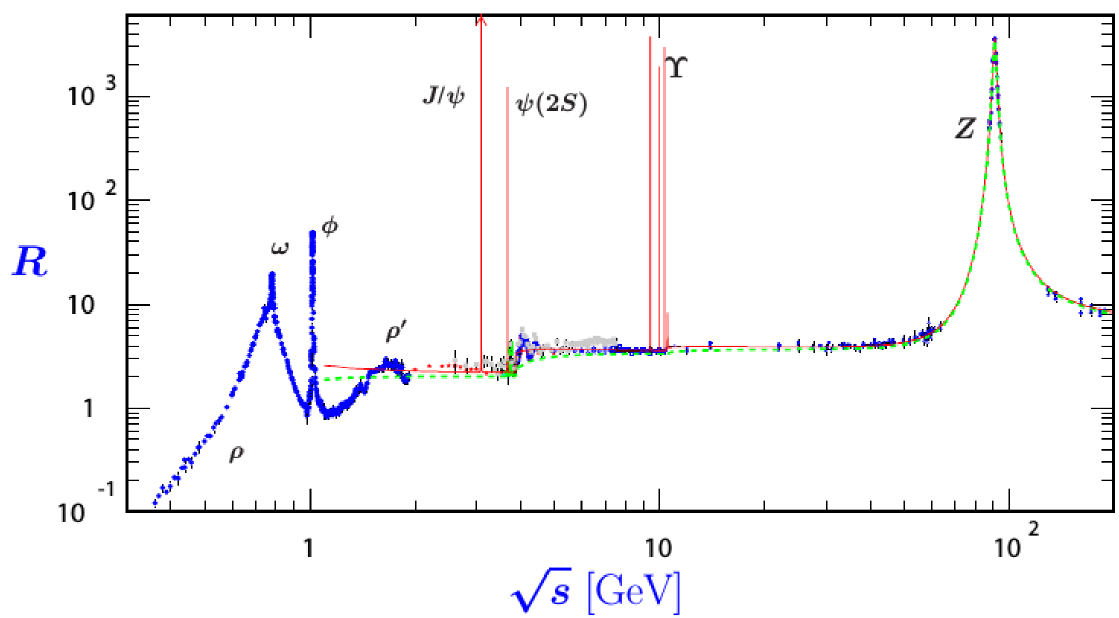
Nc=3 の確認 : R (cross section ratio)

- フェルミオン対生成の断面積の比は自由度・電荷の自乗に比例

$$R = \frac{\sigma(e^- e^+ \to q\bar{q})}{\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+)} = N_c \sum_q e_q^2$$

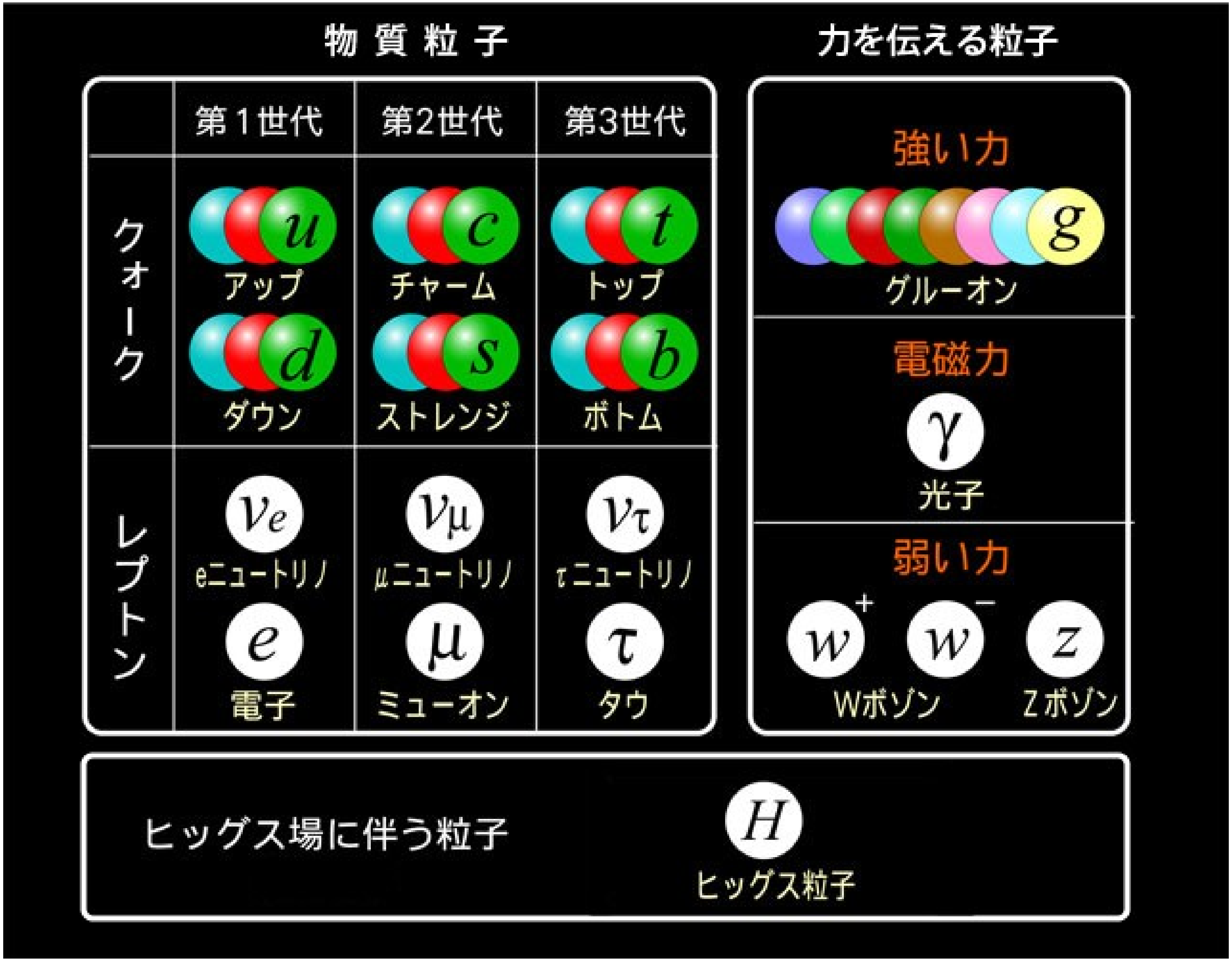
  - いったんクォーク対が作られると多くのハドロンが生成されるので、分子は「ハドロン生成断面積」で近似できる。
(元に戻る確率は小)
  - 十分にエネルギーが高ければ、クォークの質量は無視できる。





K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).

クォーク



http://www.kek.jp/ja/Research/IPNS/

クォーク

世代	種類	電荷	質量
I	u	$+2/3$	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ (300) MeV
	d	$-1/3$	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ (300) MeV
II	c	$+2/3$	1.275 ± 0.025 (1.5) GeV
	s	$-1/3$	95 ± 5 (500) MeV
III	t	$+2/3$	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.87$ GeV
	b	$-1/3$	4.18 ± 0.03 (4.5) GeV

Particle Data Group

クォークの自由度

- クォークは色々な「座標」を持っている！
  - 時間・空間座標 (x, t)
  - スピン (↑, ↓)
  - フレーバー (u, d, s, c, b, t (+ more ?))
    - 強い相互作用ではフレーバー (クォークの種類) は保存
    - 軽い3つのクォーク (u,d,s) からなる系には近似的な $SU(3)_f$ 対称性がある。(N_f=3)
    - クォークが3世代以上あれば CP の破れが説明可能
      Kobayashi, Maskawa ('73) [Nobel prize in Phys., 2008]
  - カラー (R, G, B)
    - 厳密な $SU(3)_c$ 対称性 (ゲージ対称性) がある。
      (カラー空間で回しても (unitary 変換しても) 同じエネルギー)
    - 観測される粒子は常にカラー 1 重項
      (カラー空間の回転で「回らない」スカラー)
      c.f. 単独のクォークはカラー 3 重項 (N_c=3)

カラー (R,G,B)

$$q_f^a(\mathbf{x}, t)$$

フレーバー (u, d, s, ...)

4-spinor (spin と粒子・反粒子)

クォークからハドロンへ

クォークからハドロンへ

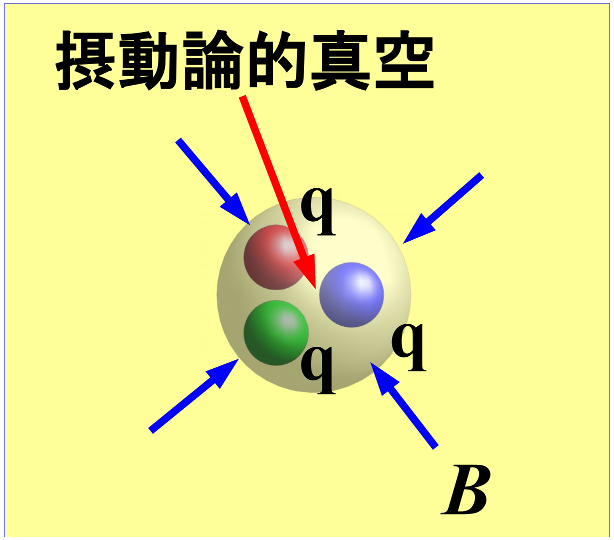
バッグ模型

Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn, Weisskopf ('74)

- クォーク・反クォーク対、グルーオン対の凝縮により、エネルギーが下がる
  → 物理的真空
- 凝縮のない真空 (摂動論的真空) 中をクォークが自由に運動

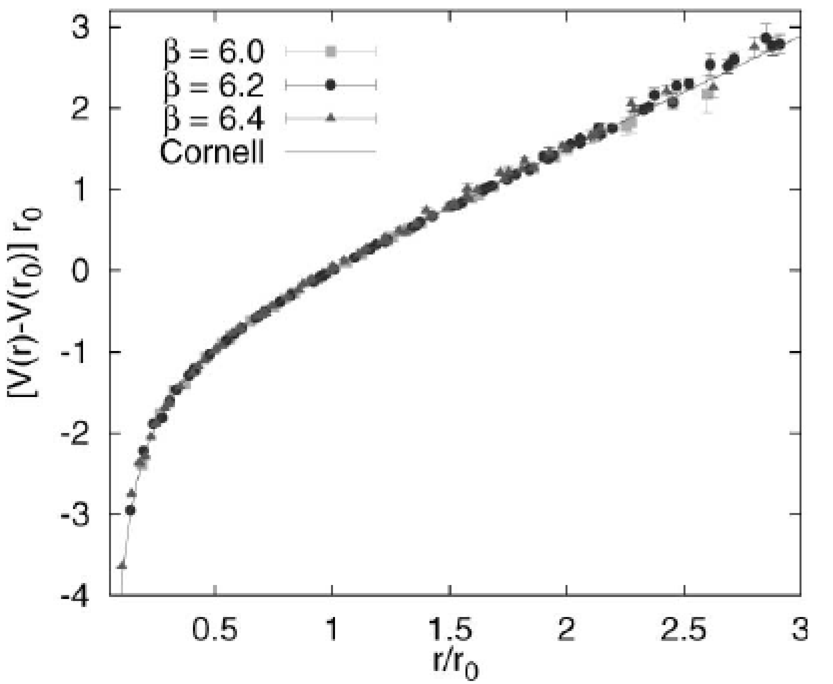
$$E_h = \frac{n_q x}{R} + \frac{4\pi R^3}{3} B$$

$$(x \simeq 2.04, B^{1/4} \simeq 220 \text{ MeV})$$



(非相対論的) クォーク模型

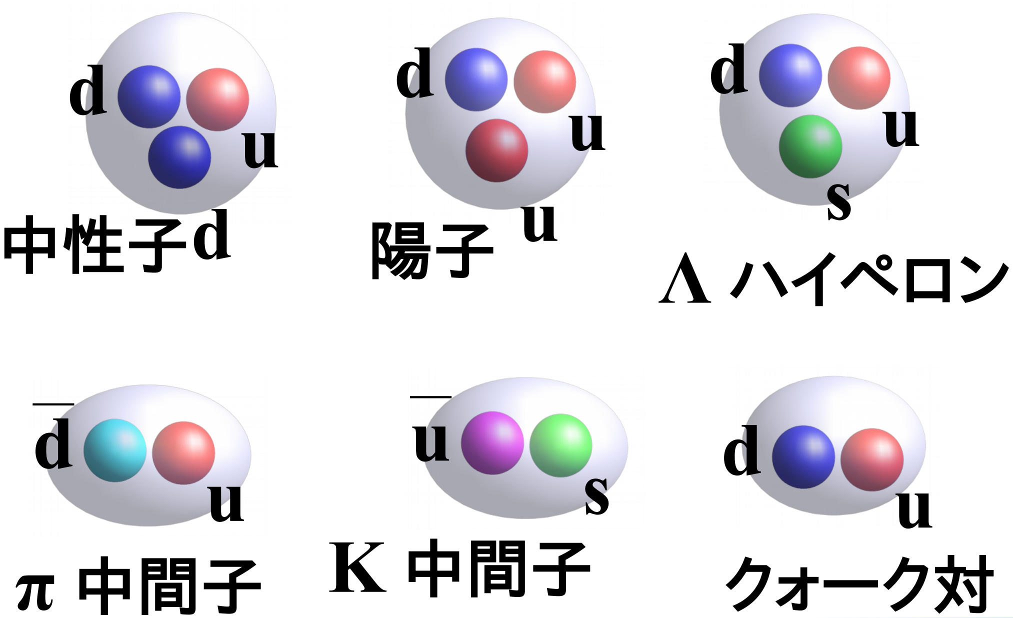
- クォーク間の閉じ込めポテンシャル、グルーオン交換ポテンシャル等による残留相互作用を考慮
- 構成子クォーク質量
  $m_q \sim 300$ MeV, $m_s \sim 500$ MeV

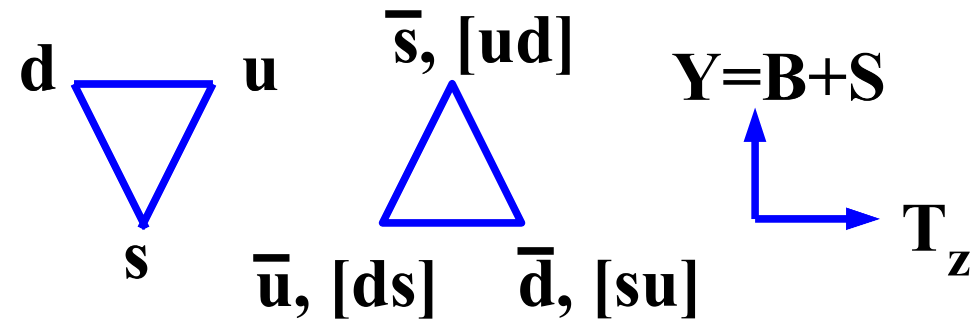


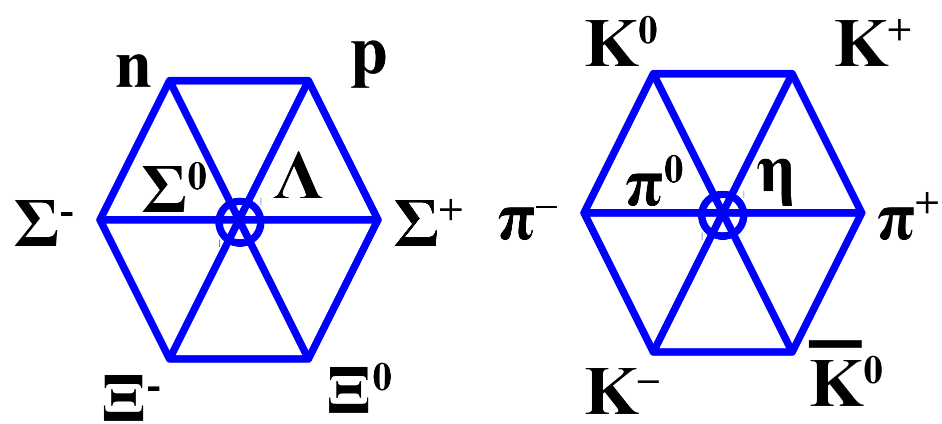
G.S. Bali, Phys. Rept. 343 ('01) 1

ハドロン

- ハドロン
  = クォーク･グルーオンから作られる、強い相互作用をする粒子
  - バリオン (3 つのクォーク) p(uud), n(udd), Δ^{++}(uuu), Δ^{+}(uud), ...
    - s クォークを含むバリオン = ハイペロン
      Λ (uds), Σ^- (dds), Σ^0 (uds), Σ^+ (uus), Ξ^- (dss), Ξ^0 (uss)
  - 中間子 (メソン、クォークと反クォーク)
    π^- ($d\bar{u}$), π^0 (($u\bar{u}-d\bar{d}$)/√2), π^+ ($u\bar{d}$),
    K^- ($s\bar{u}$), $\bar{K}^0$ ($s\bar{d}$),K^+ ($u\bar{s}$), K^0 ($d\bar{s}$),
    η (($u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}$)/√6)







QCD の対称性

- SU(2) 対称性 (回転対称性、厳密)
- SU(3)$_c$ 対称性 (カラー対称性、厳密)
- U(1)$_B$ 対称性 (クォーク数保存、厳密)
- SU(N$_f$) 対称性 (フレーバー対称性、近似的)
- カイラル対称性 (近似的、自発的破れ)
  - クォーク質量がゼロの場合、右巻きクォークと左巻きクォークはフレーバー空間で独立に回転させてもラグランジアンは不変 (詳しくは核物質基礎論 (菅沼さん) & 原子核基礎論 B(後期) で)
- U(1)$_A$ 対称性 (Axial symmetry, 量子異常 (anomaly) で破れる)

カラー (R,G,B)

$$q_f^a(\mathbf{x}, t)$$

フレーバー (u, d, s, ...)

4-spinor (spin と粒子・反粒子)

$$U(1)_B \times U(1)_A \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times SU(3)_c$$

古典作用の対称性

$$\to U(1)_B \times SU(N_f) \times SU(3)_c$$

量子論での対称性

カラー1重項の作り方

- クォーク (カラー3重項) からカラー 1 重項を作るには？
→ RGB 成分をベクトルの成分と考える。

$$\vec{q} = (q_R, q_G, q_B)^T$$

- ベクトルからスカラーを作る方法
  - 内積 → 中間子

$$\vec{q}_1^\dagger \cdot \vec{q}_2 = q_1^{a*} q_2^a$$

  - スカラー3重積 → バリオン

$$(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2) \cdot \vec{q}_3 = \varepsilon_{abc}\ q_1^a\ q_2^b\ q_3^c$$

  - 4 つのクォーク、5 つのクォーク、... からでもスカラーは作れる。
(Exotic hadrons)

- なぜ3つの種類のクォーク (u,d,s) から8重項が現れる？
→ 9 種類の $\bar{q}q$ の組み合わせのうち、
ひとつはフレーバー空間でのスカラー、残りが8重項。

ハドロン

バリオン			
種類	電荷	クォーク組成	質量
p	$+1$	uud	938.27 MeV
n	0	udd	939.57 MeV
Λ	0	$(uds-dus)/\sqrt{2}$	1115.68 MeV
Σ^+	$+1$	uus	1189.37 MeV
Σ^0	0	$(uds+dus)/\sqrt{2}$	1192.64 MeV
Σ^-	-1	dds	1197.45 MeV
Ξ^0	0	uds	1314.86 MeV
Ξ^-	-1	dds	1321.71 MeV

メソン (中間子)			
種類	電荷	クォーク組成	質量
π^+	$+1$	$u\bar{d}$	139.57 MeV
π^0	0	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	134.98 MeV
π^-	-1	$d\bar{u}$	139.57 MeV
K^+	$+1$	$u\bar{s}$	493.68 MeV
K^-	-1	$s\bar{u}$	493.68 MeV
K^0	0	$d\bar{s}$	497.61 MeV
$\bar{K}^0$	0	$s\bar{d}$	497.61 MeV
η	0	$(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$	543.86 MeV

Particle Data Group

$SU(3)_f$ transformation

- **Fundamental triplet $(u,d,s)^T = q \rightarrow q' = U q$ ($U \in SU(3)$)**
- **Anti-quark $\bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q}\, U^+$**
- **Meson octet $M_{ij} = \bar{q}_j q_i \rightarrow M' = UMU^+$**

$$\begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{d}u & \bar{s}u \\ \bar{u}d & \bar{d}d & \bar{s}d \\ \bar{u}s & \bar{d}s & \bar{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = P$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{a_0^0}{\sqrt{2}} & a_0^+ & \kappa^+ \\ a_0^- & \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{a_0^0}{\sqrt{2}} & \kappa^0 \\ \kappa^- & \kappa^0 & \zeta \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & \frac{\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}$$

$SU(3)_f$ transformation

- **Fundamental triplet $(u,d,s)^T = q \to q'=U q$ ($U \in SU(3)$)**
- **Diquark $D_i = \varepsilon_{ijk}\, q_j\, q_k \to D' = D\, U^+$**
- **Baryon octet $B_{ij} = D_j\, q_i \to B'=UBU^+$**

$$B = \begin{pmatrix} [ds]u & [su]u & [ud]u \\ [ds]d & [su]d & [ud]d \\ [ds]s & [su]s & [ud]s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} + \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} - \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

- **Baryon decuplet $\{q_i\, q_j\, q_k\}$ (フレーバーについて完全対称) $\to$10 重項 (${}_5C_2 = 10$)**

バリオンのスピン・フレーバー波動関数

- 低質量領域のバリオンでは、クォークは全て調和振動子ポテンシャルの 0s 状態 (N=0) に入っている。
→ カラー空間で完全反対称なので、
スピン・フレーバー波動関数は完全対称
  - 例 1: Δ バリオン
  (I=3/2, J=3/2 → アイソスピン・スピンについて完全対称)

$$|\Delta^{++}(J_z=3/2)\rangle = \mathcal{N}\varepsilon_{abc}|u^a\uparrow u^b\uparrow u^c\uparrow\rangle = \frac{1}{3!}\varepsilon_{abc}|u^a\uparrow u^b\uparrow u^c\uparrow\rangle$$

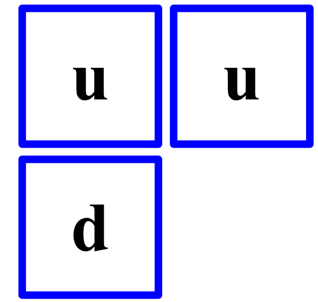
  - 例 2: Λ バリオン (I=0, J=1/2 → アイソスピンについて完全反対称)
  フレーバー空間ではアイソスピン 0 の ud 対と s quark 、
  スピン空間ではスピン 0 のクォーク対とスピン 1/2 のクォークだから、

$$|\Lambda\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|(ud-du)s\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)\uparrow\rangle$$

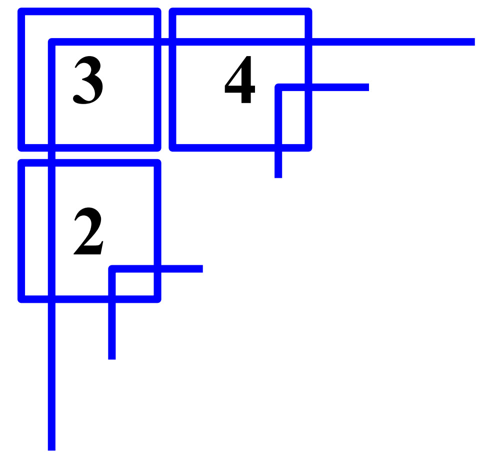
カラーまで考慮してスピン・フレーバー波動関数を完全対称化すると ..
→ レポート問題
(陽子はアイソスピン・スピンがともに 0 のクォーク対と u quark)

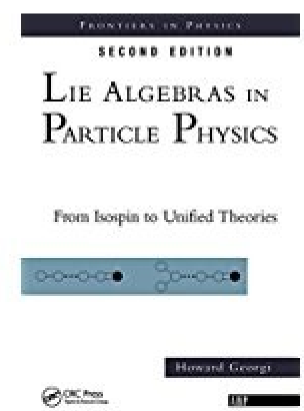
SU(3) 表現の次元

- ヤング図 (Young tableau)
  - 列で反対称化、行で対称化
    udu → (ud-du)u → udu+udu – duu – uud
    → (ud-du)u – u(ud-du)
    (proton = diquark (isospi=0) と u quark)



- 次元 = Factor / Hook
  - Factor = 3 x 4 x 2
  - Hook = 3 x 1 x 1
  - Dimension = Factor / Hook = 8

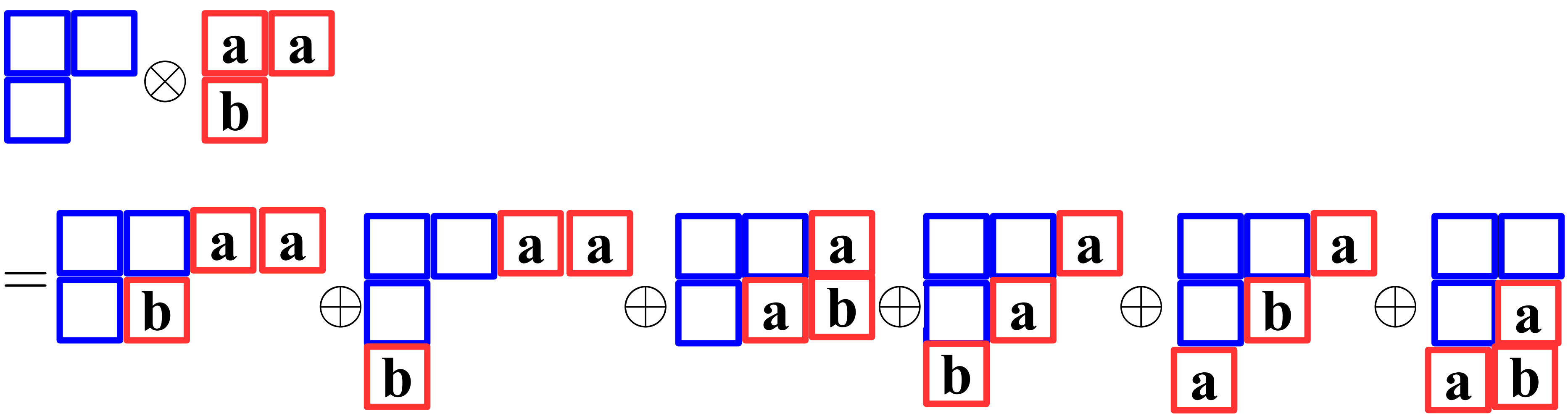




H. Georgi

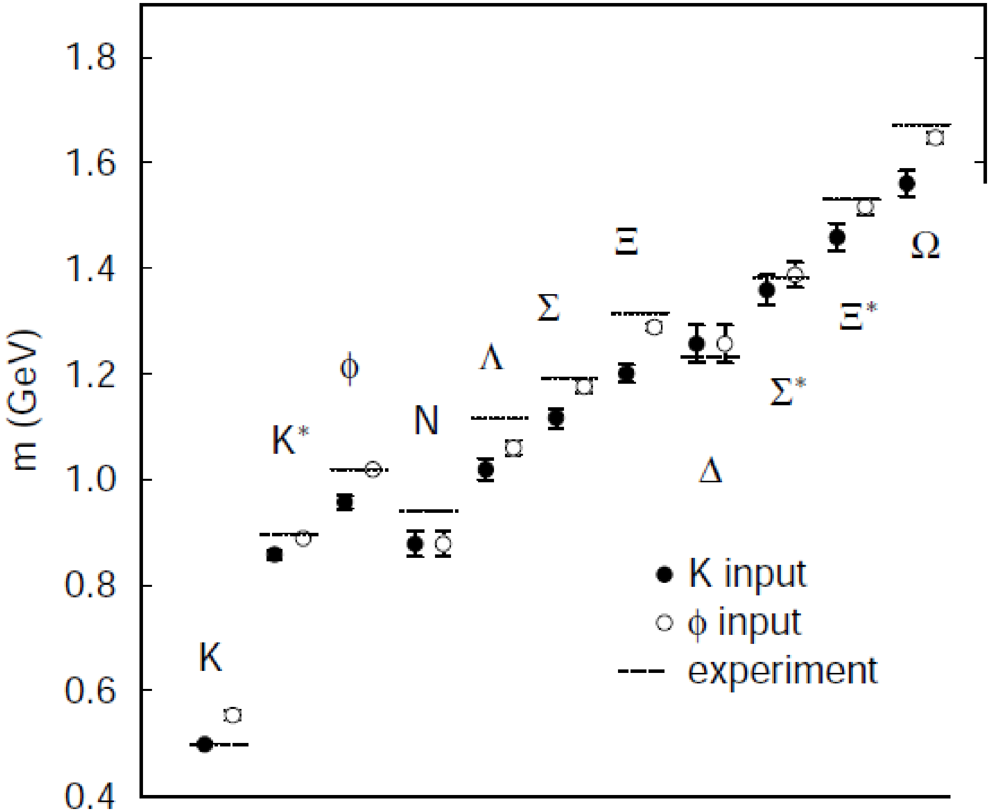
SU(3) 表現の次元

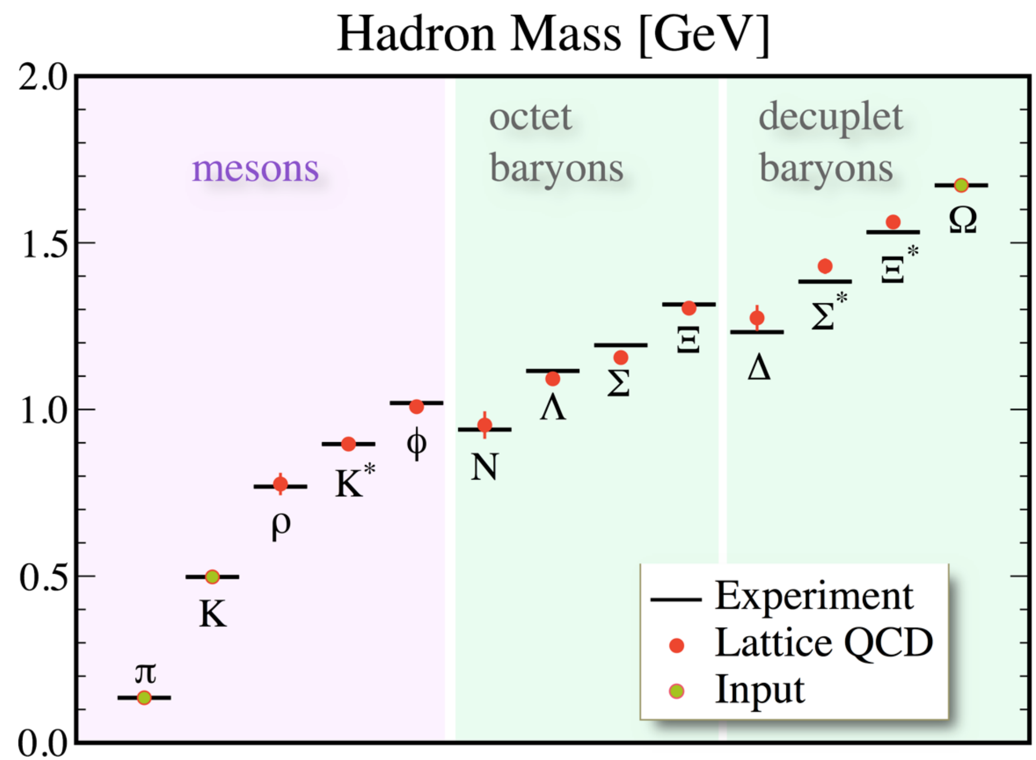
- 合成
  - 1 行目の a を異なる列へ
  - 2 行目の b を異なる列へ
  - 制限
右から左、上から下へ読んだ時、a の数の和 >= b の数の和
SU(N) のとき、N 行以下



$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Lattice QCD results of hadron masses





S. Aoki et al. (CP-PACS Collab.) ('02)

Kuramashi
https://www.ccs.tsukuba.ac.jp/depart_intro/depart_particle/

Hadron Masses

- **Gell-Mann–Okubo Mass Formula**
  Gell-Mann ('61), Okubo ('62)

$$M = a_0 + \underline{a_1 Y} + a_2 \left[\underline{I(I+1)} - \frac{1}{4} Y^2 \right] \qquad (\underline{Y = B + S}, I = \text{isospin})$$

hypercharge

s-quark 数 (-S) による質量の差

アイソスピン空間での回転エネルギーとその SU(3) 拡張版

	B	I	S	M	Y	I(I+1)-Y^2/4	GMO
N	1	0.5	0	939	1	0.5	939
Λ	1	0	-1	1116	0	0	1116
Σ	1	1	-1	1193	0	2	1166
Ξ	1	0.5	-2	1318	-1	0.5	1318
Δ	1	1.5	0	1232	1	3.5	1232
Σ*	1	1	-1	1385	0	2	1385
Ξ*	1	0.5	-2	1533	-1	0.5	1538
Ω	1	0	-3	1672	-2	-1	1691

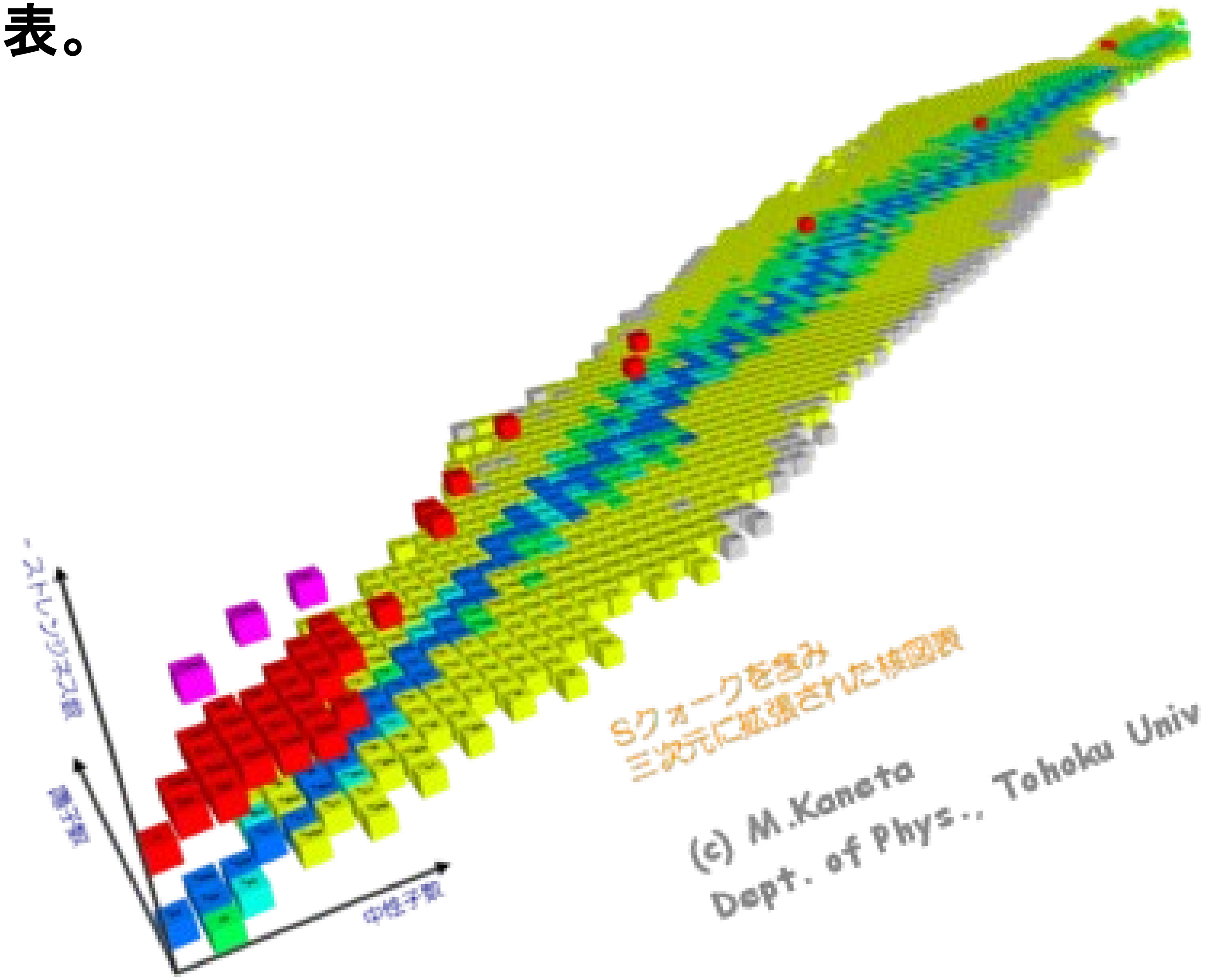
Octet
* M_N, M_Λ, M_Ξ から M_Σ を予測
* 誤差 3%

Decuplet
* 等間隔なので、M_Δ, M_{Σ^*} から M_{Ξ^*}, M_Ω を予測
* 誤差 2% 以下

核子以外のハドロンを含む原子核

3 次元核図表

ハイペロンを含む原子核まで考えた、
(N, Z, -S) ３次元核図表。

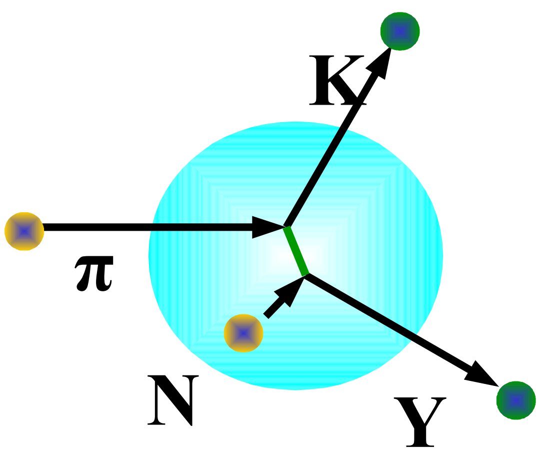


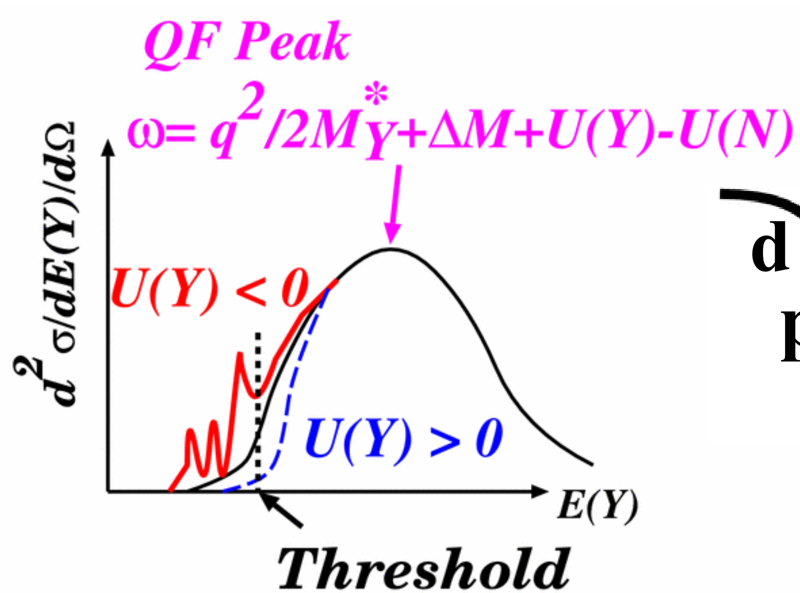
M. Kanata

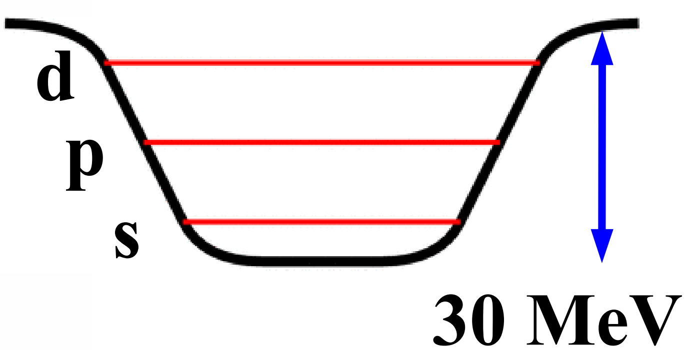
http://lambda.phys.tohoku.ac.jp/~kaneta/pukiwiki/index.php? 三次元核図表

ハドロン核構造の探求方法

- 原子核中にハドロンを生成
  - 束縛状態あり → 束縛エネルギーからポテンシャルを決定
  - 束縛状態無し → スペクトルの形からポテンシャルを推定
- 様々なハドロンと原子核のポテンシャルが生成反応により調べられてきた。
  - ハイパー核生成反応 $\pi^+(u\bar{d}) + n(udd) \to K^+(u\bar{s}) + \Lambda(uds)$
  - パイ中間子原子生成反応 $d + {}^{A}Z \to {}^{3}\mathrm{He} + \pi^- + {}^{A-1}Z$
  - 反 K 中間子原子核生成反応 $K^-(s\bar{u}) + {}^{A}Z \to n + (K^- + {}^{A-1}Z)$



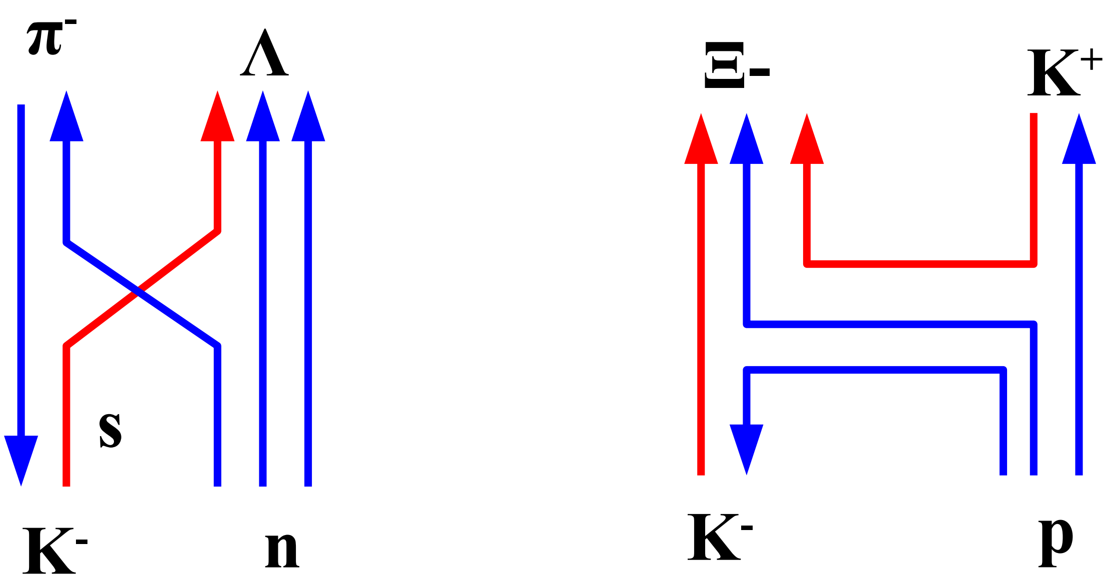




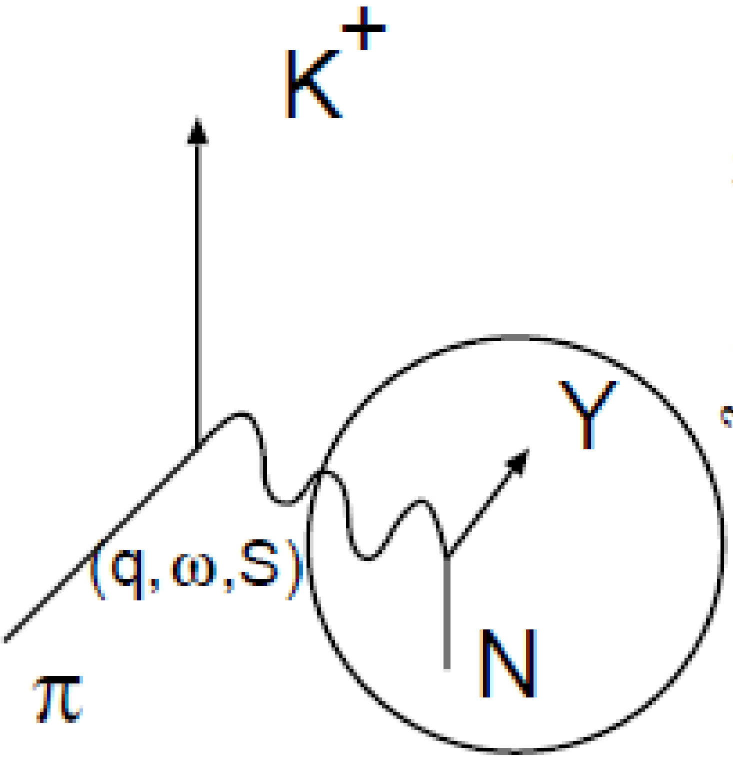
Hypernuclear formation

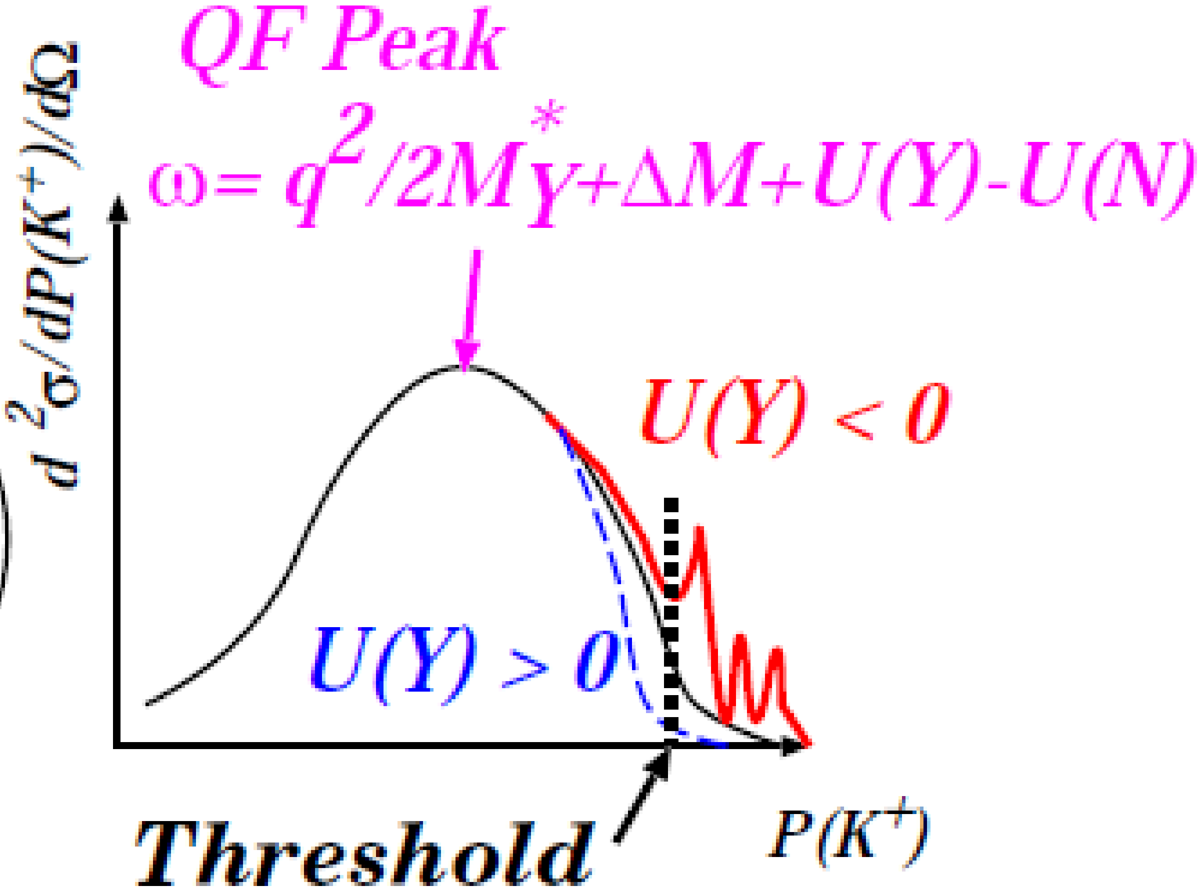
- **(K^-, π), (π, K^+), and (K^-,K^+) reactions on nuclei → Hypernuclei**

Reaction	Elementary Processes: Main Process	Elementary Processes: Other Processes
(K^-,π^-)	$K^-n \to \pi^-\Lambda$,	$K^-n \to \pi^-\Sigma^0$, $K^-p \to \pi^-\Sigma^+$
(K^-,π^+)	$K^-p \to \pi^+\Sigma^-$,	$K^-pp \to \pi^+\Lambda n$ (n-rich hypernuclear formation)
(π^+,K^+)	$\pi^+n \to K^+\Lambda$,	$\pi^+n \to K^+\Sigma^0$, $\pi^+p \to K^+\Sigma^+$
(π^-,K^+)	$\pi^-p \to K^+\Sigma^-$,	$\pi^-pp \to K^+\Lambda n$ (n-rich hypernuclear formation)
(K^-,K^+)	$K^-p \to K^+\Xi^-$,	$K^-pp \to K^+\Lambda\Lambda$



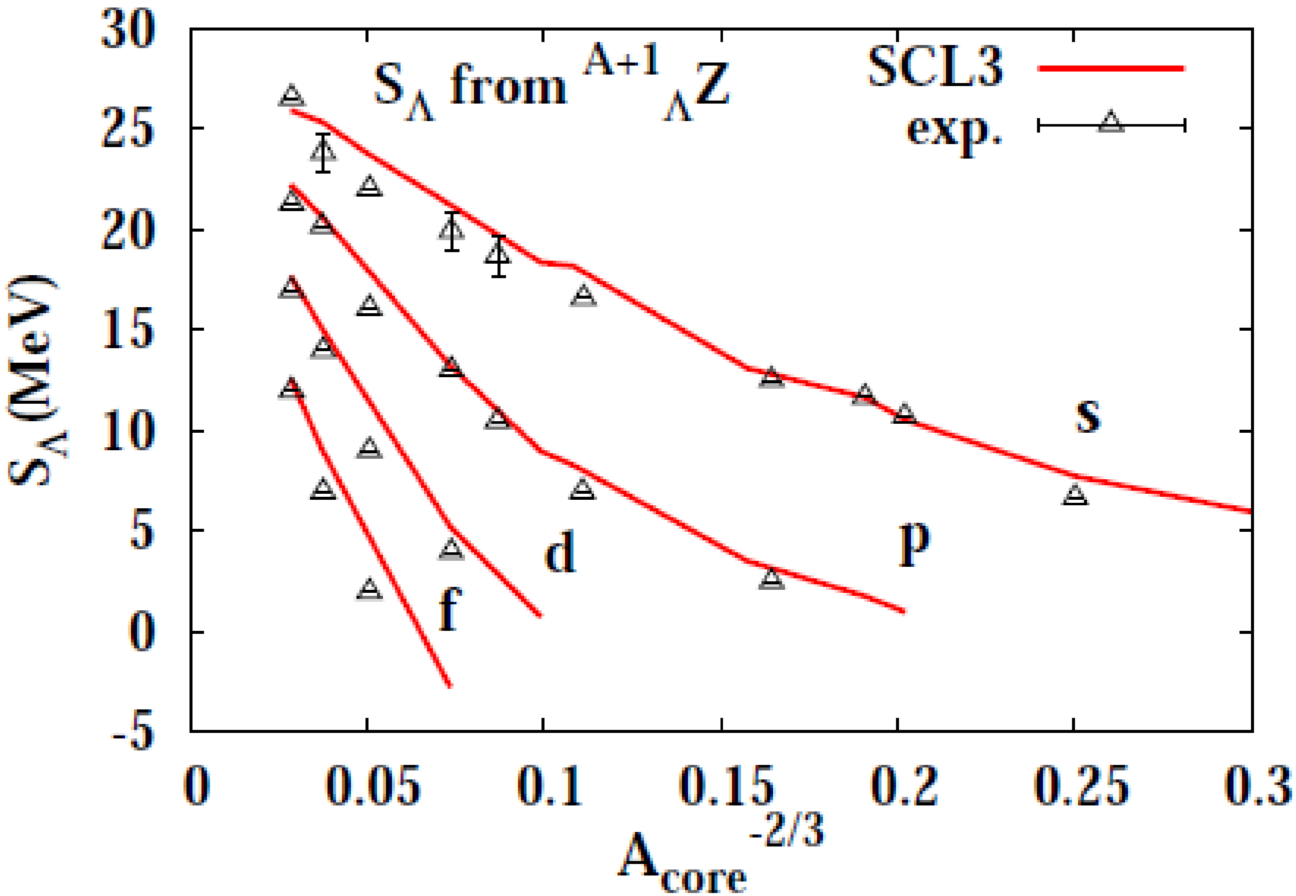
Hypernuclear formation

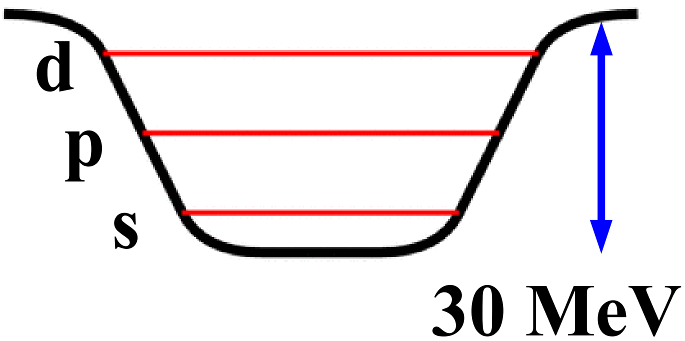




Single particles states of Λ in nuclei

- Single particle potential depth of Λ is around -30 MeV
  - s, p, d, f, … states are clearly seen
  - $A_{core}^{-2/3} \propto R^{-2} \propto$ K.E. of Λ





Hypernuclear production (discrete state)

- **Substitutional reaction**
  - **Magic momentum 近辺では q ~ 0**
    → 核子軌道にハイペロンが入る状態が有利

H. Bando, T. Motoba, J. Zofca,
Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990), 4021-4198.

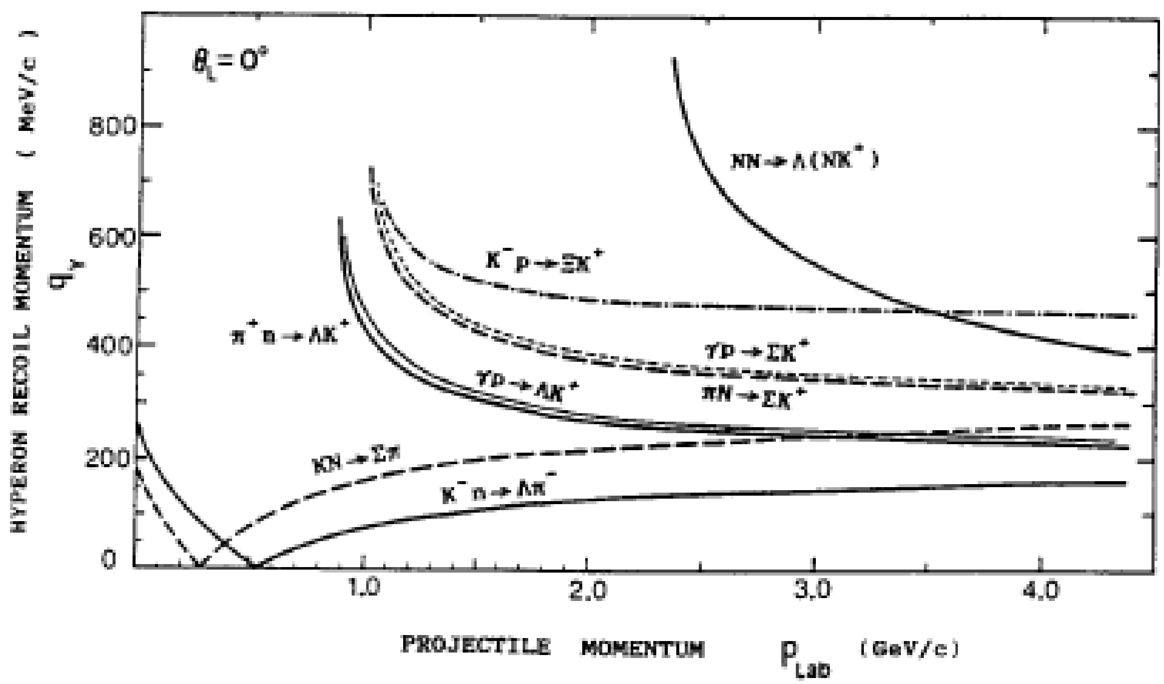
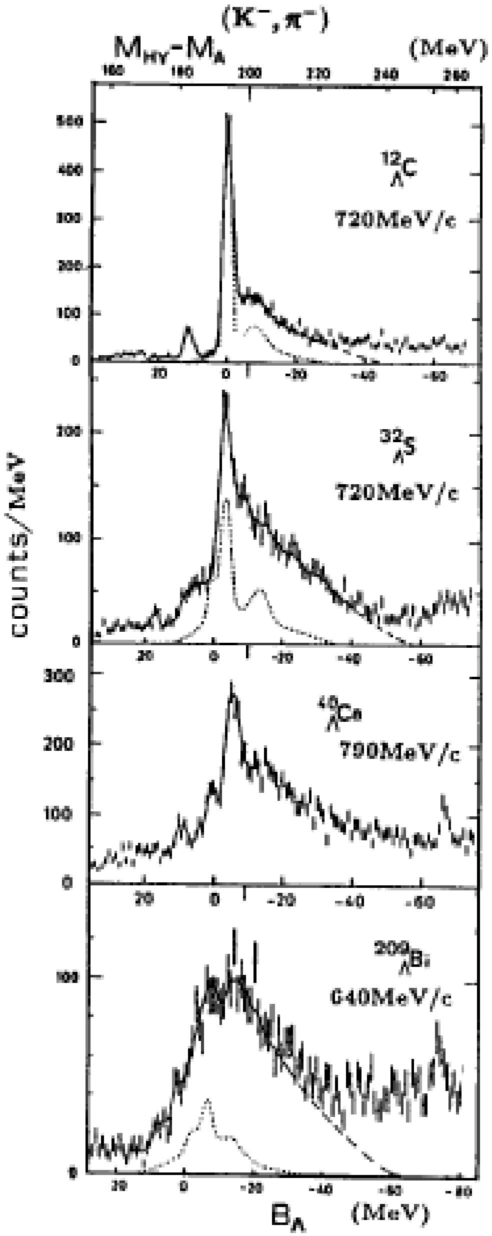
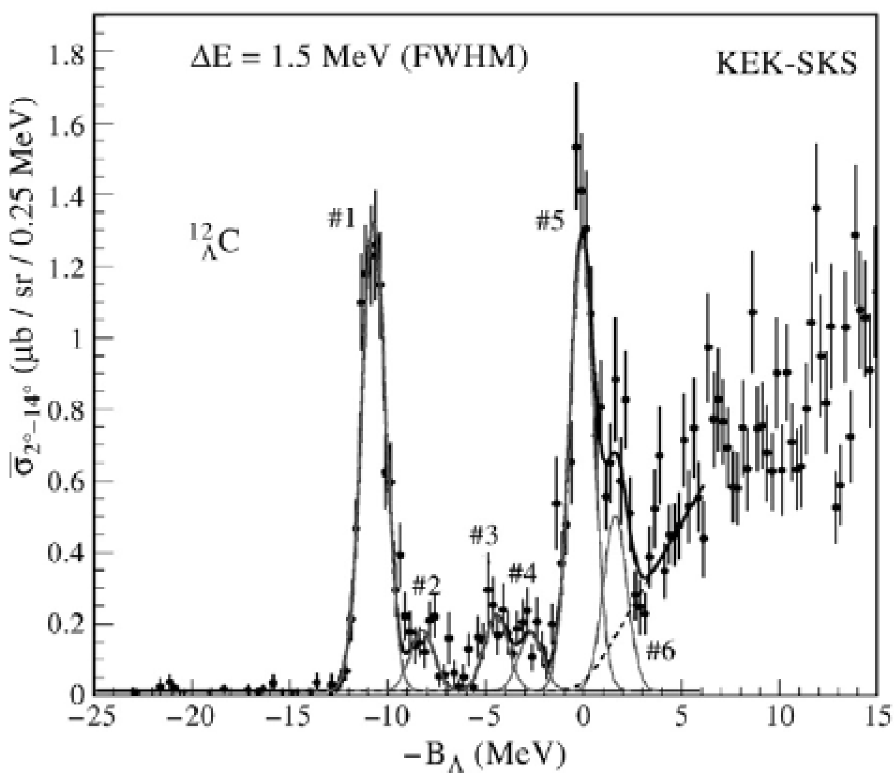


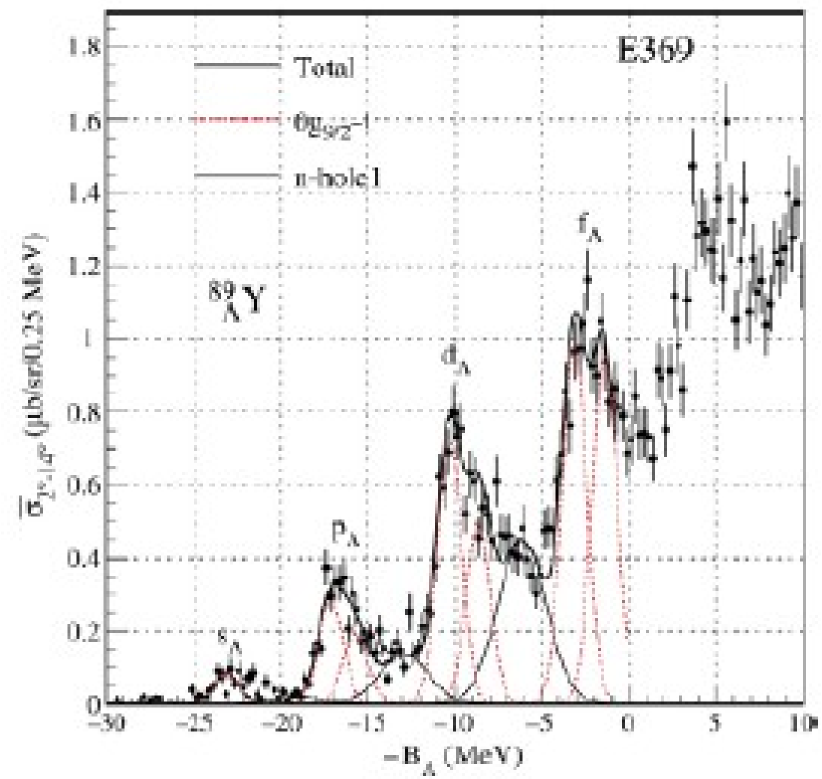
Fig. 2.3. The momentum q_Y transferred to the hyperon Y as a function of the projectile momentum $p_{proj} = p_a$ in the reaction $aN \to Yb$ at $\theta_{b,L} = 0°$.



Λ hypernuclear formation

- **(π⁺, K⁺) reactions on nuclei**
  - **q ~ k_F → various s.p. states of Λ are populated**

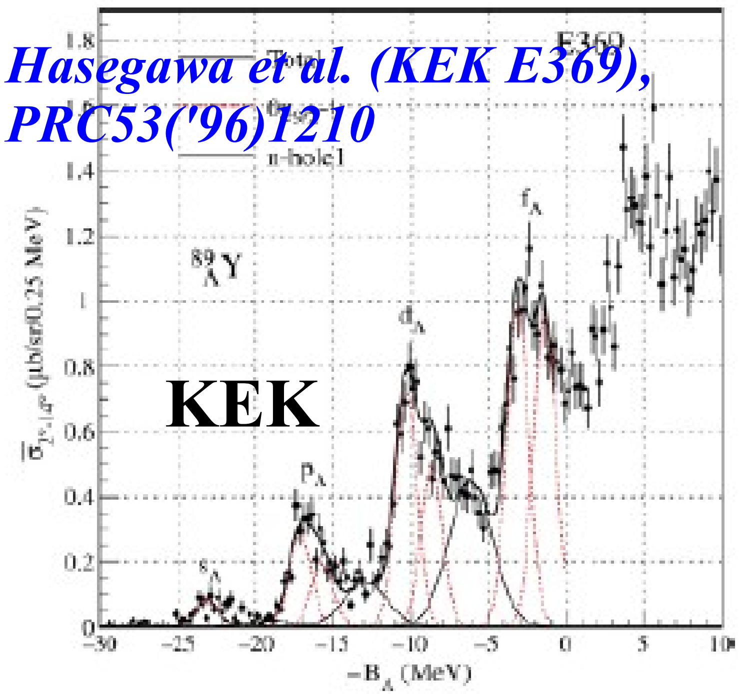


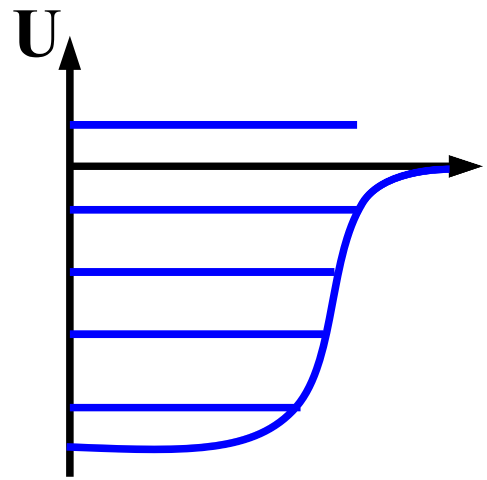


Hasegawa et al.(1996)

Λ, Σ⁻, Ξ⁻, K⁻ 核

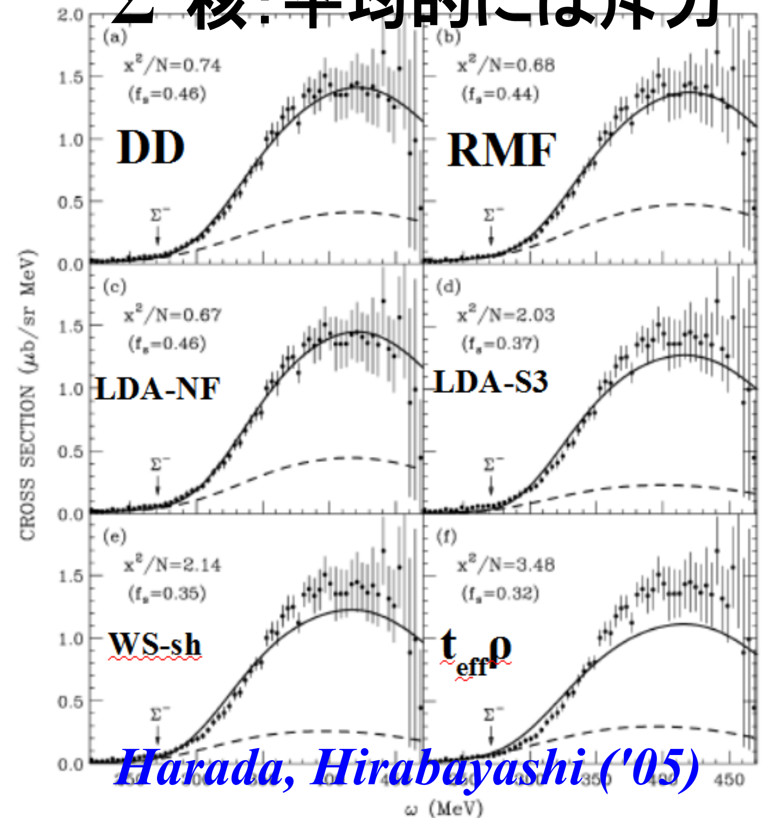
Hasegawa et al. (KEK E369), PRC53('96)1210





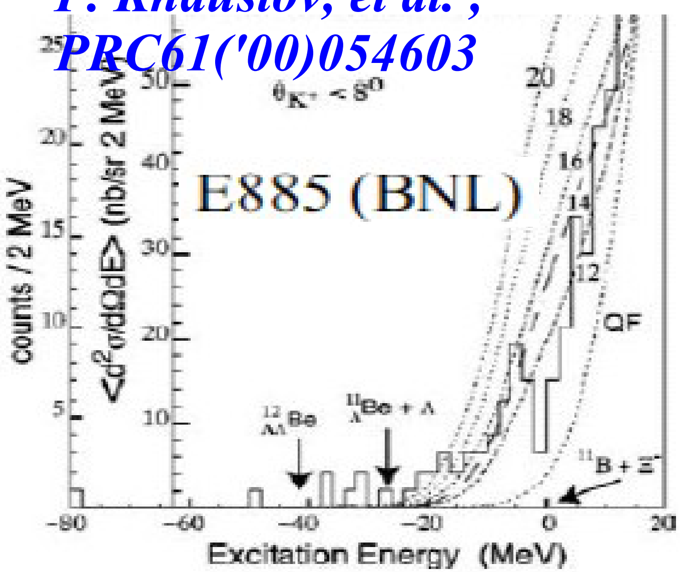
Λ 核：明白な
一粒子状態を観測

Σ⁻核：平均的には斥力



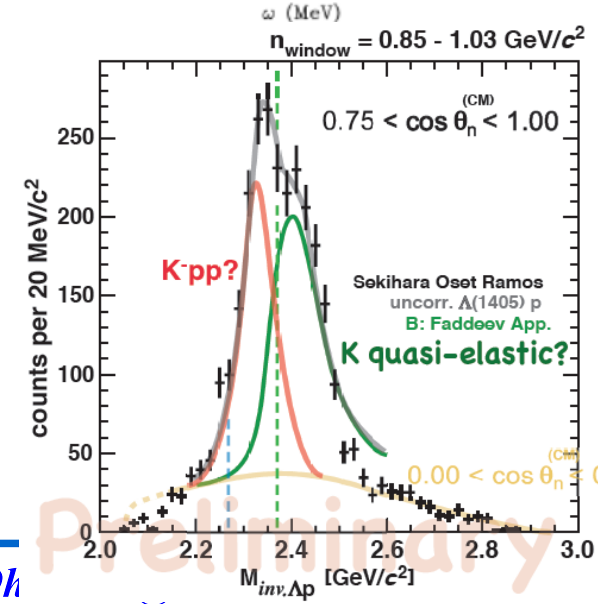
Harada, Hirabayashi ('05)

P. Khaustov, et al. , PRC61('00)054603



Ξ 核：弱い引力
最近のデータでも
束縛状態の存在を示す

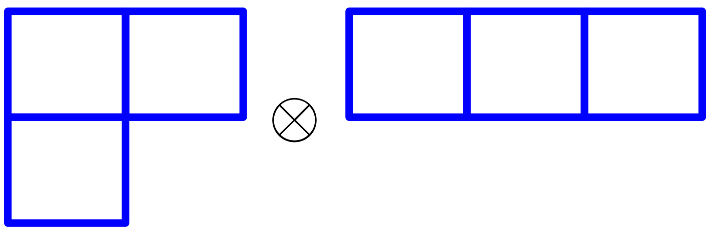
K⁻核は存在しそう。
ただしゆるい束縛
(J-PARC E15
preliminary,
Iwasaki et al.)



レポート問題 (Sec. 3)

1. 全てのクォークの軌道波動関数が同一であるとする。
陽子・Λ 粒子のスピン・フレーバー波動関数 (スピン・フレーバーについて完全対称化したもの) を求めよ。またこれを用いて Λ↑, p↑ において u ↑, u ↓, d ↑, d ↓ である確率 (期待値) を求めよ。

2. N_f=3 (u, d, s) の場合、フレーバー 8 重項と 10 重項に属する 2 つのバリオンの相互作用には、どのような多重項が現れるか？



= ?

レポート問題 (Sec. 3)(cont.)

3. ハドロンを含む原子核を作るには、終状態で現れるハドロンが原子核に「止まる」ことが必要である。
　不変質量 $s^{1/2}$ と2粒子の質量 m_1, m_2 が与えられている場合、重心系での粒子の運動量の大きさは

$$p = \sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}/2\sqrt{s}$$

で与えられる。これを用いて、

$$n(K^-,\pi^-)\Lambda\ ,\quad n(\pi^+,K^+)\Lambda\ ,\quad p(K^-,K^+)\Xi^-\ ,\quad n(K^-,n)K^-\ ,$$

反応における残留粒子 (ハイペロン、または K^- 粒子) の運動量の大きさを評価せよ。
　入射運動量は 0.5, 1.0, 2.0 GeV/c 、また放出粒子は前方 (0度) で観測されるとする。(反応が起きない運動量もあることに注意せよ。素過程反応において核子は静止しているとせよ。ローレンツ変換を複数回用いる。)

レポート問題 (Sec. 2)(追加)

- **Report 2-4**

(この問題は「レポートは半分程度提出」の分母には数えませんが、分子に 0.5 問と数えます。)

2つの同種フェルミオンに現れるパウリ原理効果を考える。ハミルトニアンは2粒子の運動エネルギーのみとする。

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}{\boldsymbol{\nabla}_1}^2-\frac{\hbar^2}{2m}{\boldsymbol{\nabla}_2}^2$$

離れた場所にあるガウス波束の積を反対称化すると、

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)-\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\right], \quad \phi_i(\boldsymbol{r})=\mathcal{N}\exp\left[-\nu(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_i)^2\right]$$

エネルギー期待値はガウス中心の距離の関数となる。この関数を粒子の質量とガウス波束の幅パラメータで表せ。

$$E=\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

(波動関数 Ψ は規格化されていないことに注意。)